JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

ISABELLE GALLAGHER

Perturbation antisymétrique et oscillations dans des équations paraboliques

Journées Équations aux dérivées partielles (1998), p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1998____A4_0>

Journées *Équations aux dérivées partielles*
Saint-Jean-de-Monts, 2-5 juin 1998
GDR 1151 (CNRS)

Perturbations antisymétriques et oscillations dans des systèmes paraboliques

Isabelle Gallagher

Résumé

L'objet de cet exposé est l'étude d'équations d'évolution de type parabolique, périodiques, que l'on pénalise par un terme linéaire, antisymétrique. Par application des méthodes de S. Schochet pour le cas hyperbolique, on obtient un développement asymptotique des solutions de telles équations. La méthode suivie consiste à étudier l'influence de fortes oscillations en temps dans des systèmes paraboliques. Cette théorie est appliquée à deux systèmes décrivant le comportement de fluides géophysiques, pour lesquels on obtient un développement asymptotique pour tout temps, sous une hypothèse, générique, de non résonance.

1. Introduction.

Le point de départ de l'étude est un problème issu de la Mécanique des Fluides: on cherche à étudier un système d'équations décrivant des fluides tels que l'atmosphère terrestre ou les océans. On convient que ces fluides ont une viscosité $\nu > 0$ constante et uniforme, et que leur mouvement peut être modélisé à l'aide des équations de Navier–Stokes tridimensionnelles. Suite à un changement de variable verticale, on peut considérer que ces fluides sont incompressibles; cette hypothèse provient d'une approximation dite hydrostatique, qui permet de repérer la verticale à l'aide de la pression. Enfin on suppose que les différents champs de vecteurs considérés sont périodiques, de période a_i dans la direction x_i, pour $i \in \{1,2,3\}$.

Sous l'effet de la rotation de la Terre, l'atmosphère à des latitudes moyennes est soumise à une force apparente, connue sous le nom de force de Coriolis. En première approximation, cette force n'agit que sur les composantes horizontales du champ de vitesse v^ε, et ce de manière antisymétrique. On est ainsi amené à étudier le système des fluides tournants,

$$(FT^\varepsilon) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t v^\varepsilon + P(v^\varepsilon \cdot \nabla v^\varepsilon) - \nu\Delta v^\varepsilon + P\dfrac{v^\varepsilon \times B}{\varepsilon} & = & 0 \quad \text{dans} \quad \mathbf{R}^+ \times \mathbf{T}^3 \\ \operatorname{div} v^\varepsilon & = & 0 \\ v^\varepsilon_{|t=0} & = & v_0\,, \end{array} \right.$$

avec $B = (0,0,1)$, et où ε^{-1} est lié à la vitesse de rotation du fluide. L'opérateur P est le projecteur de Leray sur les champs de divergence nulle. On a noté $\mathbf{T}^3$ pour la boîte périodique tridimensionnelle, de côté de taille a_i dans la direction x_i. De telles équations, avec ou sans viscosité, ont été étudiées notamment par A. Babin, A. Mahalov et B. Nicolaenko dans [1]–[3], ainsi que par T. Colin et P. Fabrie dans [7], et E. Grenier dans [11]. Par souci de simplicité, on a omis d'écrire dans l'équation un terme de force extérieure, tous les résultats énoncés ici restant valables en présence d'un tel terme (voir [10]).

On cherche à comprendre le comportement asymptotique des solutions de ce système quand le paramètre ε tend vers 0, c'est–à–dire quand la pénalisation $Pv^\varepsilon \times B$ prend de plus en plus d'importance dans l'équation. Dans le cas de données dites "bien préparées" (c'est–à–dire éléments du noyau de la pénalisation), il est bien connu que (FT^ε) admet un système limite, qui n'est autre que le système de Navier–Stokes bidimensionnel (voir [1], [7], [8], [11]). Dans le cas de données quelconques, E. Grenier dans [11] a montré l'existence d'un système limite, en un sens que nous préciserons, et A. Babin, A. Mahalov et B. Nicolaenko dans [1]–[3] démontrent des résultats d'existence et de convergence en grand temps des solutions de (FT^ε), pour ε assez petit. Notre objectif est de poursuivre ces études, afin d'obtenir une écriture asymptotique de ces solutions. Dans ce but, nous étudierons le système parabolique abstrait suivant,

$$(\mathcal{S}^\varepsilon) \quad \begin{cases} \partial_t v^\varepsilon + q(v^\varepsilon, v^\varepsilon) + a_2(D)v^\varepsilon + \dfrac{L(v^\varepsilon)}{\varepsilon} & = \ 0 \quad \text{dans} \quad \mathbf{R}^+ \times \mathbf{T}^d \\ \hfill v^\varepsilon_{|t=0} & = \ v_0\,, \end{cases}$$

où L est une matrice de multiplicateurs de Fourier antisymétrique, définie par

$$L(v) = \mathcal{F}^{-1} \sum_{a=1}^{d} i\omega^a(n)\,(\mathcal{F}v(n), e^a(n))\, e^a(n),$$

où $\mathcal{F}v(n)$ représente la transformée de Fourier discrète de v, les $\omega^a(n)$ sont des réels, et où $(e^a(n))_{1\leq a\leq d}$ est une famille orthonormée de vecteurs, pour tout n. On a écrit q pour une forme bilinéaire de la forme

$$q(u,v) = \sum_{j,j'} A_{j,j'}(D)(u^i v^j),$$

où $A_{j,j'}(D)$ est un multiplicateur de Fourier d'ordre 1. L'opérateur $a_2(D)$ est elliptique du second ordre. Enfin on a noté $\mathbf{T}^d$ pour une boîte périodique de $\mathbf{R}^d$.

Ce type de système a fait l'objet de nombreuses études, dans des cadres divers. Citons par exemple, outre les références données plus haut, les travaux de T. Beale et A. Bourgeois dans [4], J.-Y. Chemin dans [6], D. Iftimie dans [12], et J.-L. Lions, R. Temam et S. Wang dans [18], pour les équations dites primitives du système quasigéostrophique, ainsi que les travaux de S. Klainerman et A. Majda ([16]) ou H.-O. Kreiss, J. Lorenz et M.J. Naughton ([17]) pour les fluides faiblement compressibles. Enfin les articles de J.-L. Joly, G. Métivier et J. Rauch ([14]–[15] par exemple) sur l'optique géométrique, et le travail de S. Schochet dans [19], concernent des systèmes du même type que $(\mathcal{S}^\varepsilon)$, sans terme elliptique.

Dans la section suivante, nous étudions le système abstrait $(\mathcal{S}^\varepsilon)$, et démontrons un théorème de convergence ainsi qu'un résultat asymptotique sur ses solutions. Ces résultats sont appliqués au système des fluides tournants dans la section 3.

2. Étude du système abstrait.

2.1 Énoncé des résultats

Commençons par remarquer que l'antisymétrie de l'opérateur de pénalisation L implique qu'il disparaît dans les estimations d'énergie, et donc que le problème $(\mathcal{S}^\varepsilon)$ est bien posé. On a ainsi le théorème suivant (voir [11]).

Théorème 1 *Si $v_0 \in H^s(\mathbf{T}^d)$, avec $s \geq \frac{d}{2} - 1$, alors il existe un temps $T > 0$, indépendant de ε, et une unique solution v^ε de $(\mathcal{S}^\varepsilon)$, bornée dans $C^0([0,T], H^s(\mathbf{T}^d)) \cap L^2([0,T], H^{s+1}(\mathbf{T}^d))$.*

Dès lors, on peut chercher à passer à la limite dans l'équation; on se heurte cependant au fait que $\partial_t v^\varepsilon$ n'est pas borné en ε, et les méthodes habituelles de compacité sont donc inopérantes ici. L'idée, en suivant [1], [11], [19], est de filtrer l'équation, en introduisant le semi-groupe engendré par L, défini par

$$\mathcal{L}(t)v = \mathcal{F}^{-1} \sum_{a=1}^{d} e^{-i\omega^a(n)t} \left(\mathcal{F}v(n), e^a(n)\right) e^a(n).$$

On définit alors $u^\varepsilon = \mathcal{L}\left(-\frac{t}{\varepsilon}\right) v^\varepsilon$, qui converge dans $C^0([0,T], H^s(\mathbf{T}^d)) \cap L^2([0,T], H^{s+1}(\mathbf{T}^d))$ vers une fonction u (voir [11]), solution du système limite $(\mathcal{S}_0)$ suivant,

$$(\mathcal{S}_0) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t u + \mathcal{Q}(u,u) + \mathcal{A}_2(D)u & = & 0 \\ u_{|t=0} & = & v_0 \,, \end{array} \right.$$

où$\mathcal{Q}(u,v)$, et $\mathcal{A}_2(D)u$ sont les limites dans $\mathcal{D}'$ respectivement de

$$\mathcal{Q}^\varepsilon(u,u) \stackrel{def}{=} \mathcal{L}(-\frac{t}{\varepsilon})q\left(\mathcal{L}(\frac{t}{\varepsilon})u, \mathcal{L}(\frac{t}{\varepsilon})u\right) \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_2^\varepsilon(D)u \stackrel{def}{=} \mathcal{L}(-\frac{t}{\varepsilon})a_2(D)\mathcal{L}(\frac{t}{\varepsilon})u. \qquad (1)$$

Il est facile de voir que les opérateurs $\mathcal{A}_2(D)$ et $\mathcal{A}_2^\varepsilon(D)$ sont elliptiques.

En l'absence de terme elliptique (c'est–à–dire si $a_2(D) = 0$), S. Schochet démontre dans [19] que la convergence de u^ε vers u a lieu aussi longtemps qu'existe le système limite, et ce dès que la donnée initiale est dans H^s avec $s \geq \frac{d}{2} + 3$. Par application de ses méthodes, nous démontrons le résultat suivant.

Théorème 2 *Si $v_0 \in H^s(\mathbf{T}^d)$, avec $s \geq \frac{d}{2} - 1$, et si u, solution de $(\mathcal{S}_0)$, vérifie*

$$u \in C^0([0,T_0], H^s(\mathbf{T}^d)) \cap L^2([0,T_0], H^{s+1}(\mathbf{T}^d)),$$

alors pour ε assez petit, la solution v^ε de $(\mathcal{S}^\varepsilon)$ est aussi définie sur $[0,T_0]$, et

$$v^\varepsilon - \mathcal{L}(\frac{t}{\varepsilon})u = o(1) \quad \textit{dans} \quad C^0([0,T_0], H^s(\mathbf{T}^d)) \cap L^2([0,T_0], H^{s+1}(\mathbf{T}^d)).$$

Remarquons que la présence du terme elliptique permet ainsi d'obtenir la régularité Sobolev minimale pour les données initiales.

Notre étude se poursuit alors par la recherche d'un développement de u^ε aux ordres supérieurs. Dans [1], il est démontré un résultat de convergence à la vitesse $O(\varepsilon)$ pour les fluides tournants, et ce résultat suppose une hypothèse de type "petits diviseurs" sur la perturbation L. Nous allons définir cette notion dans notre cadre abstrait, et sous une telle hypothèse, le théorème 3 donne le premier terme du développement de u^ε.

Définition 1 (Estimations de petits diviseurs) *On dira que L vérifie une estimation de petits diviseurs à l'ordre $p \geq 2$ et de degré α s'il existe une constante $C_{p,\alpha}$ telle que pour tout $(k_1, .., k_p)$ dans $\mathbf{Z}^{pd}$, pour tout $(b_1, .., b_{p+1})$ dans $\{1, .., d\}^{p+1}$, on a*

$$\sum_{i=1}^{p} \omega^{b_i}(k_i) \neq \omega^{b_{p+1}}(\sum_{i=1}^{p} k_i) \quad \Rightarrow \quad |\sum_{i=1}^{p} \omega^{b_i}(k_i) - \omega^{b_{p+1}}(\sum_{i=1}^{p} k_i)|^{-1} \leq C_{p,\alpha} \prod_{i=1}^{p} (1 + |k_i|)^\alpha ,$$

D'autre part, L vérifie une estimation de petits diviseurs à l'ordre 1 et de degré α_1 s'il existe une constante C_1 telle que pour tout k et tout (b_1, b_2) vérifiant $\omega^{a_1}(k) \neq \omega^{a_2}(k)$, on a $\left|\omega^{b_1}(k) - \omega^{b_2}(k)\right|^{-1} \leq C_1 (1 + |k|)^{\alpha_1}$.

Remarques. Une telle estimation à l'ordre p peut se comprendre comme une estimation des interactions $(p+1)$–ondes créées par la perturbation. Il est démontré dans [10] que pour tout $p \geq 1$ et pour presque toutes les boîtes périodiques (c'est–à–dire pour presque tous les a_i, avec $i \in \{1, ..d\}$), il existe un réel $\alpha_p > 0$ tel que L vérifie une estimation de petits diviseurs à l'ordre p, de degré α_p.

Théorème 3 *Supposons que L vérifie des estimations de petits diviseurs aux ordres 1 et 2, de degrés respectifs α_1 et α_2, avec $\alpha_i \geq 0$, et soit $s > \frac{d}{2}$. On définit $\alpha_{12} =$* $\max(1 + \alpha_1, \alpha_2)$*. Alors si $v_0 \in H^{s+\alpha_{12}}$ et si u, solution de $(\mathcal{S}_0)$, vérifie*

$$u \in C^0([0, T_0], H^{s+\alpha_{12}}(\mathbf{T}^d)) \cap L^2([0, T_0], H^{s+1+\alpha_{12}}(\mathbf{T}^d)),$$

alors pour ε assez petit, la solution v^ε de $(\mathcal{S}^\varepsilon)$ est telle que $u^\varepsilon = \mathcal{L}(-\frac{t}{\varepsilon})v^\varepsilon$ vérifie

$$u^\varepsilon = u + \varepsilon h - \varepsilon \tilde{R}^\varepsilon_{osc}(u) + o(\varepsilon) \quad dans \quad C^0([0, T_0], H^{\frac{d}{2}-1}(\mathbf{T}^d)) \cap L^2([0, T_0], H^{\frac{d}{2}}(\mathcal{T}^d)),$$

où h est la solution dans $C^0([0, T_0], H^{\frac{d}{2}-1}) \cap L^2([0, T_0], H^{\frac{d}{2}})$ d'un système limite linéarisé

$$(\mathcal{S}_1) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t h + 2Q(u, h) + \mathcal{A}_2(D)h & = & R(u) \\ h_{|t=0} & = & h_0(u), \end{array} \right.$$

et où $\tilde{R}^\varepsilon_{osc}(u)$ est une fonction rapidement oscillante en temps, et se calcule explicitement en fonction de u, tout comme $h_0(u)$ et $R(u)$.

Remarque. Si $[a_2(D), L] = 0$, alors $u \in C^0([0, T_0], H^{s+\alpha_2}) \cap L^2([0, T_0], H^{s+1+\alpha_2})$ est une hypothèse suffisante pour avoir le résultat.

Notons que dans [9], un calcul asymptotique similaire est mené dans le cas où il n'y a pas de terme elliptique (c'est–à–dire quand $a_2(D) = 0$).

2.2 Éléments de démonstrations

2.2.1 Calcul préliminaire

Afin de démontrer les théorèmes 2 et 3, étudions l'équation vérifiée par le champ $w^\varepsilon = u^\varepsilon - u$. La solution filtrée u^ε vérifie

$$(\tilde{\mathcal{S}}^\varepsilon) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t u^\varepsilon + \mathcal{Q}^\varepsilon(u^\varepsilon, u^\varepsilon) + \mathcal{A}_2^\varepsilon(D)u^\varepsilon & = & 0 \quad \text{dans} \quad \mathbf{R}^+ \times \mathbf{T}^d \\ u^\varepsilon_{|t=0} & = & v_0 \,, \end{array} \right.$$

où $\mathcal{Q}^\varepsilon(u^\varepsilon, u^\varepsilon)$ et $\mathcal{A}_2^\varepsilon(D)$ ont étés définis dans (1). Alors w^ε vérifie le système suivant.

$$\partial_t w^\varepsilon + \mathcal{Q}^\varepsilon(w^\varepsilon, w^\varepsilon + 2u) + \mathcal{A}_2^\varepsilon(D)w^\varepsilon = -\mathcal{Q}^\varepsilon(u,u) + \mathcal{Q}(u,u) + \mathcal{A}_2(D)u - \mathcal{A}_2^\varepsilon(D)u, \quad (2)$$

avec une donnée initiale nulle, puisque $u^\varepsilon_{|t=0} = u_{|t=0} = v_0$.

Calculons le membre de droite de ce système. Par le théorème de la phase non stationnaire, on a

$$\mathcal{A}_2^\varepsilon(D)u - \mathcal{A}_2(D)u = \mathcal{F}^{-1} \sum_{\omega_n^{a,b} \neq 0} e^{i\frac{t}{\varepsilon}\omega_n^{a,b}} \Big(a_2(n)u^b(n), e^a(n) \Big)\, e^a(n),$$

avec $\omega_n^{a,b} = \omega^a(n) - \omega^b(n)$, et $u^b(n) = \Big(\mathcal{F}u(n) | e^b(n)\Big)\, e^b(n)$. De même,

$$\mathcal{Q}^\varepsilon(u,v) - \mathcal{Q}(u,v) = \mathcal{F}^{-1} \sum_{\omega_{k,n}^{a,b,c} \neq 0} e^{-i\frac{t}{\varepsilon}\omega_{k,n}^{a,b,c}} \Big(A_{j,j'}(n) u^{a,j}(k) v^{b,j'}(n-k), e^c(n) \Big)\, e^c(n),$$

avec $\omega_{k,n}^{a,b,c} = \omega^a(k) + \omega^b(n-k) - \omega^c(n)$.

Par conséquent, le membre de droite de l'équation (2) est un terme rapidement oscillant en temps. Il s'agit donc finalement de comprendre l'influence, sur un système de type parabolique, de termes de forces extérieures fortement oscillants en temps. De telles fonctions sont définies dans la section suivante, où est démontré un lemme général décrivant l'effet de telles forces extérieures.

2.2.2 Oscillations dans des systèmes paraboliques

Commençons par définir la notion de terme oscillant suivante. On a noté $\vec{k_q} = (k_1, .., k_q)$, où $k_i \in \mathbf{Z}^d$, et $|\vec{k_q}| = \max_{1 \leq i \leq q} |k_i|$. Enfin $\mathbf{1}_X$ représente la fonction caractéristique d'un ensemble X.

Définition 2 (fonctions (p,σ)-oscillantes) *Soit $p \geq 1$ et $\sigma \in \mathbf{R}$ fixés. La fonction $R^\varepsilon_{osc}(t)$ est dite (p,σ)-oscillante s'il existe des fonctions à valeurs réelles $\beta_1, .., \beta_p$, r_0 et $(f_i)_{i \geq 0}$ telles que R^ε_{osc} peut s'écrire de la manière suivante, où :*

$$R^\varepsilon_{osc}(t) = \sum_{q \in \{1,..,p\}} R^\varepsilon_{q,osc}(t), \quad \textit{avec} \quad \mathcal{F}R^\varepsilon_{1,osc}(t,n) = \mathbf{1}_{\{n \,|\, \beta_1(n) \neq 0\}} e^{-i\frac{t}{\varepsilon}\beta_1(n)} f_0(t,n),$$

$$\textit{et} \quad \forall q \geq 2, \quad \mathcal{F}R^\varepsilon_{q,osc}(t,n) = \sum_{\vec{k_q} \in K_q^n} e^{-i\frac{t}{\varepsilon}\beta_q(n,\vec{k_q})} r_0(n, \vec{k_q}) f_1(t,k_1)..f_q(t,k_q),$$

avec $K_q^n = \left\{ \vec{k_q} \in \mathbf{Z}^{dq} \mid \sum_{i=1}^{q} k_i = n \text{ et } \beta_q(n, \vec{k_q}) \neq 0 \right\}$, *et où* r_0 *et* $(f_i)_{i \geq 0}$ *vérifient*

$$|r_0(n, \vec{k_q})| \leq C\,(1+|n|)^{\rho_0}\,(1+|k_1|)^{\rho_1} \,..\, (1+|k_q|)^{\rho_q}\,, \quad \textit{avec} \quad \rho_i \geq 0 \textit{ et } \rho_0+\sigma+\frac{d}{2} > 0;$$

$$\mathcal{F}^{-1} f_0(t,\cdot) \quad \textit{est un élément de} \quad C^0([0,T_0], H^\sigma) \cap L^2([0,T_0], H^{\sigma+1})\,;$$

$$\mathcal{F}^{-1} \partial_t f_0(t,\cdot) \quad \textit{est un élément de} \quad L^2([0,T_0], H^{\sigma-1})\,;$$

$$\prod_{i \geq 1} \mathcal{F}^{-1}(1+|\cdot|)^{\rho_i} f_i(t,\cdot) \quad \textit{est dans} \quad C^0([0,T_0], H^{\sigma+\rho_0}) \cap L^2([0,T_0], H^{\sigma+1+\rho_0});$$

et enfin on suppose qu'il existe $(\bar{\sigma}_i)_{i \geq 1}$ *tel que* $\bar{\sigma}_i + \sum_{j \neq i} \sigma_j > 0$, *et* $\mathcal{F}^{-1}\partial_t f_i(t,\cdot)$ *est un élément de* $L^2([0,T_0], H^{\bar{\sigma}_i+\rho_i})$.

Remarques. Il est clair qu'une fonction (p,σ)–oscillante est en particulier bornée dans l'espace $C^0([0,T_0],H^\sigma) \cap L^2([0,T_0],H^{\sigma+1})$. On remarque que si R^ε_{osc} est une fonction (p,σ)–oscillante, alors sa première dérivée en temps, $\partial_t R^\varepsilon_{osc}$, n'est pas bornée en ε, alors que $\varepsilon\, \partial_t R^\varepsilon_{osc}$ l'est.

Lemme 1 *Soient* $T_0 > 0$ *et* $\sigma \geq \frac{d}{2} - 1$ *deux réels, soit* b^ε *une famille de fonctions, bornée dans l'espace* $C^0([0,T_0],H^\sigma) \cap L^2([0,T_0],H^{\sigma+1})$, *et soit* a_0^ε *une fonction tendant vers zéro avec* ε *dans* H^σ. *Soient* $\mathcal{Q}^\varepsilon$ *et* $\mathcal{A}_2^\varepsilon$ *respectivement une forme quadratique et un opérateur elliptique du second ordre, du type* (1), *et enfin soit* R^ε_{osc} *une fonction* $(p,\sigma-2)$*-oscillante, avec* $p \geq 1$, *et soit* F^ε *une fonction tendant vers zéro avec* ε *dans l'espace* $L^2([0,T_0],H^{\sigma-1})$.

Alors la fonction a^ε, *solution de*

$$(\mathcal{E}^\varepsilon_{osc}) \quad \begin{cases} \partial_t a^\varepsilon + \mathcal{Q}^\varepsilon(a^\varepsilon, a^\varepsilon + b^\varepsilon) + \mathcal{A}_2^\varepsilon(D) a^\varepsilon &= R^\varepsilon_{osc} + F^\varepsilon \quad \textit{dans} \quad \mathbf{T}^d \\ a^\varepsilon_{|t=0} &= a_0^\varepsilon\,, \end{cases}$$

est un $o(1)$ *dans l'espace* $C^0([0,T_0],H^\sigma) \cap L^2([0,T_0],H^{\sigma+1})$.

Démonstration du lemme 1. Pour démontrer ce lemme, on s'inspire des méthodes de S. Schochet ([19]), dont l'idée repose sur la simple constatation suivante. Considérons l'équation différentielle ordinaire

$$\partial_t \varphi - F(\varphi) = \cos\frac{\beta t}{\varepsilon}, \quad \text{avec} \quad \beta \neq 0,$$

et définissons la fonction

$$\psi = \varphi - \frac{\varepsilon}{\beta} \sin\frac{t}{\varepsilon}.$$

Alors à ε près, ψ et φ ont la même taille, et ψ vérifie l'équation

$$\partial_t \psi = F\left(\psi + \frac{\varepsilon}{\beta}\sin\frac{t}{\varepsilon}\right),$$

qui est une équation où, à ε près, la partie oscillante a disparu.

Pour adapter cette idée à la fonction R^ε_{osc} du lemme 1, on commence par faire un découpage en hautes et basses fréquences, en fixant une fréquence de coupure N arbitraire,

$$R^\varepsilon_{osc} = R^\varepsilon_{osc,N} + R^{\varepsilon,N}_{osc},$$

avec $R^\varepsilon_{osc,N} = \sum_{q\in\{1,..,p\}} R^\varepsilon_{q,osc,N}$, où, avec les notations de la définition 2,

$$\begin{array}{rrcl} & R^\varepsilon_{1,osc,N} & = & \mathcal{F}^{-1}\left(\mathbf{1}_{\{|n|\leq N\}}R^\varepsilon_{1,osc}\right) \\ \forall q\geq 2, & R^\varepsilon_{q,osc,N} & = & \mathcal{F}^{-1}\left(\mathbf{1}_{\{|n|,|\vec{k_q}|\leq N\}}R^\varepsilon_{q,osc}\right) \end{array}$$

Par un argument de compacité, on montre que la partie hautes fréquences de R^ε_{osc} tend vers zéro uniformément en ε quand N tend vers l'infini, et les basses fréquences sont éliminées par un changement de fonctions analogue au cas modèle présenté ci–dessus: on définit

$$\psi^\varepsilon_N = a^\varepsilon + \varepsilon\tilde{R}^\varepsilon_{osc,N},$$

avec $\tilde{R}^\varepsilon_{osc,N} = \sum_{q\in\{1,..,p\}} \tilde{R}^\varepsilon_{q,osc,N}$, et $\mathcal{F}\tilde{R}^\varepsilon_{1,osc,N}(n) \stackrel{def}{=} \sum_{|n|\leq N} \mathbf{1}_{\beta_1(n)\neq 0}\frac{i\,e^{-i\frac{t}{\varepsilon}\beta_1(n)}}{\beta_1(n)}f_0(t,n)$, et

$$\forall\, q\geq 2,\quad \mathcal{F}\tilde{R}^\varepsilon_{q,osc,N}(n) \stackrel{def}{=} \sum_{|n|,|\vec{k_q}|\leq N}\ \sum_{\vec{k_q}\in K^n_q} \frac{i\,e^{-i\frac{t}{\varepsilon}\beta_q(n,\vec{k_q})}}{\beta_q(n,\vec{k_q})} r_0(n,\vec{k_q})f_1(t,k_1)..f_q(t,k_q).$$

L'intérêt de ne faire ce changement que sur les basses fréquences est double: il permet d'une part d'avoir un contrôle (dépendant de N) sur l'inverse des phases $\beta_q(n,\vec{k_q})$, et d'autre part il permet de ne pas perdre en régularité puisque les $\tilde{R}^\varepsilon_{q,osc,N}$ sont à support compact en fréquences.

Il suffit alors d'écrire l'équation vérifiée par ψ^ε_N, et de montrer la proposition suivante (voir [10]).

Lemme 2 *La fonction ψ^ε_N vérifie une équation du type*

$$\left\{\begin{array}{rcl} \partial_t\psi^\varepsilon_N + \mathcal{A}^\varepsilon_2(D)\psi^\varepsilon_N + \mathcal{Q}^\varepsilon(\psi^\varepsilon_N,\psi^\varepsilon_N + b^\varepsilon - \varepsilon\tilde{R}^\varepsilon_{osc,N}) & = & \varepsilon R^{1,\varepsilon}_{osc,N} + R^{2,\varepsilon,N}_{osc} + F^\varepsilon \\ \psi^\varepsilon_{N|t=0} & = & \psi^\varepsilon_{N,0}, \end{array}\right.$$

où $\psi^\varepsilon_{N,0}$ tend vers 0 dans H^σ, $R^{1,\varepsilon}_{osc,N}$ est bornée uniformément en ε, dans $L^2([0,T_0],H^{\sigma-1})$, par une constante ne dépendant que de N, et $R^{2,\varepsilon,N}_{osc}$ tend vers 0 dans $L^2([0,T_0],H^{\sigma-1})$ quand N tend vers l'infini, uniformément en ε. La fonction F^ε tend vers 0 dans $L^2([0,T_0],H^{\sigma-1})$.

Il suffit alors de choisir N assez grand pour contrôler les hautes fréquences, puis ε assez petit pour contrôler les termes en basses fréquences, et une méthode d'énergie permet alors de conclure la démonstration du lemme 1. □

2.2.3 Retour au système abstrait

C'est l'application itérée du lemme 1 qui va conduire aux théorèmes 2 et 3.

Démonstration du théorème 2. Le théorème 2 s'obtient directement du lemme 1 une fois démontrée la proposition (très simple, voir [10]) suivante.

Proposition 1 *Sous les hypothèses du théorème 2, le membre de droite de l'équation (2) est une fonction $(2,s-2)$-oscillante.*

La fonction w^ε vérifie donc une équation du type $(\mathcal{E}^\varepsilon_{osc})$, avec $\sigma = s$ et $p = 2$. Il suffit alors d'appliquer le lemme 1, et le théorème est démontré. $\square$

Démonstration du théorème 3. Pour démontrer le théorème 3, on commence par définir, par analogie avec le cas modèle présenté plus haut, la fonction $(2, \frac{d}{2}-1)$-oscillante suivante

$$\tilde{R}^\varepsilon_{osc}(u) \stackrel{def}{=} \mathcal{D}^\varepsilon u + F^\varepsilon(u,u),$$

avec

$$\mathcal{D}^\varepsilon u \stackrel{def}{=} \mathcal{F}^{-1} \sum_{\omega_n^{a,b} \neq 0} \frac{-i\, e^{i\frac{t}{\varepsilon}\omega_n^{a,b}}}{\omega_n^{a,b}} \Big(a_2(n) u^b(n), e^a(n) \Big)\, e^a(n),$$

$$F^\varepsilon(u,u) \stackrel{def}{=} \mathcal{F}^{-1} \sum_{\omega_{k,n}^{a,b,c} \neq 0} \frac{i\, e^{-i\frac{t}{\varepsilon}\omega_{k,n}^{a,b,c}}}{\omega_{k,n}^{a,b,c}} \Big(A_{j,j'}(n) u^{a,j}(k) u^{b,j'}(n-k), e^c(n) \Big)\, e^c(n).$$

On définit alors la fonction $\psi_1^\varepsilon = \varepsilon^{-1}\psi^\varepsilon$, avec

$$\psi^\varepsilon = u^\varepsilon - u + \varepsilon \tilde{R}^\varepsilon_{osc}(u),$$

qui vérifie l'équation suivante

$$\partial_t \psi_1^\varepsilon + \mathcal{A}_2^\varepsilon(D)\psi_1^\varepsilon + \mathcal{Q}^\varepsilon(\psi_1^\varepsilon, \psi^\varepsilon + 2u - 2\varepsilon \tilde{R}^\varepsilon_{osc}) = \tilde{R}^{\varepsilon,t}_{osc} + \mathcal{A}_2^\varepsilon(D)\tilde{R}^\varepsilon_{osc} + \mathcal{Q}^\varepsilon(\tilde{R}^\varepsilon_{osc}, 2u - \varepsilon \tilde{R}^\varepsilon_{osc}), \tag{3}$$

avec $\tilde{R}^{\varepsilon,t}_{osc} = \mathcal{D}^{\varepsilon,t} + F^{\varepsilon,t}$, et

$$\mathcal{D}^{\varepsilon,t} u \stackrel{def}{=} \mathcal{F}^{-1} \sum_{\omega_n^{a,b} \neq 0} \frac{-i\, e^{i\frac{t}{\varepsilon}\omega_n^{a,b}}}{\omega_n^{a,b}} \Big(a_2(n) \partial_t u^b(t,n), e^a(n) \Big)\, e^a(n),$$

$$F^{\varepsilon,t}(u,u) \stackrel{def}{=} \mathcal{F}^{-1} \sum_{\omega_{k,n}^{a,b,c} \neq 0} \frac{i\, e^{-i\frac{t}{\varepsilon}\omega_{k,n}^{a,b,c}}}{\omega_{k,n}^{a,b,c}} \partial_t \Big(A_{j,j'}(n) u^{a,j}(t,k) u^{b,j'}(t,n-k), e^c(n) \Big)\, e^c(n).$$

Il est facile de voir, par l'équation (3), que sous les hypothèses du théorème 3,

$$\psi_1^\varepsilon \quad \text{est bornée dans} \quad C^0([0,T_0], H^{\frac{d}{2}-1}) \cap L^2([0,T_0], H^{\frac{d}{2}}).$$

Ainsi on a

$$\psi^\varepsilon = O(\varepsilon) \quad \text{dans} \quad C^0([0,T_0], H^{\frac{d}{2}-1}) \cap L^2([0,T_0], H^{\frac{d}{2}}),$$

et donc on peut transformer l'équation (3) de la manière suivante, où le membre de droite est séparé en trois fonctions qui diffèrent par leur dépendance en ε.

Proposition 2 *Sous les hypothèses du théorème 3, ψ_1^ε vérifie une équation du type*

$$\partial_t \psi_1^\varepsilon + \mathcal{A}_2^\varepsilon(D)\psi_1^\varepsilon + 2\mathcal{Q}^\varepsilon(\psi_1^\varepsilon, u) = R^{1,\varepsilon}_{osc}(u) + \varepsilon R^{2,\varepsilon}(u) + R(u),$$

où $R^{1,\varepsilon}_{osc}$ est une fonction $(3, \frac{d}{2}-3)$-oscillante, où $R^{2,\varepsilon}$ est bornée dans l'espace $L^2([0,T_0], H^{\frac{d}{2}-2})$, et où $R(u)$ est une fonction indépendante de ε, dans $C^0([0,T_0], H^{\frac{d}{2}-3}) \cap L^2([0,T_0], H^{\frac{d}{2}-2})$.

Remarque. Nous ne démontrons pas cette proposition ici (voir [10]); remarquons simplement que le terme $R(u)$ de la proposition est dû au fait que les oscillations de deux fonctions peuvent, en interagissant, s'annuler et conduire à une fonction indépendante de ε. C'est le cas par exemple dans une fonction du type $\mathcal{Q}^\varepsilon(\mathcal{D}^\varepsilon u, u)$: on a

$$\mathcal{Q}^\varepsilon(\mathcal{D}^\varepsilon u, u) = \mathcal{F}^{-1} \sum_{k,a,b,c} e^{-i\frac{t}{\varepsilon}\omega_{k,n}^{a,b,c}} \left(A_{j,j'}(n)\mathcal{D}^{\varepsilon,a,j}u(k)\, u^{b,j'}(n-k), e^c(n)\right) e^c(n),$$

$$\text{avec}\quad \mathcal{D}^\varepsilon u = \mathcal{F}^{-1} \sum_{\omega_k^{a,b'}\neq 0} \frac{-i\, e^{i\frac{t}{\varepsilon}\omega_k^{a,b'}}}{\omega_k^{a,b}} \left(a_2(k)u^{b'}(k), e^a(k)\right) e^a(k).$$

Dans le terme $\mathcal{Q}^\varepsilon(\mathcal{D}^\varepsilon u, u)$, la phase est donc $-\omega^a(k) - \omega^b(n-k) + \omega^c(n) + \omega^a(k) - \omega^{b'}(k)$, donc la restriction de $\mathcal{Q}^\varepsilon(\mathcal{D}^\varepsilon u, u)$ aux fréquences telles que $\omega^{b'}(k)+\omega^b(n-k) = \omega^c(n)$ est un terme non oscillant, qui rentre donc, avec d'autres termes du même type, dans le terme $R(u)$ de la proposition.

Cette proposition étant démontrée, il suffit alors de décomposer la fonction ψ_1^ε en

$$\psi_1^\varepsilon = h + w_1^\varepsilon,$$

où h vérifie le système linéarisé $(\mathcal{S}_1)$ présenté dans le théorème 3, où la donnée initiale $h_0(u)$ ne dépend pas de ε, puisqu'on la définit par

$$h_0(u) = \tilde{R}^\varepsilon_{osc}(u)_{|t=0}.$$

Alors par application du lemme 1, il est facile de voir que la fonction w_1^ε tend vers zéro avec ε dans l'espace $C^0([0,T_0], H^{\frac{d}{2}-1}(\mathbf{T}^d)) \cap L^2([0,T_0], H^{\frac{d}{2}}(\mathcal{T}^d))$.

Le théorème est donc démontré, puisque finalement

$$\begin{aligned} u^\varepsilon - u &= \psi^\varepsilon - \varepsilon\, \tilde{R}^\varepsilon_{osc}(u) \\ &= \varepsilon\, \psi_1^\varepsilon - \varepsilon\, \tilde{R}^\varepsilon_{osc}(u) \\ &= \varepsilon\, h - \varepsilon\, \tilde{R}^\varepsilon_{osc}(u) + \varepsilon\, w_1^\varepsilon, \end{aligned}$$

avec $w_1^\varepsilon = o(1)$ in $C^0([0,T], H^{\frac{d}{2}-1}) \cap L^2([0,T], H^{\frac{d}{2}})$. □

3. Retour aux fluides tournants.

L'objet de cette section finale est d'appliquer au système des fluides tournants les théorèmes issus de l'étude abstraite précédente. Dans [1]–[3], on peut trouver la démonstration de la proposition suivante, où l'on a noté $\bar{f}$ pour la moyenne verticale de toute fonction f.

Proposition 3 *Pour presque tout a_3, le système limite $(\mathcal{S}_0)$ correspondant au système des fluides tournants (FT^ε) se diagonalise en*

$$(NS2D)\quad \left\{ \begin{aligned} \partial_t\bar{u} - \nu\Delta_2\bar{u} + \bar{u}\cdot\nabla_2\bar{u} &= (-\nabla_2\bar{p}, 0) \\ \partial_3\bar{u} &= 0 \\ \nabla_2\cdot\bar{u} &= 0 \\ \bar{u}_{|t=0} &= \bar{v}_0 \end{aligned} \right.$$

pour la moyenne verticale de u, notée $\bar{u}$, et pour le reste $u_{osc} = u - \bar{u}$, on a le système

$$
(L_{osc}) \quad \begin{cases} \partial_t u_{osc} - \nu \Delta u_{osc} + 2Q(\bar{u}, u_{osc}) &= 0 \\ div\, u_{osc} &= 0 \\ u_{osc,0} &= v_{0,osc}\,. \end{cases}
$$

Il est alors facile de voir que ce système limite est globalement bien posé dès que $v_0 \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbf{T}^3)$, puisqu'il s'agit d'une équation linéaire sur u_{osc}, couplée avec une équation de Navier–Stokes bidimensionnelle, connue pour être globalement bien posée pour une telle donnée initiale (voir [5] par exemple). En outre, on peut démontrer la proposition suivante (voir [10]).

Proposition 4 *Pour tout ordre $p \geq 1$, et pour presque toutes les boîtes périodiques, il existe un réel α_p tel que l'opérateur de pénalisation L correspondant aux fluides tournants admette une estimation de petits diviseurs à l'ordre p, de degré α_p.*

On en déduit sans plus de calculs le théorème suivant.

Théorème 4 *Soient a_1 et a_2 fixés; alors pour presque tous les a_3, on a le résultat suivant. Si $v_0 \in H^s(\mathbf{T}^3)$, avec $s \geq \frac{1}{2}$, alors pour $\varepsilon > 0$ assez petit, le système (FT^ε) est globalement bien posé dans $C^0(\mathbf{R}^+, H^s(\mathbf{T}^3)) \cap L^2(\mathbf{R}^+, H^{s+1}(\mathbf{T}^3))$.*

D'autre part, si v^ε est la solution de (FT^ε) et u est la solution du système limite $(NS2D, L_{osc})$, alors $v^\varepsilon - \mathcal{L}(\frac{t}{\varepsilon})u = o(1)$ dans $C^0(\mathbf{R}^+, H^s(\mathbf{T}^3)) \cap L^2(\mathbf{R}^+, H^{s+1}(\mathbf{T}^3))$.

Enfin, pour presque toutes les boîtes périodiques $\mathbf{T}^3$, il existe $\alpha \geq \frac{3}{2}$ tel que si $v_0 \in H^\alpha(\mathbf{T}^3)$, alors le développement du théorème 3 est vérifié.

Remarque. Les résultats obtenus dans le cas abstrait permettent a *priori* de conclure seulement que le temps d'existence du système (FT^ε) tend vers l'infini quand ε tend vers zéro. Le résultat d'existence globale, pour ε assez petit, du théorème 4 est dû au fait que, comme pour les équations de Navier–Stokes tridimensionnelles, le temps d'existence des solutions de (FT^ε) est infini dès qu'il dépasse une valeur critique, dépendant de la viscosité et de la norme L^2 de la donnée initiale.

On peut d'autre part remarquer qu'il est bien connu (voir [5] par exemple) que les équations de Navier–Stokes bidimensionnelles sont globalement bien posées dès que la donnée initiale $\bar{v}_0$ est dans $L^2(\mathbf{T}^2)$ seulement, plutôt que $H^{\frac{1}{2}}(\mathbf{T}^3)$ comme le suppose le théorème 4. On peut dès lors souhaiter ne supposer qu'une régularité L^2 sur $\bar{v}_0$, et obtenir l'existence globale pour (FT^ε). Cela est possible, si l'on se place dans un cadre fonctionnel de type "anisotrope": dans [12] et [13], D. Iftimie introduit des espaces de Sobolev et Besov qui permettent de préciser différemment la régularité de fonctions suivant les variables horizontales et verticales. Ainsi, l'espace $H^{s,s'}$ (resp. $HB^{0,\frac{1}{2}}$) du théorème suivant peut se comprendre comme l'espace des fonctions H^s (resp. L^2) dans les variables horizontales, et $H^{s'}$ (resp. Besov $B^{\frac{1}{2}}_{2,1}$) dans la variable verticale (voir [12], [13] pour des définitions précises).

Théorème 5 *Si a_1 et a_2 sont fixés, alors pour presque tout a_3, on a le résultat suivant. Soit v_0 de moyenne verticale $\bar{v}_0$ dans $L^2(\mathbf{T}^2)$, avec $v_{0,osc} \in H^{\delta,\frac{1}{2}-\delta}$, où δ est un réel dans l'intervalle $]0,1[$ (resp. $v_{0,osc} \in HB^{0,\frac{1}{2}}$). Alors pour ε assez petit, (RF^ε) est globalement bien posé, et la solution v^ε vérifie*

$$
v^\varepsilon - \bar{u} - \mathcal{L}(\frac{t}{\varepsilon})u_{osc} = o(1) \quad \text{dans} \quad L^\infty(\mathbf{R}^+, H^{\delta,\frac{1}{2}-\delta}) \cap L^4(\mathbf{R}^+, H^{\frac{1}{2}+\frac{\delta}{2},\frac{1}{2}-\frac{\delta}{2}}),
$$

(resp. $L^\infty(\mathbf{R}^+, HB^{0,\frac{1}{2}}) \cap L^4(\mathbf{R}^+, HB^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}})$*).*

L'aspect intéressant de ce résultat est que $\bar{v}_0$ est supposé être dans l'espace d'énergie $L^2(\mathbf{T}^2)$ seulement, au lieu de $H^{\frac{1}{2}}(\mathbf{T}^2)$ comme précédemment. Dans le cas où l'on considère des espaces de type Besov $HB^{0,\frac{1}{2}}$ plutôt que Sobolev $H^{\delta,\frac{1}{2}-\delta}$, ce théorème permet de supposer en outre que la "régularité horizontale" de $v_{0,osc}$ est elle aussi dans L^2 seulement.

Références

[1] A. Babin, A. Mahalov et B. Nicolaenko: Global Splitting, Integrability and Regularity of 3D Euler and Navier–Stokes Equations for Uniformly Rotating Fluids, *European Journal of Mechanics*, **15**, 3, pages 291-300, 1996.

[2] A. Babin, A. Mahalov et B. Nicolaenko: Resonances and Regularity for Boussinesq Equations, *Russian Journal of Mathematical Physics*, Vol. 4, **4**, pages 417–428, 1996.

[3] A. Babin, A. Mahalov, B. Nicolaenko et Y. Zhou: On the Asymptotic Regimes and the Strongly Stratified Limit of Rotating Boussinesq Equations, *Journal of Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, **9**, pages 223–251, 1997.

[4] T. Beale et A. Bourgeois: Validity of the Quasigeostrophic Model for Large–Scale Flow in the Atmosphere and the Ocean, *SIAM Journal of Mathematical Analysis*, **25**, pages 1023–1068, 1994.

[5] J.-Y. Chemin: About the Navier–Stokes System, *Prépublication du Laboratoire d'Analyse Numérique de Paris 6*, 1996.

[6] J.-Y. Chemin: À propos d'un problème de pénalisation de type antisymétrique, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **76**, pages 739–755, 1997.

[7] T. Colin et P. Fabrie: Rotating Fluid at High Rossby Number Driven by a Surface Stress: Existence and Convergence, *Advances in Differential Equations*, **2**, pages 715–751, 1997.

[8] I. Gallagher: Un résultat de stabilité pour les solutions faibles des équations des fluides tournants, *Notes aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, **324**, Série 1, pages 183–186, 1997.

[9] I. Gallagher: Asymptotics of the Solutions of Hyperbolic Equations with a Skew–Symmetric Perturbation, *accepté pour publication au Journal of Differential Equations*, et *Prépublication du Laboratoire d'Analyse Numérique de Paris 6*, 1997.

[10] I. Gallagher: Applications of Schochet's Methods to Parabolic Equations, *accepté pour publication au Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, et *Prépublication du Laboratoire d'Analyse Numérique de Paris 6*, 1998.

[11] E. Grenier: Oscillatory Perturbations of the Navier–Stokes Equations, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **76**, pages 477–498, 1997.

[12] D. Iftimie: La résolution des équations de Navier–Stokes dans des domaines minces et limite quasigéostrophique, *Thèse de l'Université Paris 6*, 1997.

[13] D. Iftimie: The Resolution of the Navier–Stokes Equations in Anisotropic Spaces, *à paraître, Revista Matematica Ibero-Americana*, 1998.

[14] J.-L. Joly, G. Métivier et J. Rauch: Generic Rigorous Asymptotic Expansions for Weakly Nonlinear Multidimensional Oscillatory Waves, *Duke Mathematical Journal*, **70**, pages 373–404, 1993.

[15] J.-L. Joly, G. Métivier et J. Rauch: Coherent and Focusing Multidimensional Nonlinear Geometric Optics, *Annales Scientifiques de l'ENS Paris*, **28**, pages 51–113, 1995.

[16] S. Klainerman et A. Majda: Singular Limits of Quasilinear Hyperbolic Systems with Large Parameters, and the Incompressible Limit of Compressible Fluids, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **34**, pages 481–524, 1981.

[17] H.-O. Kreiss, J. Lorenz, et M.J. Naughton: Convergence of the Solutions of the Compressible to the Solutions of the Incompressible Navier–Stokes Equations, *Advances in Pure and Applied Mathematics*, **12**, pages 187–214, 1991.

[18] J.-L. Lions, R. Temam, et S. Wang: New Formulations of the Primitive Equations of the Atmosphere and Applications, *Nonlinearity*, , pages 237–288, 1992.

[19] S. Schochet: Fast Singular Limits of Hyperbolic PDEs, *Journal of Differential Equations*, **114**, pages 476–512, 1994.

Laboratoire d'Analyse Numérique, Tour 55-65, 5ème étage, 4, place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France
gallagher@ann.jussieu.fr