

SAN VŨ NGỌC

## Conditions de Bohr-Sommerfeld pour les singularités focus-focus et monodromie quantique

*Journées Équations aux dérivées partielles* (1998), p. 1-13

[http://www.numdam.org/item?id=JEDP\\_1998\\_\\_\\_A14\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1998___A14_0)

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1998, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# Conditions de Bohr-Sommerfeld pour les singularités focus-focus et monodromie quantique

Vũ Ngọc San

## Résumé

Je présenterai les résultats d'une étude microlocale détaillée du spectre joint de deux opérateurs  $h$ -pseudo-différentiels qui commutent sur une variété de dimension deux en présence d'une singularité dite "focus-focus". L'étude couvre par exemple le cas du pendule sphérique étudié par Duistermaat, ou du fond de la bouteille de Champagne, mais les phénomènes observés sont universels. On en observe principalement deux:

- une accumulation de valeurs propres au voisinage de la singularité en  $O(\log(h))$  par rapport au cas régulier,
- des phénomènes globaux autour de la singularité liés à la monodromie du système.

L'étude s'inspire des travaux de Y. Colin de Verdière et B. Parisse et s'appuie sur l'écriture de conditions du type Bohr-Sommerfeld adaptées à la singularité. Les résultats seront illustrés en utilisant des calculs numériques de valeurs propres effectués par M.S. Child dans le cas de la bouteille de Champagne.

## 1. Introduction.

On se propose d'étudier le spectre conjoint dans le régime semi-classique  $h \rightarrow 0$  de deux  $h$ -opérateurs pseudo-différentiels  $P_1(h)$  et  $P_2(h)$  qui commutent sur une variété différentielle de dimension 2, et dont le symbole principal conjoint  $(p_1, p_2)$  admet une singularité dite *focus-focus* (voir section 4.1). Notons  $m$  cette singularité, et  $o = (p_1(m), p_2(m)) \in \mathbb{R}^2$  la valeur critique.

Ce type de singularité des systèmes complètement intégrables est le seul qui soit à la fois non-dégénéré (au sens de Morse-Bott) et inexistant en dimension 1; il est en réalité typique des systèmes à deux degrés de liberté et apparaît par exemple dans l'étude du pendule sphérique (Cushman et Duistermaat [6]) ou de la bouteille de Champagne (Child [2]), où il joue un rôle crucial (mais sous-jacent dans les articles en question, qui ne le mentionnent pas).

Une première approche de ce problème consiste à utiliser les conditions de quantification de Bohr-Sommerfeld standard, valables pour les systèmes complètement

intégrables en dehors des singularités, pour se rendre compte que l'impossibilité de construire des variables d'action globales (Duistermaat [7]) se traduit directement, au niveau quantique, en l'impossibilité pour le spectre conjoint d'être globalement difféomorphe à un portion du réseau  $h\mathbb{Z}^2$ . Le résultat le plus remarquable est que la *monodromie* classique du système peut être très facilement décelée sur le spectre conjoint du système; cette approche est exposée dans [15].

Malheureusement, une telle étude ne peut s'effectuer qu'à distance fixe de la singularité, laissant ainsi de côté un nombre de valeur propres qui croît vers l'infini lorsque  $h \rightarrow 0$ : celles qui s'accumulent près de la valeur critique  $o$ . À l'instar du cas d'une singularité hyperbolique en dimension 1, traité en régime semi-classique par Colin de Verdière et Parisse [4, 5], ce problème peut être résolu par l'utilisation d'une *forme normale microlocale* semi-classique, qui permet l'écriture de conditions du type Bohr-Sommerfeld valables uniformément dans un petit voisinage de  $o$ .

Cette uniformité permet non seulement de retrouver – et de préciser – la manifestation de la monodromie à distance fixe de  $o$ , mais aussi de mener une étude détaillée de la répartition des valeurs propres conjointes dans un petit voisinage de taille  $O(h)$  autour de  $o$ . On montre ainsi qu'à un difféomorphisme semi-classique près, ces valeurs propres sont situées sur des droites parallèles distantes de  $h$ , alors que sur chacune de ces droites, les espacements entre les valeurs propres sont de l'ordre de  $O(h/|\ln h|)$ , avec un minimum au voisinage de  $o$ .

On ne donnera ici qu'une idée des démonstrations, qui s'inspirent en partie de [4]; le lecteur intéressé par de plus amples détails pourra se référer à [16]. Enfin, on terminera cette étude par une petite digression numérique rendue possible par les calculs de Child concernant l'exemple de la bouteille de Champagne.

## 2. Complète intégrabilité.

Par *système complètement intégrable classique* sur une variété symplectique  $M$  de dimension  $2n$  on entend ici la donnée de  $n$  fonctions  $p_1, \dots, p_n$  presque partout indépendantes et telles que

$$\{p_i, p_j\} = 0, \quad \forall i, j,$$

où  $\{\cdot, \cdot\}$  désigne le crochet de Poisson associé à la structure symplectique. Dans ce travail,  $M$  sera toujours un ouvert d'un cotangent  $T^*X$ , muni de la structure symplectique standard  $\omega = d\alpha$ , où  $\alpha$  désigne la 1-forme canonique de Liouville.

La fonction  $F = (p_1, \dots, p_n)$  est appelée l'application moment, et sera toujours supposée *propre*, de sorte que les surfaces de niveau  $\Lambda_E = F^{-1}(E)$  soient compactes.

De façon analogue, un *système complètement intégrable quantique* est la donnée de  $n$  opérateurs pseudo-différentiels auto-adjoints  $P_1(h), \dots, P_n(h)$  qui commutent sur  $X$ , et dont les symboles principaux  $p_1, \dots, p_n$  définissent un système complètement intégrable classique. La propriété de l'application moment implique que pour tout compact  $K \subset \mathbb{R}^n$ , le spectre conjoint  $\Sigma(h)$  de ces opérateurs est discret dans  $K$  (voir [1]), et donc donné par

$$\Sigma(h) \cap K = \{(E_1, \dots, E_n) \in K, \exists \psi \in L^2(X), \|\psi\|_2 = 1, \forall j, P_j \psi = E_j \psi\}.$$

On suppose en outre que  $P_1(h)$  est elliptique à l'infini au sens de Hörmander (par exemple,  $P_1(h)$  est un opérateur de type Schrödinger), ce qui permet de montrer qu'une famille de fonctions propres  $\psi(h)$  associées à une famille de valeurs propres conjointes  $E(h)$  tendant vers  $E$  lorsque  $h \rightarrow 0$  est microlocalisée au voisinage de l'ensemble de niveau  $\Lambda_E$  (qui doit donc être non vide!). Ceci permet, si on se satisfait d'une description du spectre conjoint modulo  $O(h^\infty)$ , de remplacer les équations  $P_j\psi = E_j\psi$  par des équations *microlocales* au voisinage de  $\Lambda_E$ .

Si  $c$  est une valeur *régulière* de  $F$ , et qu'on étudie le spectre conjoint dans un petit voisinage  $U$  de  $c$ , l'imprécision modulo  $O(h^\infty)$  n'est pas gênante puisque qu'on sait ([3, 1]) que les valeurs propres conjointes sont asymptotiquement simples : étant donné  $E(h) \in \Sigma(h) \cap U$ ,  $h \rightarrow 0$ , la multiplicité d'une boule de taille  $O(h^N)$  avec  $N > 1$  autour de  $E(h)$  est égale à 1 pour  $h$  assez petit. On verra que tel est encore le cas en présence d'une singularité *focus-focus*.

### 3. Conditions de Bohr-Sommerfeld et monodromie.

Cette section, qui correspond à la première approche du problème mentionnée en introduction, montre comment décrire le spectre conjoint près d'une valeur *régulière* de  $F$  en utilisant les conditions de quantification "standard" (la méthode est différente dans [1]).

#### 3.1 Le cocycle de Bohr-Sommerfeld

Soit donc  $c \in \mathbb{R}^n$  une valeur régulière de  $F$ . D'après le théorème d'Arnold-Liouville, il existe un petit voisinage  $U$  de  $c$  tel que la restriction de  $F$  à  $F^{-1}(U)$  soit une fibration locale par des tores lagrangiens munis de coordonnées actions-angles. L'union

$$\Lambda(U) \stackrel{\text{def}}{=} \bigsqcup_{E \in U} H^1(\Lambda_E)$$

est un fibré vectoriel trivial de rang  $n$ . On peut alors énoncer les conditions de quantification de Bohr-Sommerfeld de la façon suivante :

**Théorème 3.1** *Il existe une suite  $(\lambda_k^E)_{k \geq -1}$  de sections  $C^\infty$  de  $\Lambda(U)$  telle que pour toute section  $\lambda^E(h)$  de  $\Lambda(U)$  admettant le développement asymptotique suivant, uniforme pour  $h$  petit et  $E$  dans tout compact de  $U$  :*

$$\lambda^E(h) \sim \sum_{k=-1}^{\infty} h^k \lambda_k^E,$$

le spectre conjoint dans  $U$  est caractérisé par l'énoncé suivant :

Une famille de réels  $(E(h))_{h \in H} \in U$ , où  $H$  est un sous-ensemble borné de  $\mathbb{R}$  admettant 0 comme point d'accumulation, vérifie

$$E(h) \in \Sigma(h) + O(h^\infty)$$

si et seulement si

$$\lambda^{E(h)}(h) \in H^1(\Lambda_{E(h)}, 2\pi\mathbb{Z}) + O(h^\infty). \quad (1)$$

Enfin, on a

$$\lambda_{-1}^E = \alpha|_{\Lambda_E}.$$

▮ *Remarque.* On peut aussi décrire le terme sous-principal  $\lambda_{-1}^E$ , qui fait intervenir le cocycle de Maslov ainsi que les symboles sous-principaux des opérateurs  $P_j(h)$ . ▮

Cet énoncé un peu austère fournit en réalité une description précise du spectre conjoint dans  $U$  grâce à une généralisation semi-classique des actions classiques : pour  $E \in U$ , soit  $\gamma_1^E, \dots, \gamma_n^E$  des cycles dépendant régulièrement de  $E$  et formant une base de  $H_1(\Lambda_E)$ , et posons

$$f(E; h) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{h}{2\pi} \left( \int_{\gamma_1^E} \lambda^E(h), \dots, \int_{\gamma_n^E} \lambda^E(h) \right).$$

$f(\cdot, h)$  est donc un symbole semi-classique elliptique d'ordre 0 admettant un DAS en puissances de  $h$  dont les termes sont des fonctions  $C^\infty$  de  $E$ . Le spectre conjoint dans  $U$  est alors donné modulo  $O(h^\infty)$  par les solutions dans  $U$  de l'équation  $f(E; h) \in h\mathbb{Z}^n + O(h^\infty)$ .

*Idée de la démonstration.* Les fonctions propres  $\psi(h)$  sont microlocalisées sur les tores  $\Lambda_E$ . Au voisinage de chaque point du tore les solutions  $\psi(h)$  sont uniques à constante multiplicative près : ceci est dû à l'analogie microlocal du théorème de Darboux-Carathéodory qui conjugue par un opérateur intégral de Fourier les opérateurs  $P_j(h)$  en les opérateurs  $\frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial \xi_j}$ . On construit alors de telles solutions partout sur le tore, et la condition de recollement s'exprime par la nullité d'un cocycle de Čech. L'argument de ce cocycle définit la 1-forme  $\lambda^E(h)$ , qui est a priori à valeurs dans  $S^1$ . On peut ici supposer que  $U$  est simplement connexe ce qui permet de relever  $\lambda^E(h)$  dans  $\mathbb{R}$ . □

### 3.2 Monodromie et développement du spectre

Le terme principal de  $f(\cdot; h)$  est égal aux actions classiques  $\int_{\gamma_j^E} \alpha$ . La première conséquence de ce fait est que pour  $h$  assez petit,  $f(\cdot, h)$  est un difféomorphisme de  $U$  dans son image  $V$ , et d'inverse admettant un développement asymptotique semi-classique du même type que  $f(\cdot; h)$ ; ceci veut dire que  $\Sigma(h) \cap U$  est difféomorphe à la portion de réseau  $h\mathbb{Z}^n \cap V$ . Autrement dit, le spectre conjoint dans  $U$ , vu au microscope avec un grossissement  $1/h$ , converge vers le réseau droit  $\mathbb{Z}^n$ .

Deuxièmement, de la même façon que la monodromie classique empêche la construction *globale* de variables d'action, elle empêche aussi le spectre conjoint d'être globalement difféomorphe à  $h\mathbb{Z}^n$ . Une façon de décrire ce phénomène est de considérer le spectre conjoint comme tracé sur le revêtement simplement connexe  $\tilde{U}_r \xrightarrow{\pi} U_r$  de l'ouvert des valeurs régulières de  $F$ . L'application  $f(\cdot; h)$  s'étend alors sur tout  $\tilde{U}_r$  et est vue comme une développante du spectre. La *monodromie quantique* est alors donnée par l'holonomie affine associée : on se donne un point  $\tilde{A} \in \tilde{U}_r$ ,

et à tout  $\gamma \in \pi_1(U_r, \pi(\tilde{A}))$  agissant sur  $\tilde{U}_r$ , on associe l'élément  $\mu(\gamma) \in GA(n, \mathbb{Z})$  tel que

$$f(\gamma.\tilde{A}; h)/h = \mu(\gamma)(f(\tilde{A}; h)/h) + O(h^\infty).$$

La figure 1 donne un exemple de développement d'une suite de points  $\tilde{A}_0, \dots, \tilde{A}_\ell$  tracés sur le spectre de la bouteille de Champagne, autour de la singularité *focus-focus*. La monodromie associée est l'application affine fixant l'origine et envoyant  $A_0$  sur  $A_\ell$ .

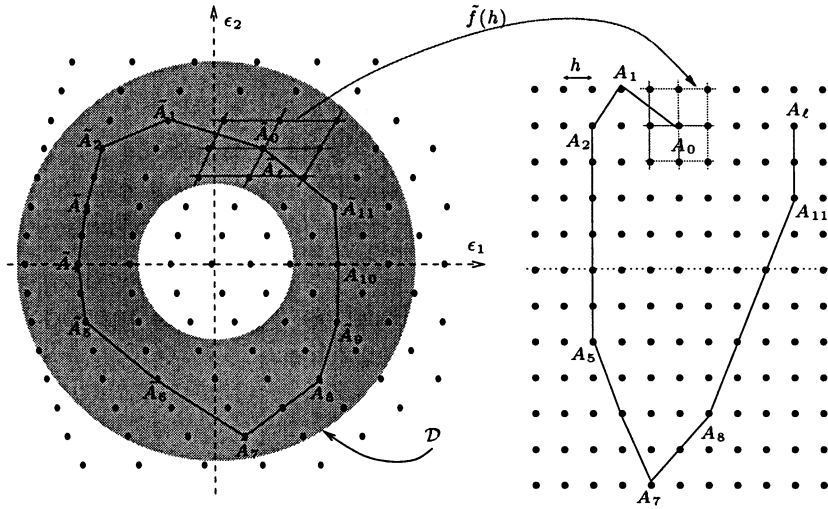


FIG. 1 – Développement d'une suite de points du spectre conjoint de la bouteille de Champagne.

Le théorème 3.1 ne s'applique pas dès que  $U$  contient une valeur singulière de  $F$ ; en outre, on ne peut en général obtenir aucune information intéressante sur le spectre conjoint autour d'une telle valeur critique  $o$  en choisissant des ouverts  $U$  de plus en plus proches de  $o$ , car le cocycle de Bohr-Sommerfeld risque de diverger. La prise en compte de singularités nécessite donc une étude au cas par cas, dont on peut au mieux espérer qu'elle soit déterminée par la Hessienne de  $F$  au point critique  $m$ . Tel est le cas pour un fond de puits non-dégénéré (Simon [12], Helffer-Sjöstrand [10]), mais aussi pour une singularité de type *focus-focus*.

#### 4. Singularités *focus-focus*.

À partir de maintenant et jusqu'à la fin de ce texte,  $n = 2$ ; ainsi,  $P_1(h)$  et  $P_2(h)$  sont deux opérateurs pseudo-différentiels auto-adjoints qui commutent sur  $X$ . Comme précédemment, l'application moment  $F = (p_1, p_2)$  est supposée être propre et avoir des ensembles de niveau connexes. On suppose en outre que  $F$  admet une singularité *focus-focus* simple.

## 4.1 Définition

Un point critique  $m \in T^*X$  de  $F$  est dit de type *focus-focus*<sup>1</sup> si les conditions suivantes sont satisfaites :

$m$  est de corang maximal (*i.e.*  $p_1$  et  $p_2$  sont critiques en  $m$ ) et il existe des coordonnées symplectiques locales  $(x, y, \xi, \eta)$  dans lesquelles la sous-algèbre de  $\mathcal{Q}(4)$  (l'algèbre de Lie des formes quadratiques en  $(x, y, \xi, \eta)$  munie du crochet de Poisson) engendrée par  $p_1''(m)$  et  $p_2''(m)$  admet aussi la base suivante :

$$\begin{aligned} q_1 &= x\xi + y\eta, \\ q_2 &= x\eta - y\xi. \end{aligned}$$

Le point  $m$  est nécessairement isolé parmi les points critiques de  $F$ . L'hypothèse supplémentaire que la singularité est "simple" signifie que  $m$  doit être le seul point critique de  $F$  sur  $\Lambda_o = F^{-1}(o)$ . Il existe donc dans  $U_r$  un petit disque épointé  $U$  autour de  $o$ .

On peut alors montrer (voir [17]) que la fibration  $F|_U$  a une monodromie non triviale, engendrée dans une bonne base par la matrice

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pm 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

## 4.2 Étude microlocale

Les hypothèses précédentes suffisent pour déceler la monodromie quantique sur le spectre conjoint autour de  $o$ , au sens de la section 3.2. Elles permettent en réalité davantage puisqu'on peut en déduire la forme du spectre conjoint dans un petit voisinage *contenant*  $o$ . L'ingrédient essentiel de cette analyse est l'existence d'une forme normale microlocale pour  $P_1(h)$  et  $P_2(h)$  au voisinage de  $m$  (voir [14]), qui transforme le système  $P_j(h)\psi(h) = E_j\psi(h)$  en le système

$$Q_j(h)\psi(h) = \epsilon_j(E; h)\psi(h), \quad (1)$$

où  $\epsilon(\cdot; h) = (\epsilon_1(\cdot; h), \epsilon_2(\cdot; h))$  est un symbole semi-classique d'ordre 0 de  $(\mathbb{R}^2, o)$  dans  $(\mathbb{R}^2, 0)$ , elliptique près de  $o$ , et admettant un développement asymptotique en puissances entières de  $h$  dont les termes sont des fonctions  $C^\infty$  de  $E$ ; et les  $Q_j(h)$  sont les quantifiés symétriques des  $q_j$ , c'est-à-dire en coordonnées polaires  $(r, \theta)$

$$Q_1(h) = \frac{h}{i} \left( r \frac{\partial}{\partial r} + 1 \right) \quad \text{et} \quad Q_2(h) = \frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

Notons au passage que l'écriture de formes normales microlocales pour des opérateurs pseudo-différentiels à toujours été une des principales applications de la théorie des opérateurs intégraux de Fourier (voir [8]), et nombreuses sont ses applications en analyse semi-classique (voir par exemple [4, 11, 13]).

---

1. On devrait peut-être dire en français "foyer-foyer"... À ma connaissance, la terminologie pour une telle singularité n'est pas standardisée; on trouve aussi "hyperbolique complexe" ou "selle-foyer" ou "loxodromique".

### 4.3 Conditions de Bohr-Sommerfeld singulières

Dans toute la suite de l'étude, on voit  $\epsilon(\cdot; h)$  comme un changement de variables semi-classiques au travers duquel la description du spectre conjoint près de  $o$  est plus simple. Il est clair que la première condition nécessaire à l'existence de solution microlocales de (1) est

$$\epsilon_2(E; h) \in h\mathbb{Z} + O(h^\infty),$$

ce qui veut dire que, vu dans les coordonnées  $(\epsilon_1, \epsilon_2)$ , le spectre conjoint est modulo  $O(h^\infty)$  réparti sur les droites horizontales  $\{\epsilon_2 = hn\}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

Une fois un tel  $n$  fixé, on peut montrer que l'espace des solutions microlocales de (1) est de dimension 1, ce qui implique la simplicité asymptotique des valeurs propres au voisinage de  $o$ . On peut alors construire des fonctions propres comme au 3.1 par recollement de solutions microlocales sur la Lagrangienne singulière  $\Lambda_o$ , et obtenir un cocycle de Bohr-Sommerfeld dont la trivialité est la condition nécessaire et suffisante pour l'existence de fonctions propres globales. On obtient le résultat suivant :

**Théorème 4.1 ([16])** *Il existe un symbole semi-classique  $g(\epsilon; h) \sim \sum_{k \geq 0} h^k g_k(\epsilon)$  dont les termes  $g_k$  sont des fonctions  $C^\infty$  de  $\epsilon$  à valeurs dans  $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  tel que les valeurs propres conjointes sur la droite  $\{\epsilon_2 = hn\}$  dans un petit voisinage (fixe) de  $\epsilon = 0$  sont (modulo  $O(h^\infty)$ ) données par les solutions de l'équation*

$$\frac{g(\epsilon; h)}{h} + |n|\frac{\pi}{2} - \frac{\epsilon_1}{h} \ln(2h) - 2 \arg \Gamma \left( \frac{i\epsilon_1/h + 1 + |n|}{2} \right) \in 2\pi\mathbb{Z} + O(h^\infty).$$

En outre, on peut caractériser géométriquement les termes  $g_0$  et  $g_1$ .

*Idée de la démonstration.* Le terme régulier  $g(\epsilon; h)$  provient de l'analyse BKW standard loin de la singularité. Le reste est donné par l'analyse de la forme normale en  $o$ ; on utilise le fait que les distributions

$$\psi_{\epsilon_1, n}(r, \theta) = \frac{1}{r} e^{i\frac{\epsilon_1}{h} \ln r} e^{in\theta} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_h^{-1} \psi_{-\epsilon_1, n}$$

sont des solutions du système (1) microlocalement égales à des distributions lagrangiennes classiques sur les nappes respectives  $\{\xi = \eta = 0\}$  et  $\{x = y = 0\}$ . On a noté  $\mathcal{F}_h$  la transformation de Fourier semi-classique sur  $\mathbb{R}^2$  :

$$\mathcal{F}_h = \frac{1}{2\pi h} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{i}{h}(x\xi + y\eta)} dx dy.$$

L'espace des solutions de (1) étant de dimension 1, il existe une constante  $C_\epsilon(h)$  telle que

$$\mathcal{F}_h \psi_{\epsilon_1, n} = C_\epsilon(h) \psi_{-\epsilon_1, n}.$$

On peut calculer cette constante (voir par exemple [9]); on trouve :

$$C_\epsilon(h) = i^{-n} (2h)^{i\epsilon_1/h} \frac{\Gamma \left( \frac{i\epsilon_1/h + 1 + n}{2} \right)}{\Gamma \left( \frac{-i\epsilon_1/h + 1 + n}{2} \right)}.$$



L'argument de  $C_\epsilon(h)$  constitue la partie "singulière" du cocycle de Bohr-Sommerfeld.  
 $\square$

## 5. Description du spectre conjoint.

### 5.1 Comptage des valeurs propres : l'indice

La matrice de monodromie  $\mu$  a ceci de remarquable, elle laisse une droite  $L_0$  invariante point par point. Il se trouve que cette droite est exactement (toujours modulo  $O(h^\infty)$ ) celle donnée par  $\epsilon_2 = 0$ . On en déduit que si  $\tilde{\mathcal{A}}$  est une "ligne polygonale fermée" définie par une suite de points  $\tilde{A}_0, \tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_\ell = \tilde{A}_0$  dans  $\Sigma(h) \cap U$ , avec  $\tilde{A}_0 \in L_0$ , alors le développement de ces points produit une ligne polygonale  $\mathcal{A}$  toujours fermée dont les sommets sont des points du réseau  $h\mathbb{Z}^2$ .

Ceci soulève une question naturelle: existe-t-il une relation entre le nombre  $N_h(\tilde{\mathcal{A}})$  de valeurs propres conjointes à l'intérieur de  $\tilde{\mathcal{A}}$  et le nombre  $N_h(\mathcal{A})$  de points du réseau  $h\mathbb{Z}^2$  à l'intérieur de  $\mathcal{A}$ ?

On peut a priori prédire l'existence d'une constante  $C \in \mathbb{Z}$  indépendante de  $\tilde{\mathcal{A}}$  telle que

$$N_h(\tilde{\mathcal{A}}) = N_h(\mathcal{A}) + C.$$

En effet, une fois que  $\tilde{\mathcal{A}}$  est fixée, si  $\tilde{\mathcal{B}}$  est une autre ligne polygonale autour de  $o$ , les valeurs propres conjointes à l'intérieur de  $\tilde{\mathcal{B}}$  sont égales à celles qui se trouvent à l'intérieur de  $\tilde{\mathcal{A}}$  plus ou moins d'autres, qui peuvent être regroupées en petits paquets en dehors de la valeurs critique  $o$ . Et pour de tels paquets, on sait que le nombre de valeurs propres qu'ils contiennent est égal au nombre de points du réseau  $h\mathbb{Z}^2$  dans leurs développements.

La réponse finale, dont la preuve utilise le théorème 4.1 (voir [16]), est qu'en fait

$$C = 0.$$

### 5.2 Espacements de niveaux

On a montré que le spectre conjoint près de  $o$  est réparti modulo  $O(h^\infty)$  sur les droites horizontales  $\epsilon_2 = hn$ . Ce paragraphe se tourne enfin vers l'étude de leur distribution sur chacune de ces droites. Il se trouve que la façon la plus simple de le faire, étant donné l'énoncé du théorème 4.1, est d'estimer l'*espacement* entre deux valeurs propres consécutives sur la droite  $\epsilon_2 = hn$ , en se restreignant à un intervalle de taille  $O(h)$  autour de  $\epsilon_1 = 0$ . On fixe donc  $n \in \mathbb{Z}$ , et on note  $x = \epsilon_1/h$  la variable générique renormalisée sur  $\epsilon_2 = hn$ .

**Théorème 5.1 ([16])** *Soit  $K$  un voisinage compact de 0 dans  $\mathbb{R}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , soit  $x_k(h)$  la suite croissante de "valeurs propres conjointes" (exprimées en la variable  $x$ ) dans  $\{\epsilon_2 = hn\} \cap \{x \in K\}$ .*

Il existe une constante  $B \in \mathbb{R}$  telle que l'espacement entre  $x_k(h)$  et  $x_{k+1}(h)$  est donné par :

$$\begin{aligned} \|x_{k+1}(h) - x_k(h)\| &= \frac{2\pi}{|\ln h| + B - \ln 2 - \Psi'_n(x)}(1 + O(h)) \\ &= \left( \frac{2\pi}{|\ln h|} + \frac{2\pi}{(\ln h)^2} (\Psi'_n(x) - B + \ln 2) \right) + O\left(\frac{1}{(\ln h)^3}\right), \end{aligned} \quad (1)$$

pour un  $x \in ]x_k, x_{k+1}[$ , on a noté

$$\Psi_n(x) = 2 \arg \Gamma \left( \frac{ix + 1 + |n|}{2} \right).$$

Cette formule est relativement aisée à manipuler, car  $\Psi'_n$  s'exprime grâce à la dérivée logarithmique  $\psi$  de la fonction  $\Gamma$  par la formule suivante :

$$\Psi'_n(x) = \Re \left( \psi \left( \frac{ix + 1 + |n|}{2} \right) \right).$$

Une première conséquence de ce théorème est que le nombre de valeurs propres conjoints dans  $hK$  est asymptotique à  $ct. |\ln h|$ , ce qui donne facilement une formule asymptotique de type "formule de Weyl" pour la fonction de comptage (des détails sur ceci se trouvent dans [16]). Un résultat plus précis est que la fonction  $\Psi'_n$  contrôle la forme du graphe "espacements en fonction de  $x$ ". On peut montrer que  $\Psi'_n$  admet un minimum non-dégénéré en  $x = 0$ , qui est particulièrement marqué pour  $n = 0$  (figure 2). Ceci pourrait se révéler utile par exemple pour localiser la valeur critique sur un dessin du spectre.

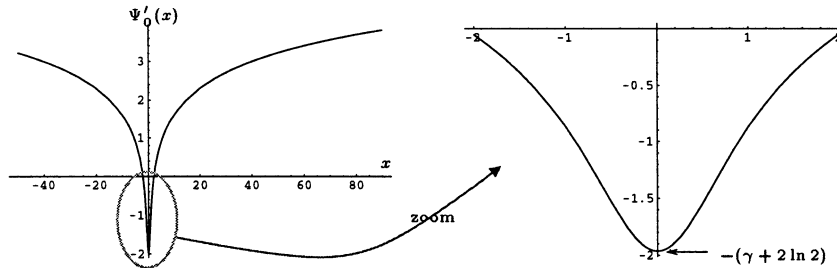


FIG. 2 – La fonction  $\Psi'_0(x)$  ( $\gamma$  désigne la constante d'Euler  $\gamma \simeq 0,5772156649 \dots$ ).

### 5.3 Un exemple numérique

On compare ici nos résultats avec une étude numérique – obtenue par Child [2] selon les méthodes standard : diagonalisation de très grandes matrices... – de la "bouteille de Champagne quantique", c'est-à-dire de l'équation de Schrödinger dans  $\mathbb{R}^2$ , avec un potentiel radial admettant un maximum local non-dégénéré en 0 :

$$P_1(h) = -\frac{h^2}{2}\Delta - r^2 + r^4,$$

$$P_2(h) = \frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

Ici, la “première condition de quantification” ( $\epsilon_2 \in h\mathbb{Z}$ ) est globale et donnée immédiatement par le spectre de  $P_2(h)$ . Ce système est probablement le plus simple possédant une singularité de type *focus-focus*, mais il n’en est pas moins – à ma connaissance – impossible à diagonaliser explicitement.

Les résultats numériques tendent à montrer que les formules asymptotiques que nous avons obtenues pour une singularité *focus-focus* générale donnent une très bonne description du spectre “réel”. Comme on l’a déjà noté, la monodromie est clairement décelable (figure 1). Plus intéressante est l’application du théorème 5.1. La forme globale de la courbe des espacements qu’il prévoit s’observe sans difficulté sur les courbes numériques (figures 3 et 4).

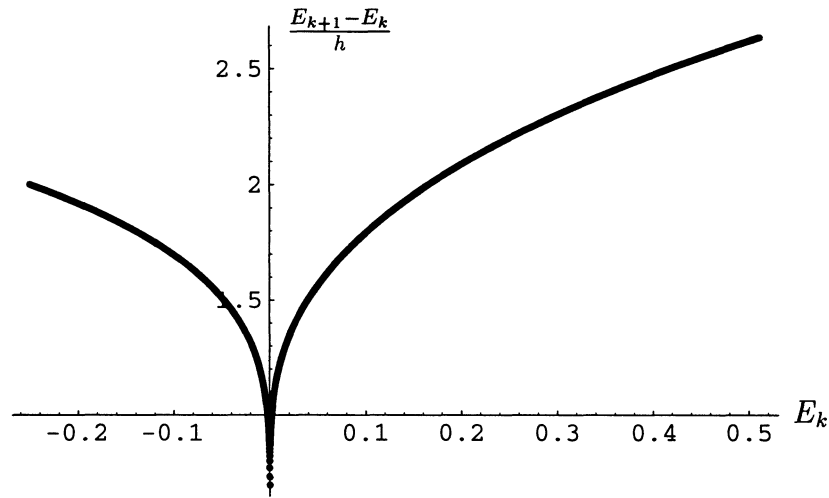


FIG. 3 – *Espacements de niveaux pour la bouteille de Champagne,  $n = 0$ ,  $h = 10^{-4}$  (calculs numériques).*

En outre, il est possible dans le cas de la bouteille de Champagne de calculer explicitement la constante  $B$  :

$$B = \frac{5}{2} \ln 2,$$

ce qui permet d’utiliser le théorème 5.1 pour estimer le *plus petit* espacement, atteint pour  $n = 0$  près de  $x = 0$  :

$$\min_k (x_{k+1} - x_k) \sim \frac{2\pi}{|\ln h| + (9/2) \ln 2 + \gamma} + O(h).$$

La comparaison entre le terme principal de cette formule (vu comme une fonction de  $\ln h$ ) et le résultat “expérimental” des calculs numériques de Child est représentée en figure 5, et tend à montrer que l’approximation est excellente.

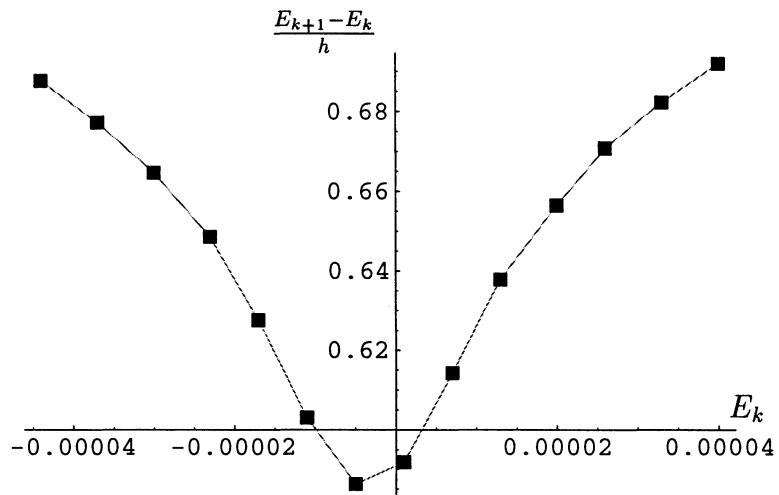


FIG. 4 – *Espacements de niveaux pour la bouteille de Champagne,  $n = 0$ ,  $h = 10^{-5}$  (calculs numériques).*

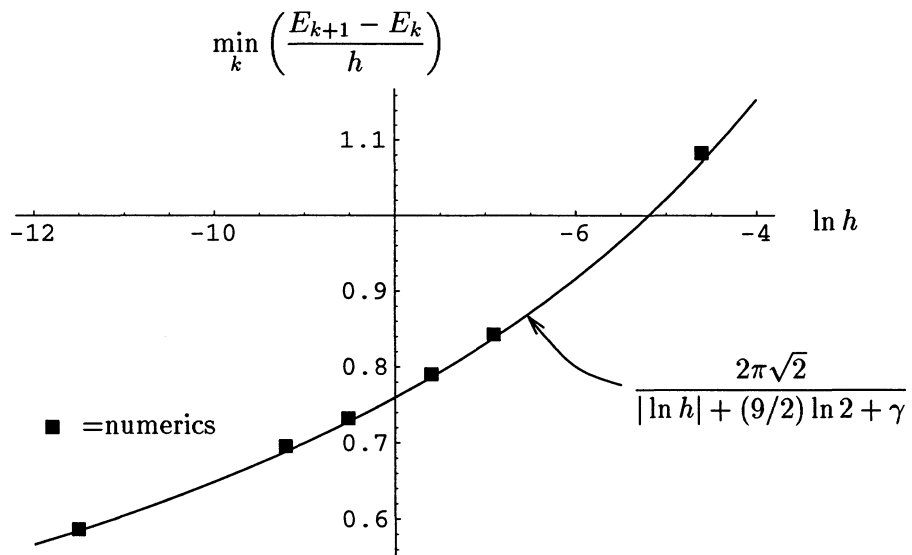


FIG. 5 – *le plus petit espacement.*

## Références

- [1] A.-M. Charbonnel. Comportement semi-classique du spectre conjoint d'opérateurs pseudo-différentiels qui commutent. *Asymptotic Analysis*, 1:227–261, 1988.
- [2] M.S. Child. Quantum states in a Champagne bottle. *J.Phys.A.*, 31:657–670, 1998.
- [3] Y. Colin de Verdière. Spectre conjoint d'opérateurs pseudo-différentiels qui commutent II. *Mathematische Zeitschrift*, 171:51–73, 1980.
- [4] Y. Colin de Verdière and B. Parisse. Équilibre instable en régime semi-classique I: Concentration microlocale. *Communications in partial differential equations*, 19(9–10):1535–1563, 1994.
- [5] Y. Colin de Verdière and B. Parisse. Équilibre instable en régime semi-classique II: Conditions de Bohr-Sommerfeld. *Annales de l'Institut Henri Poincaré, Physique Théorique*, 61(3):347–367, 1994.
- [6] R. Cushman and J.J. Duistermaat. The quantum spherical pendulum. *Bulletin of the AMS (new series)*, 19:475–479, 1988.
- [7] J.J. Duistermaat. On global action-angle variables. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 33:687–706, 1980.
- [8] J.J. Duistermaat and L. Hörmander. Fourier integral operators II. *Acta mathematica*, 128:183–269, 1972.
- [9] I.M. Gelfand, M.I. Graev, and N.Ja. Vilenkin. *Les Distributions*, volume 5. Dunod, 1962.
- [10] B. Helffer and J. Sjöstrand. Multiple wells in the semi-classical limit. I. *Communications in Partial Differential Equations*, 9:337–408, 1984.
- [11] B. Helffer and J. Sjöstrand. Semi-classical analysis for Harper's equation III Cantor structure of the spectrum. *Mémoires de la Société Mathématique de France*, 39, 1998.
- [12] B. Simon. Semiclassical analysis of low lying eigenvalues I. *Ann. Inst. H. Poincaré. Phys. Théor.*, 38(3):295–307, 1983. a correction in 40:224.
- [13] J. Sjöstrand. Semi-excited states in nondegenerate potential wells. *Asymptotic Analysis*, 6:29–43, 1992.
- [14] S. Vũ Ngọc. Formes normales semi-classiques des systèmes complètement intégrables au voisinage d'un point critique de l'application moment. preprint Institut Fourier 377, 1997.
- [15] S. Vũ Ngọc. Quantum monodromy in integrable systems. preprint Utrecht University 1055, 1998.

- [16] S. Vũ Ngọc. Bohr-Sommerfeld conditions for integrable systems with critical manifolds of focus-focus type. preprint.
- [17] Maorong Zou. Monodromy in two degrees of freedom integrable systems. *Journal of Geometry and Physics*, 10:37–45, 1992.

MATHEMATICS INSTITUTE (BUDAPESTLAAN 6, UNIVERSITY OF UTRECHT, 3508  
TA UTRECHT, THE NETHERLANDS) ET INSTITUT FOURIER (UMR5582, B.P.  
74, 38402 SAINT-MARTIN D'HÈRES, FRANCE)

`vu-ngoc@math.ruu.nl`