

RAPHAËL DANCHIN

## Évolution d'une singularité de type cusp dans une poche de tourbillon

*Journées Équations aux dérivées partielles* (1997), p. 1-19

[http://www.numdam.org/item?id=JEDP\\_1997\\_\\_\\_\\_A5\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1997____A5_0)

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1997, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# ÉVOLUTION D'UNE SINGULARITÉ DE TYPE CUSP DANS UNE POCHE DE TOURBILLON

**Raphaël Danchin**

Centre de Mathématiques de l'École Polytechnique

URA 169 du CNRS, 91128 Palaiseau Cedex.

Laboratoire d'Analyse Numérique, Paris 6.

*Email : danchin@orpee.polytechnique.fr*

## Introduction

Le système d'Euler incompressible décrit l'évolution de la vitesse et de la pression pour un fluide parfait incompressible. Si  $t \in \mathbb{R}$  et  $x \in \mathbb{R}^d$ , on note  $v(t, x)$  la vitesse au point  $x$  à l'instant  $t$  et  $p(t, x)$ , la pression. Le couple  $(v, p)$  vérifie alors

$$(E) \quad \begin{cases} (\partial_t + v \cdot \nabla)v = -\nabla p, \\ \operatorname{div} v = 0, \\ v|_{t=0} = v_0, \end{cases}$$

où  $v_0$  est donnée.

On s'intéresse ici au cas  $d = 2$ . Au champ  $v$  on associe le tourbillon  $\omega = \partial_1 v^2 - \partial_2 v^1$  qui vérifie

$$(T) \quad \begin{cases} (\partial_t + v \cdot \nabla)\omega = 0, \\ \omega|_{t=0} = \omega_0. \end{cases}$$

Connaissant  $\omega$ , on peut alors retrouver la vitesse grâce à la relation de Biot-Savart :

$$(BS) \quad v^1(t, x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{x^2 - y^2}{|x - y|^2} \omega(y) dy, \quad v^2(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{x^1 - y^1}{|x - y|^2} \omega(y) dy.$$

Soit  $\mathcal{E}$  l'espace des perturbations d'énergie finie des solutions stationnaires régulières de (E) dont le tourbillon est à support compact. Cet espace est défini par

$$\mathcal{E} = \left\{ u + \sigma, u \in L^2 \quad \text{et} \quad \sigma = \frac{\int_0^r \rho g(\rho) d\rho}{|x|^2}(-x^2, x^1), g \in C_0^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \right\}.$$

En 1963, V. Yudovitch [Y] démontre l'existence et l'unicité globales en temps d'une solution  $(v, p)$  de (E) dans  $C(\mathbb{R}; \mathcal{E}) \times L_{loc}^\infty(\mathbb{R}; L^2)$  dès que  $v_0 \in \mathcal{E}$ ,  $\operatorname{div} v_0 = 0$  et  $\omega_0 \in L^\infty \cap L^a$  pour un  $a \in [1, +\infty[$ . Le champ  $v$  solution est borné, quasi-lipschitzien et admet un flot  $\psi$  continu unique. Comme  $v$  n'est pas lipschitzien, la régularité de  $\psi$  peut se dégrader au cours du temps (voir [W]). En effet, il existe une constante  $C_1$  universelle telle que pour tout temps  $t$ ,  $\psi_t - Id$  soit de classe  $C^{\exp(-C_1 t \|\omega_0\|_{L^\infty \cap L^a})}$ , ce résultat étant optimal en général (voir [BCh]).

Grâce à (T) on a alors conservation du tourbillon le long des lignes de flot, c'est-à-dire que, pour presque tout  $x$  et pour tout temps,  $\omega(t, x) = \omega_0(\psi_t^{-1}(x))$ .

L'étude des poches de tourbillon est un problème classique lié au système d'Euler incompressible en dimension deux. Il s'agit de décrire l'évolution des solutions de (E) dont la donnée initiale a

pour tourbillon la fonction caractéristique d'un ouvert borné  $\Omega_0$ . Le théorème de Yudovitch donne l'existence et l'unicité d'une solution dont le tourbillon à l'instant  $t$  est la fonction caractéristique de l'ouvert  $\Omega_t = \psi_t(\Omega_0)$ , l'incompressibilité assurant que  $\Omega_t$  et  $\Omega_0$  ont même mesure. Toutefois, on ne peut rien dire sur l'évolution de la régularité de la frontière à l'aide du seul théorème de Yudovitch.

Lorsqu'on simule numériquement l'évolution d'une poche de tourbillon régulière, on constate presque toujours l'apparition en temps fini de structures très effilées qui ressemblent à des cusps (voir [Bu] et [ZHR] par exemple). Ainsi, il était couramment admis dans la fin des années 80, que des singularités de type cusp pouvaient apparaître dans une frontière initialement régulière. Mais en 1990, J.-Y. Chemin prouve que la régularité de la frontière est préservée pour tout temps lorsque  $\partial\Omega_0$  est une courbe simple de classe  $C^r$  avec  $r \in ]1, +\infty[ \setminus \mathbb{N}$  (voir [Ch2]).

Ce résultat a été généralisé au cas où la frontière initiale a des singularités : J.-Y. Chemin prouve dans [Ch2] que, si la frontière initiale est  $C^{1+\epsilon}$  avec  $\epsilon \in ]0, 1[$  en dehors d'un fermé, le fermé singulier est transporté pour tout temps par le flot de la solution sans affecter la partie  $C^{1+\epsilon}$  de la frontière. Dans [D1], on montre un résultat similaire pour une frontière  $C^{k+\epsilon}$  ( $k \in \mathbb{N}^*$ ) en dehors d'un fermé.

Le sujet n'est pas clos pour autant. Certes, aucune singularité ne peut apparaître dans une poche de tourbillon régulière, mais les simulations persistent à nous montrer l'émergence de structures qui deviennent vite indiscernables d'un cusp. Il faut dire que les seules estimations connues sur les quantités géométriques liées à la frontière croissent doublement exponentiellement en temps. Si elles sont optimales, il n'est pas surprenant que, numériquement, tout se passe comme si des singularités apparaissaient. De ce fait, il serait intéressant d'étudier la stabilité de structures singulières telles que le cusp qui, dans les simulations, se comportent comme des "attracteurs". Signalons ici que les méthodes de [Ch2] et de [D1] ne permettent pas de faire cette étude car elles reviennent à "ignorer" la singularité en la "gommant" à l'aide de troncatures.

Dans la première partie de l'exposé, on présente des simulations numériques récentes (voir [CD]) reposant sur un algorithme adaptatif multi-échelle et le principe d'interpolation dyadique de Deslauriers-Dubuc [DD]. On s'intéresse en particulier aux singularités de type cusp ou coin. Il semble que le cusp soit stable alors que le coin est instable.

Dans la suite de l'exposé, on montre que la singularité de type cusp est effectivement stable pour tout temps : on prouve dans le théorème 2.1 un résultat de propagation de structures géométriques généralisant le cas du cusp. Comme corollaire, on obtient que, si la poche initiale  $\Omega_0$  est suffisamment régulière en dehors d'un point  $x_0$  tel que l'intersection de  $\Omega_0$  avec des boules  $B(x_0, h)$  ait une mesure dominée par  $h^{2+\alpha}$  pour un certain  $\alpha > 0$ , alors  $\Omega_t$  jouit de la même propriété en  $x_t = \psi_t(x_0)$  avec le même  $\alpha$ . Autrement dit, l'ordre du cusp est conservé au cours du temps.

La démonstration du théorème 2.1 repose principalement sur une estimation stationnaire du gradient de la vitesse, démontrée dans la quatrième section. On majore  $\|\nabla v\|_{L^\infty}$  par des quantités qui ne dépendent que logarithmiquement de la structure géométrique, ce qui donne une croissance de  $\|\nabla v(t)\|_{L^\infty}$  au plus exponentielle en temps, comme dans le cas de poches de tourbillon régulières.

Pour prouver le théorème 2.1, une méthode standard consistant à régulariser les données initiales pour obtenir des estimations uniformes en grande norme sur les solutions régularisées avec des résultats de convergence en petite norme, ne semble pas appropriée. En effet, une régularisation détruit la structure effilée, ce qui empêche d'utiliser l'estimation stationnaire. Nous serons donc amenés à prouver d'abord une version pauvre du théorème à temps petit et avec perte de régularité en utilisant uniquement les résultats de [Ch2] pour des singularités générales, et des estimations à perte qui font l'objet de la troisième section. L'estimation stationnaire de la quatrième partie servira ensuite à montrer *a posteriori* que la géométrie effilée est transportée sans perte de régularité par le flot de la solution. De proche en proche, on montre alors un résultat global en temps.

**Remerciements** : L'auteur exprime toute sa gratitude à J.-Y. Chemin pour ses nombreuses suggestions à propos de ce travail.

## 1 Simulations numériques

Dans cette partie, on résume les simulations numériques sur les poches de tourbillon régulières faites en collaboration avec A. Cohen (voir [CD]).

### 1.1 Équation d'évolution

Il est clair que pour connaître la solution du problème, il suffit de calculer l'évolution de la frontière de la poche. On indique ici comment ramener cette évolution à la résolution d'une équation différentielle ordinaire sur les courbes fermées du plan.

On part d'une paramétrisation 1-périodique  $\gamma_0$  de  $\partial\Omega_0$ . Il est clair que  $\gamma_t = \psi_t(\gamma_0)$  paramétrise  $\partial\Omega_t$ . De plus, par définition du flot,

$$\partial_t \gamma_t(s) = v(\gamma_t(s)) \quad \text{pour } s \in \mathcal{S}^1.$$

En utilisant (BS) puis en intégrant deux fois par parties, on obtient

$$\frac{d}{dt} \gamma_t = A\gamma_t \quad \text{avec} \quad A\gamma_t = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{\partial_s \gamma_t(s') \cdot (\gamma_t(s) - \gamma_t(s'))}{|\gamma_t(s) - \gamma_t(s')|^2} (\gamma_t(s) - \gamma_t(s')) ds'.$$

Cette équation d'évolution est non linéaire. Cependant, on sait d'après [Ch2] que  $A\gamma_t$  a la même régularité locale que  $\gamma_t$ .

### 1.2 Ondelettes interpolantes

Avant de décrire l'algorithme employé, nous rappelons quelques propriétés des ondelettes interpolantes.

Pour  $j \in \mathbb{N}$ , on note  $G_j = \{2^{-j}k, k \in \{0, \dots, 2^j - 1\}\}$  et on suppose que l'on dispose d'une base d'ondelettes interpolantes  $(\phi_{j,\lambda})_{(j \in \mathbb{N}, \lambda \in G_j)}$  de  $\mathcal{S}^1$ , obtenue par exemple par 1-périodisation d'une base d'ondelettes interpolantes de  $\mathbb{R}$  (voir [DD] pour la construction d'une telle base).

Comme propriétés importantes de cette base, on retiendra que  $\phi_{j,\lambda}$  a un support concentré autour de  $\lambda$  avec une distance caractéristique de  $2^{-j}$ , que, pour  $\lambda' \in G_j$ ,  $\phi_{j,\lambda}(\lambda') = 1$  si  $\lambda' = \lambda$ , 0 sinon, et que toute fonction continue sur  $\mathcal{S}^1$  se décompose d'une manière unique, pour  $j_0 \in \mathbb{N}$  fixé, en

$$f = I_{j_0} f + \sum_{j > j_0} \sum_{\lambda \in G_j \setminus G_{j-1}} d_{j,\lambda} \phi_{j,\lambda} \quad \text{avec}$$

$$I_{j_0} f = \sum_{\lambda \in G_{j_0}} f(\lambda) \phi_{j_0,\lambda} \quad \text{et} \quad \sum_{\lambda \in G_j \setminus G_{j-1}} d_{j,\lambda} \phi_{j,\lambda} = I_j f - I_{j-1} f.$$

De plus, à l'instar des ondelettes "classiques", les ondelettes interpolantes permettent de caractériser de nombreux espaces fonctionnels, et la régularité ponctuelle.

Par exemple, l'appartenance de  $f$  à  $C^s$  pour  $s \in ]0, R[$  (où  $R$  est un paramètre dépendant de la base choisie), est équivalente à  $\|I_j f - f\|_{L^\infty} = \mathcal{O}(2^{-js})$ .

De plus, la régularité ponctuelle de  $f$  en point  $x_0 \in \mathcal{S}^1$  se lit sur la décroissance asymptotique des  $d_{j,\lambda}$  pour  $\lambda$  proche de  $x_0$ . Par exemple, si  $f$  est  $C^s$  en  $x_0$  et si  $M \in \mathbb{N}^*$  est fixé, alors on a  $\sup_{|\lambda - x_0| \leq 2^{-j} M} |d_{j,\lambda}| = \mathcal{O}(2^{-js})$ , et la réciproque est "presque vraie" (voir [J]).

### 1.3 L'algorithme

L'algorithme consiste à approximer la paramétrisation en la décomposant sur une base d'ondelettes interpolantes puis en ne conservant dans la décomposition que les coefficients plus gros qu'un seuil  $\epsilon$  donné. L'erreur commise ainsi est de l'ordre de  $\epsilon$ . De plus, grâce aux propriétés énoncées dans la section 1.2, et sachant que la courbe étudiée est régulière en dehors d'un point, on s'attend

à n'utiliser qu'un nombre faible d'ondelettes : dans les exemples testés, le terme de basse fréquence  $I_{j_0}f$  avec  $j_0 = 6$ , donne déjà une très bonne approximation loin de la singularité. Lorsqu'on monte en fréquence, les coefficients  $d_{j,\lambda}$  conservés se concentrent près de la singularité.

Décrivons d'un peu plus près l'algorithme utilisé (pour simplifier, on n'aborde que le cas d'un algorithme d'ordre un en temps). On fixe un seuil  $\epsilon$  ( $\epsilon \approx 10^{-6}$  dans les applications) et un pas de temps  $\Delta t$ . Partant d'une paramétrisation  $\gamma_0$  de  $\partial\Omega_0$ , on calcule les coefficients correspondant et on fait un "seuillage", c'est-à-dire qu'on ne conserve que les  $\phi_{j,\lambda}$  telles que  $|d_{j,\lambda}| \geq \epsilon$ . Soit  $\mathcal{E}$  l'ensemble des ondelettes conservées et  $I_{\mathcal{E}}\gamma_0$  l'approximation de  $\gamma_0$  ainsi obtenue. Grâce aux propriétés interpolantes du procédé d'approximation, on sait que  $\|I_{\mathcal{E}}\gamma_0 - \gamma_0\|_{L^\infty} \leq C\epsilon$ . Comme  $A\gamma_0$  a la même régularité locale que  $\gamma_0$ , on s'attend à avoir  $\|I_{\mathcal{E}}A\gamma_0 - A\gamma_0\|_{L^\infty} \leq C'\epsilon$ . On peut donc envisager de calculer l'évolution approchée de la paramétrisation en discrétisant en temps et en définissant l'approximation  $\tilde{\gamma}_n$  de  $\gamma$  à l'instant  $n\Delta t$  par la relation de récurrence

$$\tilde{\gamma}_n = \tilde{\gamma}_{n-1} + I_{\mathcal{E}}A\tilde{\gamma}_{n-1}.$$

Il est malheureusement probable qu'un tel algorithme donnerait de mauvais résultats sauf à temps très petit, car le fait que  $I_{\mathcal{E}}\gamma_0$  soit une bonne approximation de  $\gamma_0$  n'assure pas que  $I_{\mathcal{E}}\gamma_t$  soit une bonne approximation de  $\gamma_t$  pour  $t$  grand : la singularité est susceptible d'évoluer au cours du temps !

On peut pallier cet inconvénient en imaginant un procédé "adaptatif". C'est-à-dire que l'on autorise l'ensemble  $\mathcal{E}$  à changer à chaque pas de temps. Supposons donc connue une approximation  $\tilde{\gamma}_n$  au pas de temps  $n$  et notons  $\mathcal{E}_n$  l'ensemble des ondelettes conservées.

**Première étape.**— On "gonfle"  $\mathcal{E}_n$  en un ensemble plus gros  $\tilde{\mathcal{E}}_n$  obtenu en ajoutant les voisins en fréquence et en espace.

**Deuxième étape.**— On fait le calcul  $\tilde{\gamma}_{n+1} = \tilde{\gamma}_n + I_{\tilde{\mathcal{E}}_n}A\tilde{\gamma}_n$  dans la nouvelle base.

**Troisième étape.**— On seuille les coefficients de  $\tilde{\gamma}_{n+1}$  dans la base  $\tilde{\mathcal{E}}_n$ . On obtient ainsi un nouvel ensemble  $\mathcal{E}_{n+1}$ , plus petit que  $\tilde{\mathcal{E}}_n$ .

**Remarque 1.1.**— Pour que l'algorithme précédent soit applicable, il faut disposer d'un procédé permettant de passer rapidement des coefficients de la paramétrisation à ses valeurs au centre des ondelettes correspondantes, et *vice versa*. Si  $N$  désigne le cardinal de  $\mathcal{E}_n$ , un tel calcul peut se faire en  $\mathcal{O}(N)$  opérations si  $\mathcal{E}$  a une structure d'arbre. L'obtention de  $\tilde{\gamma}_{n+1}$  demande alors  $\mathcal{O}(N^2)$  opérations, l'étape la plus coûteuse étant le calcul de  $A\tilde{\gamma}_n$ .

**Remarque 1.2.**— Pour un algorithme classique de contour dynamique à points régulièrement espacés, il aurait fallu choisir  $N = 32768$  pour faire le calcul avec la même précision que dans nos simulations. Ici,  $N$  est plutôt de l'ordre de 300.

#### 1.4 Résultats numériques

Cet algorithme a été utilisé pour étudier l'évolution de singularités de type cusp ou coin. On a utilisé des ondelettes obtenues par un procédé d'interpolation cubique (voir [DD]).

D'après ces simulations, le coin est une structure instable. Plus précisément, si l'angle initial est aigu (voir fig. 1), il devient instantanément nul (c'est-à-dire un cusp), et s'il est obtus (voir fig. 2), il devient instantanément plat. Dans ce deuxième cas, on ne peut pas dire pour autant que la structure obtenue soit régulière. En effet, comme les équations d'Euler sont réversibles en temps, on aurait alors une contradiction avec le résultat de J.-Y. Chemin. Dans [D3], on explique la raison de cette instabilité par un calcul de  $\nabla v$  dans le cas stationnaire.

En revanche, comme le montre la fig. 3, le cusp semble être une structure stable. Des simulations numériques plus précises laissent même supposer une conservation de l'ordre du cusp, au moins à temps petit.

## 2 Définitions, notations et énoncé des résultats théoriques

Dans cette partie, on énonce un théorème de propagation de structures géométriques de type “effilé”. Nous verrons que ce résultat s’applique aux poches de tourbillon avec singularité de type cusp. L’énoncé reprend largement le concept de régularité conormale par rapport à une famille de champs de vecteurs (voir [Bo], [A] et [Ch1]). Cependant, pour pouvoir caractériser les structures singulières qui nous intéressent à l’aide de champs de vecteurs à coefficients dans une classe de Hölder  $C^\epsilon$  avec  $\epsilon \in ]0, 1[$ , nous avons dû choisir des champs s’annulant au point singulier et imposer au tourbillon une condition de support effilé près de ce point.

### 2.1 Espaces fonctionnels à géométrie singulière de type effilé

**Définition 2.1.**— Soit  $x_0 \in \mathbb{R}^2$ ,  $\epsilon \in ]0, 1[$  et  $\gamma > 0$ . On appellera géométrie  $(\gamma, \epsilon)$ -effilée en  $x_0$  la donnée d’un couple  $(\phi, X)$  où  $\phi = (\phi_h)_{h>0}$  est une famille de fonctions de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  et  $X = (X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  est une famille de champs de vecteurs sur  $\mathbb{R}^2$ , ces deux familles vérifiant en outre :

i) il existe  $\Psi$  inversible bilipschitzienne de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  avec  $\Psi(0) = x_0$  et  $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$  valant 1 près de 0, telles que si  $g_h(x) = g(x/h)$  pour  $h > 0$ , on ait  $\phi_h = g_h \circ \Psi^{-1}$ .

ii) chaque champ  $X_\lambda$  est à coefficients et à divergence dans  $C^\epsilon$ ,

$$\text{iii) } 0 < \mathcal{I}_\gamma(X) \stackrel{\text{déf}}{=} \inf_{x \in \text{Supp } \phi_1} \sup_{\lambda \in \Lambda} \frac{|X_\lambda(x)|}{|x - x_0|^\gamma} < +\infty,$$

$$\text{iv) } 0 < \mathcal{J}(X) \stackrel{\text{déf}}{=} \inf_{x \notin \text{Supp } \phi_1} \sup_{\lambda \in \Lambda} |X_\lambda(x)| < +\infty.$$

On pose alors  $\|X_\lambda\|_\epsilon = \|X_\lambda\|_\epsilon + \|\text{div } X_\lambda\|_\epsilon$  et  $I_\gamma(X) = \min(\mathcal{I}_\gamma(X), \mathcal{J}(X))$ .

**Remarque 2.1.**— Pour des raisons techniques qui apparaîtront dans la dernière partie, nous définissons également une notion de géométrie  $(\beta, \gamma, \epsilon)$ -effilée en  $x_0$  pour  $\beta \in ]0, 1[$ . Lorsque  $\beta = 1$ , cette définition coïncide avec la précédente. Si  $\beta \in ]0, 1[$ , on remplace la condition i) par :

i’) il existe  $\Psi$  bijective de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  avec  $\Psi(0) = x_0$ , de classe  $C^\beta$  ainsi que son inverse et  $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$  valant 1 près de 0, telles que, si  $g_h(x) = g(x/h)$  pour  $h > 0$ , on ait  $\phi_h = g_h \circ \Psi^{-1}$ .

**Définition 2.2.**— Soit  $X$  un champ de vecteurs. On définit formellement l’action de  $X$  sur  $u$  par la formule  $X(x, D)u = \text{div}(X \otimes u) - u \text{div } X$ .

Nous définissons maintenant des espaces de distributions liés aux géométries effilées.

**Définition 2.3.**— Soit  $x_0 \in \mathbb{R}^2$ ,  $\gamma > 0$ ,  $\alpha > 0$ ,  $a \in [1, +\infty[$ ,  $\beta \in ]0, 1[$ ,  $\epsilon \in ]0, 1[$  et  $\sigma \in ]0, \epsilon[$ . Posons  $\bar{\alpha} = 2/(2 + \alpha)$ . Soit  $(\phi, X)$  une géométrie  $(\beta, \gamma, \epsilon)$ -effilée en  $x_0$ . On dira que  $\omega$  appartient à l’espace  $C_{\alpha, \epsilon}^{\sigma, \epsilon}(X)$  si et seulement si les quatre conditions suivantes sont vérifiées :

$$\text{i) } \|\omega\| \stackrel{\text{déf}}{=} \|\omega\|_{L^\infty \cap L^a} < +\infty,$$

$$\text{ii) } \sup_{\lambda \in \Lambda} \|X_\lambda(x, D)\omega\|_{\epsilon-1} < +\infty,$$

$$\text{iii) } \mathcal{N}_\sigma(X, \omega) \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{\substack{\lambda \in \Lambda \\ h \in ]0, 1]}} h^{\frac{\sigma-\epsilon}{\bar{\alpha}}} \|X_\lambda(x, D)(\phi_h \omega)\|_{\sigma-1} < +\infty$$

$$\text{iv) } \mathcal{N}_\phi^\alpha(\omega) \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{\substack{1 \leq r \leq +\infty \\ h \in ]0, 1]}} h^{-\frac{2+\alpha}{r}} \|\phi_h \omega\|_{L^r} < +\infty.$$

On pose alors  $N_\sigma(X, \omega) = \mathcal{N}_\sigma(X, \omega) + \sup_{\lambda \in \Lambda} \|X_\lambda(x, D)\omega\|_{\epsilon-1}$ ,  $N_\phi^\alpha(\omega) = \mathcal{N}_\phi^\alpha(\omega) + \|\omega\|$  et

$$\|\omega\|_{\alpha, X}^{\sigma, \epsilon} = \frac{N_\phi^\alpha(\omega) \sup_{\lambda \in \Lambda} \|X_\lambda\|_\epsilon + N_\sigma(X, \omega)}{I_\gamma(X)}.$$

**Remarque 2.2.**— En pratique, on choisit  $\beta = 1$  si bien que  $\Psi$  est bilipschitzienne. L’utilisation de fonctions  $\phi_h = g_h \circ \Psi^{-1}$  pour exprimer la petitesse du support du tourbillon près du point

singulier peut paraître inutilement compliquée. Cependant, cette définition a l'avantage de pouvoir se propager à l'aide du flot  $\psi$  de la solution si l'on pose  $\phi_{t,h} = \phi_h \circ \psi_t^{-1}$ . On obtient alors des valeurs de  $\mathcal{N}_{\phi_t}^\alpha(\omega_t)$  et de  $\mathcal{N}_\sigma(X_t, \omega_t)$  constantes au cours du temps. Ce fait est très important car il permet une majoration de  $\nabla v$  par une quantité constante multipliée par un logarithme de quantités qui, elles, sont susceptibles de croître rapidement au cours du temps (voir le théorème 4.1).

**Remarque 2.3.**— Supposons que  $\beta = 1$ . Si la condition *i)* est vérifiée, la condition *iv)* est alors équivalente à l'existence d'une constante  $K$  telle que  $\|\omega\|_{L^1(B(x_0,h))} \leq Kh^{2+\alpha}$  pour  $h \in ]0, 1]$ , ce qui signifie que le support de  $\omega$  est effilé près de  $x_0$  ou que  $\omega(x)$  est dominé par une puissance strictement positive de  $|x - x_0|$ . En particulier, lorsque  $\omega$  est la fonction caractéristique d'un ouvert borné, *iv)* est vérifiée si la frontière présente un cusp en  $x_0$ . Elle ne l'est pas en revanche si la frontière présente un coin en  $x_0$  car il existe alors une constante  $c > 0$  telle que  $\|\phi_h \omega\|_{L^1} \geq ch^2$ . Quant à la condition *iii)*, nous verrons que, dans les cas pratiques, elle est une conséquence des injections de  $L^p$  dans  $C^{-2/p}$ , de la structure  $(1, \epsilon)$ -effilée de la géométrie et de la condition *iv)*.

## 2.2 Énoncé du résultat principal

Définissons d'abord la notion de champ de vecteurs transporté par le flot.

**Proposition 2.1.**— Soit  $\epsilon \in ]0, 1[$  et  $X_0$  un champ de vecteurs à coefficients  $C^\epsilon$ . On appellera champ de vecteurs transporté par le flot  $\psi$  à l'instant  $t$  le champ  $X_t$  solution de

$$(TG) \quad \begin{cases} (\partial_t + v \cdot \nabla)X = X(x, D)v, \\ X|_{t=0} = X_0. \end{cases}$$

En tout point  $x$  tel que  $\nabla \psi_t(x)$  soit défini pour tout temps, on a  $X_t(\psi_t(x)) = X_0(x, D)\psi_t(x)$ .

On peut maintenant énoncer le théorème de propagation de structures effilées.

**Théorème 2.1.**— Soit  $x_0 \in \mathbb{R}^2$ ,  $\epsilon \in ]0, 1[$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\sigma \in ]0, \epsilon[$ ,  $a \in [1, +\infty[$  et  $(\phi_0, X_0)$  une géométrie  $(1, \epsilon)$ -effilée en  $x_0$ . Soit  $v_0 \in \mathcal{E}$  tel que  $\operatorname{div} v_0 = 0$ . Supposons de plus que le tourbillon initial  $\omega_0$  appartienne à  $C_{\alpha, \epsilon}^{\sigma, \epsilon}(X_0)$  et que l'on ait

$$(2.1) \quad \epsilon \in ]\bar{\alpha}, 1[ \quad \text{et} \quad \sigma \in \left] 0, \epsilon \left( \frac{\epsilon - \bar{\alpha}}{\epsilon + \bar{\alpha}} \right) \right[ \quad \text{avec} \quad \bar{\alpha} = \frac{2}{2 + \alpha}.$$

Notons  $v$  la solution de (E) de donnée initiale  $v_0$  et  $\psi$  son flot. Alors pour tout temps  $t$ , le couple  $(\phi_t, X_t)$  reste une géométrie  $(1, \epsilon)$ -effilée en  $x_t$  où  $\phi_{t,h} = \phi_{0,h} \circ \psi_t^{-1}$ ,  $(X_{t,\lambda})_{\lambda \in \Lambda}$  est la famille transportée de  $(X_{0,\lambda})_{\lambda \in \Lambda}$  par le flot de  $v$  et  $x_t = \psi_t(x_0)$ . De plus,  $\nabla v \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}; L^\infty(\mathbb{R}^2))$  et  $\omega(t) \in C_{\alpha, \epsilon}^{\sigma, \epsilon}(X_t)$ . Plus précisément, il existe une constante  $L_0$  ne dépendant que des conditions initiales et une constante  $C$  ne dépendant que de  $\epsilon$ ,  $\sigma$ ,  $a$  et  $\alpha$ , telles que

$$(2.2) \quad \|\nabla v(t)\|_{L^\infty} \leq CL_0 N_{\phi_0}^\alpha(\omega_0) e^{Ct N_{\phi_0}^\alpha(\omega_0)},$$

$$(2.3) \quad \|\omega_t\|_{\alpha, X_t}^{\sigma, \epsilon} \leq C \|\omega_0\|_{\alpha, X_0}^{\sigma, \epsilon} \exp\left(C L_0 (e^{Ct N_{\phi_0}^\alpha(\omega_0)} - 1)\right).$$

**Remarque 2.4.**— En reprenant les résultats de [Ch2] chap. 9 sur les poches de tourbillon singulières, on montre l'existence d'une constante  $C_0$  ne dépendant que des données initiales et d'une constante  $C$  ne dépendant que des paramètres de régularité, telles que

$$(2.4) \quad \forall h \in ]0, 1], \forall t \in \mathbb{R}, (|x - x_t| \geq h) \Rightarrow \left( |\nabla v(t, x)| \leq C(1 - \log h) \|\omega_0\| e^{C_0 e^C \|\omega_0\| t} \right).$$

Donnons maintenant un exemple important d'application du théorème 2.1. Cet exemple correspond au cas où  $\omega_0 = \bar{\omega}_0 1_{\Omega_0}$  avec  $\Omega_0$  ayant une frontière régulière en dehors d'un point où elle a une singularité de type cusp, et  $\bar{\omega}_0$  fonction de classe  $C^\epsilon$  pour un  $\epsilon \in ]0, 1[$ . On suppose que la singularité se trouve à l'origine et que le cusp est orienté suivant l'axe des abscisses.

**Proposition 2.2.**— Soit  $\alpha > 0$ ,  $\epsilon \in ]0, 1[$ ,  $\Omega_0$  un ouvert borné tel que  $0 \in \partial\Omega_0$  et que  $\partial\Omega_0 \setminus \{0\}$  soit de classe  $C^{1+\epsilon}$ . Supposons plus précisément qu'il existe  $\eta > 0$  et deux fonctions  $f_1$  et  $f_2$  définies sur  $[0, \eta]$  et telles que  $\Omega_0$  coïncide localement avec  $\{(x_1, x_2), f_1(x_1) < x_2 < f_2(x_2)\}$ . Posons  $l(x) = (f_2(x) - f_1(x))/2$  et  $g(x) = (f_1(x) + f_2(x))/2$  et supposons enfin que  $l$  et  $g$  vérifient les propriétés suivantes :

- i)  $l$  et  $g$  sont de classe  $C^{1+\epsilon}$  sur  $]0, \eta]$ ,
- ii)  $l(0) = l'(0) = g(0) = g'(0) = 0$  et les applications  $h \mapsto hg'(h)$  et  $h \mapsto h(l'/l)(h)$  sont prolongeables par continuité en 0, le prolongement obtenu étant  $C^\epsilon$  sur  $[0, \eta]$ ,
- iii) il existe  $C > 0$  tel que  $C^{-1}h^{1+\alpha} \leq l(h) \leq Ch^{1+\alpha}$  sur  $[0, \eta]$ .

Donnons-nous par ailleurs  $\bar{\omega}_0 \in C^\epsilon(\mathbb{R}^2)$  et posons  $\omega_0 = \bar{\omega}_0 1_{\Omega_0}$ . Alors il existe une géométrie  $(\phi, X)$   $(1, \epsilon)$ -effilée en 0 telle que  $\omega_0 \in C_{\alpha, \epsilon}^\sigma(X)$  pour tout  $\sigma \in ]0, \epsilon[$ . En particulier, si  $\epsilon > 2/(2 + \alpha)$ ,  $\omega_0$  vérifie les hypothèses du théorème 2.1.

**Principe de la preuve :** On remarque que l'on peut définir un champ  $X$  tangent à  $\partial\Omega_0$  et tel que  $|X(x)| \sim |x|$  près de 0. Pour cela, on prolonge les  $f_i$  sur  $[-\eta, \eta]$  par parité et on pose

$$X(x) = x_1 \partial_1 + \left( \frac{x_1 l'(x_1)}{l(x_1)} (x_2 - g(x_1)) + x_1 g'(x_1) \right) \partial_2.$$

On définit ensuite d'autres champs de vecteurs loin de la singularité afin que les hypothèses du théorème 2.1 soient satisfaites. Pour plus de détails, on pourra consulter [D2].  $\square$

**Remarque 2.5.**— En utilisant l'incompressibilité, il n'est pas difficile de montrer qu'avec les hypothèses de la proposition 2.2, on a  $\mathcal{N}_{\phi_0}^\alpha(\omega_0) = \mathcal{N}_{\phi_t}^\alpha(\omega_t)$  pour tout  $t$ . Comme  $\psi$  est lipschitzien puis que  $v$  l'est, il y a conservation de l'ordre d'effilement de la poche près de la singularité.

**Remarque 2.6.**— Plus généralement, le théorème 2.1 peut s'appliquer à un certain nombre de données initiales utilisées dans [Ch2] chap. 9 ou dans [D1] : il convient simplement d'imposer au tourbillon une condition d'annulation à un ordre suffisamment élevé près de la singularité.

### 3 Estimations à perte pour les équations de transport

On donne ici une estimation à perte pour les équations de transport par un champ de vitesse quasi-lipschitzien. L'estimation obtenue servira dans la dernière partie à propager des géométries effilées avec perte de régularité et à temps petit, étape préliminaire à la preuve du théorème 2.1.

Posons  $\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R}^d, 3/4 \leq |x| \leq 8/3\}$ ,  $\mathcal{B} = \{x \in \mathbb{R}^d, |x| \leq 4/3\}$  et donnons-nous deux applications  $\chi \in C_0^\infty(\mathcal{B})$  et  $\varphi \in C_0^\infty(\mathcal{C})$  telles que  $\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \chi(\xi) + \sum_{q \in \mathbb{N}} \varphi(2^{-q}\xi) = 1$ .

On pose alors  $\Delta_p u = 0$  si  $p \leq -2$ ,  $\Delta_{-1} u = \chi(D)u$  et  $\Delta_p u = \varphi(2^{-p}D)u$  si  $p \geq 0$ .

**Définition 3.1.**— Soit  $r \in \mathbb{R}$ . On note  $C^r(\mathbb{R}^d)$ , l'espace des distributions tempérées  $u$  telles que

$$\|u\|_r \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \sup_{q \geq -1} 2^{qr} \|\Delta_q u\|_{L^\infty} < \infty.$$

**Remarque 3.1.**— Lorsque  $r \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$ , cette définition redonne les espaces de Hölder usuels avec des normes équivalentes. Si  $r \in \mathbb{N}$ , l'espace  $C^r(\mathbb{R}^d)$  ainsi défini contient strictement l'ensemble des fonctions bornées à dérivées d'ordre  $r$  bornées. Pour éviter les confusions, on le notera alors  $C_*^r(\mathbb{R}^d)$ .

Le lemme suivant généralise un lemme de [BCh] sur les équations de transport : on suppose ici que le second membre de l'équation est un peu moins régulier que la quantité transportée.

**Lemme 3.1.**— Soit  $\beta \in ]0, 1[$ ,  $s \in [\beta - 1, 1 - \beta]$  et  $(V, G)$  un couple de fonctions positives et localement intégrables sur  $\mathbb{R}^+$ . Il existe alors une constante  $C$  universelle vérifiant les propriétés suivantes :

Posons  $\sigma_t = s - \frac{C}{1-\beta} \int_0^t V(\tau)(1 + G(\tau)) d\tau$  et soit  $T$  un entier tel que  $\sigma_T \geq \beta - 1$ .

Soit  $v$  un champ de vecteurs à divergence nulle tel que  $\nabla v \in L^1([0, T], C_*^0)$  et  $\|\nabla v(t)\|_0 \leq V(t)$  pour  $t \in [0, T]$ , et  $f_0$  une fonction de classe  $C^s$ . Soient  $f$ ,  $g_1$  et  $g_2$  trois fonctions telles que

$$\sup_{t \in [0, T]} \|f(t)\|_{\sigma_t} < +\infty, \quad \sup_{t \in [0, T]} \|g_1(t)\|_{\sigma_t} < +\infty \quad \text{et} \quad \|\Delta_q g_2(t)\|_{L^\infty} \leq (q + 2)2^{-q\sigma_t} G(t)V(t) \|f(t)\|_{\sigma_t}.$$

Supposons que, sur l'intervalle  $[0, T]$ , on ait

$$(T) \quad \begin{cases} \partial_t f + \operatorname{div}(fv) = g_1 + g_2, \\ f|_{t=0} = f_0. \end{cases}$$

Alors on a

$$\forall t \in [0, T], \|f(t)\|_{\sigma_t} \leq 2 \left( \|f_0\|_s + \int_0^t \|g_1(\tau, \cdot)\|_{\sigma_\tau} d\tau \right).$$

**Preuve :** Elle reprend les idées de [BCh]. On applique l'opérateur  $\Delta_q$  à  $(T)$ , ce qui donne

$$(T_q) \quad \begin{cases} (\partial_t + v \cdot \nabla) \Delta_q f = \Delta_q g_1 + \Delta_q g_2 + [v \cdot \nabla, \Delta_q] f, \\ \Delta_q f|_{t=0} = \Delta_q f_0. \end{cases}$$

On estime ensuite la norme  $L^\infty$  des blocs dyadiques sachant que

$$\|[v \cdot \nabla, \Delta_q] f\|_{L^\infty} \leq C \left( \frac{(q + 2)V(t)}{1 - \sigma_t^2} \right) 2^{-q\sigma_t} \|f\|_{\sigma_t}.$$

On conclut en intégrant  $(T_q)$  en temps puis par quelques majorations immédiates.  $\square$

**Remarque 3.2.**— Lorsque le champ  $v$  est lipschitzien et que le second membre est aussi régulier que la quantité transportée, on obtient bien sûr des estimations sans perte (voir par exemple [Ch2]) : pour tout  $r \in ]-1, 1[$ , il existe une constante  $C$  ne dépendant que de  $r$  et telle que, si  $T > 0$  et si

$$\begin{cases} \partial_t f + \operatorname{div}(fv) = g, \\ f|_{t=0} = f_0, \end{cases}$$

pour  $t \in [0, T]$ , alors on ait

$$\forall t \in [0, T], \|f(t)\|_r \leq \left( \|f_0\|_r + \int_0^t \|g(\tau)\|_r e^{-C \int_0^\tau \|\nabla v(\tau')\|_{L^\infty} d\tau'} d\tau \right) e^{C \int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty} d\tau}.$$

#### 4 Une estimation stationnaire pour le gradient de la vitesse

Dans cette partie, on prouve une estimation de  $\|\nabla v\|_{L^\infty}$  pour  $v$  vérifiant des hypothèses un peu plus générales que celles du théorème 2.1. Cette généralisation n'est pas un "luxe inutile" comme nous le verrons dans la dernière partie. Observons aussi que la constante de l'estimation est continue par rapport aux paramètres de régularité et d'effilement, ce qui s'avèrera indispensable.

Soit  $x_0 \in \mathbb{R}^2$ . Dorénavant, on dira que  $(\phi_h)_{h>0}$  est une famille concentrée en  $x_0$  si et seulement si il existe deux applications  $g$  et  $\Psi$  vérifiant la condition  $i)$  de la définition 2.1 ( ou la condition  $i')$

de la remarque 2.1 si  $\beta < 1$ ), et telles que  $\phi_h(x) = g(\Psi^{-1}(x)/h)$ . On posera alors  $\omega_h = \phi_h\omega$ . Dans cette partie, on conviendra que  $\|\Psi^{-1}\|_\beta = \|\nabla\Psi^{-1}\|_{L^\infty}$  si  $\beta = 1$ .

En utilisant la continuité de l'inclusion de  $L^p(\mathbb{R}^2)$  dans  $C^{-\frac{2}{p}}(\mathbb{R}^2)$  (voir [T]) et le fait que  $\Delta^{-1}\partial_i\partial_j$  est un opérateur continu de  $L^p$  dans  $L^p$  pour  $p \in ]1, +\infty[$  (voir [Ch2] par exemple), on montre facilement que le gradient de la vitesse garde un "souvenir" du caractère effilé du tourbillon près d'un point. Plus précisément, on obtient le lemme suivant :

**Lemme 4.1.**—*Soit  $x_0 \in \mathbb{R}^2$ ,  $(\phi_h)_{h>0}$  une famille concentrée en  $x_0$  et  $\alpha > 0$ . Supposons que  $\omega \in L_{loc}^\infty$ . Soit enfin  $h > 0$  et  $\eta \in ]0, 2[$ . Alors il existe une constante  $C$  universelle telle que, si l'on pose  $v_h = \Delta^{-1}\nabla^\perp\omega_h$ , on ait*

$$\|\nabla v_h\|_{-\eta} \leq \frac{Ch^{\frac{\eta}{\alpha}}\mathcal{N}_\phi^\alpha(\omega)}{\eta(2-\eta)} \quad \text{avec} \quad \bar{\alpha} = \frac{2}{2+\alpha}.$$

Le résultat principal de cette section est le théorème suivant :

**Théorème 4.1.**—*Soit  $a \in [1, +\infty[$  et  $D$  l'ensemble des quintuplets  $(\alpha, \beta, \gamma, \epsilon, \sigma)$  vérifiant l'hypothèse suivante :*

$$(\mathcal{H}) \quad \alpha > 0, \quad \bar{\alpha} < \beta \leq 1, \quad \bar{\alpha} < \epsilon < 1, \quad 0 < \sigma < \epsilon \left( \frac{\epsilon - \bar{\alpha}}{\epsilon + \bar{\alpha}} \right) \quad \text{et} \quad 0 < \gamma \leq \frac{\epsilon\beta}{\bar{\alpha}} \left( \frac{\epsilon - \sigma}{\epsilon + \sigma} \right).$$

où l'on a posé  $\bar{\alpha} = 2/(2+\alpha)$ .

Soit  $x_0 \in \mathbb{R}^2$  et  $(\phi, X)$  une géométrie  $(\beta, \gamma, \epsilon)$ -effilée en  $x_0$ . Soient  $g$  et  $\Psi$  deux applications vérifiant la condition *i)* de la définition 2.1 si  $\beta = 1$  ou la condition *i')* de la remarque 2.1 si  $\beta < 1$  et  $R' \leq \|\Psi^{-1}\|_\beta$  tel que  $g \equiv 1$  sur  $B(0, R')$ . Soit enfin  $v$  un champ de vecteurs à divergence nulle, à gradient dans  $L^a$  et à tourbillon  $\omega \in C_{\alpha, \epsilon}^{\sigma, \epsilon}(X)$ . Alors on a

$$\|\nabla v\|_{L^\infty} \leq CaN_\phi^\alpha(\omega) \log \left( e + \frac{N_\phi^\alpha(\omega) \sup_{\lambda \in \Lambda} \|\tilde{X}_\lambda\|_\epsilon + N_\sigma(X, \omega)}{\|\Psi^{-1}\|_\beta^{-1} R' I_\gamma(X) N_\phi^\alpha(\omega)} \right)$$

où  $C$  est une fonction continue de  $(\alpha, \beta, \gamma, \epsilon, \sigma)$  sur le domaine  $D$ .

Le théorème 4.1 s'inspire du théorème 3.3.2 de [Ch2] que nous énonçons ici :

**Proposition 4.1.**—*Il existe une constante  $C$  telle que pour tout  $\epsilon \in ]0, 1[$ , pour tout  $a \in [1, +\infty[$  et pour tout fermé  $\Sigma$  du plan, on ait la propriété suivante.*

Soit  $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  une famille de champs de vecteurs à coefficients et divergence dans  $C^\epsilon$  et telle que

$$I(\Sigma, X) \stackrel{\text{déf}}{=} \inf_{x \notin \Sigma} \sup_{\lambda \in \Lambda} |X_\lambda(x)| > 0.$$

Alors si  $v$  est un champ de vecteurs à divergence nulle, à gradient dans  $L^a$  et à tourbillon  $\omega$  dans  $L^\infty$  tel que de plus  $\sup_{\lambda \in \Lambda} \|X_\lambda(x, D)\omega\|_{\epsilon-1} < +\infty$ , on a

$$\|\nabla v\|_{L^\infty(\Sigma^\epsilon)} \leq \frac{Ca}{\epsilon} \|\omega\| \log \left( e + \frac{\sup_{\lambda \in \Lambda} \|X_\lambda(x, D)\omega\|_{\epsilon-1} + \|\omega\| \sup_{\lambda \in \Lambda} \|\tilde{X}_\lambda\|_\epsilon}{\epsilon \|\omega\| I(\Sigma, X)} \right).$$

Cette proposition montre clairement que, pour majorer  $\|\nabla v\|_{L^\infty}$  dans le cas qui nous intéresse, seule la contribution du tourbillon provenant de la partie effilée pose problème. Le lemme suivant montre que cette contribution reste bornée lorsqu'on s'approche de la singularité.

**Lemme 4.2.**—*Sous les hypothèses du théorème 4.1, il existe un polynôme  $P(x, y, z)$  ne s'annulant que pour  $xyz = 0$ ,  $z = 1$ ,  $x = y$  ou  $y = z$  et tel que pour  $0 < h \leq 1$ ,  $c_1 > 0$  et  $v_h = \Delta^{-1} \nabla^\perp \omega_h$ , on ait*

$$\|\nabla v_h\|_{L^\infty(\text{Supp } \phi_1 \setminus B(x_0, c_1 h^{1/\beta}))} \leq \frac{N_\phi^\alpha(\omega)}{P(\sigma, \bar{\alpha}\gamma/\beta, \epsilon)} \log \left( e + \frac{N_\phi^\alpha(\omega) \sup_{\lambda \in \Lambda} \|\tilde{X}_\lambda\|_\epsilon + \mathcal{N}_\sigma(X, \omega)}{c_1^\gamma \mathcal{I}_\gamma(X) N_\phi^\alpha(\omega)} \right).$$

Pour démontrer ce résultat, nous aurons besoin du lemme suivant qui est un raffinement du lemme 3.3.1 de [Ch2] prenant en compte le caractère effilé du support du tourbillon.

**Lemme 4.3**—*Soit  $Y$  un champ de vecteurs à coefficients  $C^\epsilon$  ( $\epsilon \in ]0, 1[$ ) non identiquement nul sur  $\mathbb{R}^2$  et  $h > 0$ . On suppose de plus qu'il existe  $\sigma \in ]0, 1[$  tel que  $Y(x, D)v_h \in C^\sigma(\mathbb{R}^2)$ . Alors il existe une constante  $C$  universelle telle que, pour  $0 < \epsilon' < \epsilon$ , on ait*

$$\|Y(x, D)v_h\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{\min(\sigma, \epsilon - \epsilon')} \|Y\|_{L^\infty} \|\nabla v_h\|_0 \log \left( e + \frac{\|Y(x, D)v_h\|_\sigma + h^{\frac{\epsilon'}{\alpha}} \mathcal{N}_\phi^\alpha(\omega) \|Y\|_\epsilon}{\sigma \epsilon' (\epsilon - \epsilon') \|Y\|_{L^\infty} \|\nabla v_h\|_0} \right).$$

**Démonstration du lemme 4.2 :** Une simple application de la proposition 4.1 permet d'affirmer que pour tous  $h > 0$  et  $c_1 > 0$ , on a  $\nabla v_h \in L^\infty(\text{Supp } \phi_1 \setminus B(x_0, c_1 h^{1/\beta}))$ . Malheureusement, l'estimation obtenue a un comportement en  $\log h$  pour  $h$  tendant vers 0. Nous expliquons brièvement ici comment obtenir une estimation indépendante de  $h$  en contrôlant soigneusement toutes les puissances de  $h$  grâce aux lemmes 4.1 et 4.3. On peut toujours supposer que  $x_0 = 0$ .

Soit donc  $y_0 \in \text{Supp } \phi_1 \setminus B(0, c_1 h^{1/\beta})$ . On fixe une fois pour toutes une approximation de l'identité  $\rho \in C_0^\infty(B(0, 1))$  telle que  $\int \rho = 1$ . Il existe par ailleurs  $\lambda \in \Lambda$  tel que  $2|X_\lambda(y_0)| \geq |y_0|^\gamma \mathcal{I}_\gamma(X)$ . On fixe  $\lambda$  et on omettra l'indice  $\lambda$  dans le reste de la démonstration du lemme 4.2. Posons

$$U = \left\{ y \in \mathbb{R}^2, \left( \frac{|X(y)|}{|X(y_0)|} \right)^{\pm 1} \leq 2 \right\}.$$

Soit  $\theta = \delta^{-2} \rho(\delta^{-1} \cdot) \star 1_U$  avec  $\delta = \left( \frac{|X(y_0)|}{4\|X\|_\epsilon} \right)^{\frac{1}{\epsilon}}$ . Posons  $Y = \theta X$ . Il est facile de vérifier que

$$(4.1) \quad \|Y\|_{L^\infty} \leq \frac{9}{4} |X(y_0)|, \quad Y(y_0) = X(y_0) \quad \text{et} \quad \|Y\|_\epsilon \leq C \|X\|_\epsilon.$$

Remarquons maintenant que

$$\begin{aligned} |Y(y_0)|^2 \partial_1^2 &= Y^1(y_0) Y(x, D) \partial_1 - Y^2(y_0) Y(x, D) \partial_2 + (Y^2(y_0))^2 \Delta, \\ |Y(y_0)|^2 \partial_2^2 &= Y^2(y_0) Y(x, D) \partial_2 - Y^1(y_0) Y(x, D) \partial_1 + (Y^1(y_0))^2 \Delta, \\ |Y(y_0)|^2 \partial_1 \partial_2 &= Y^1(y_0) Y(x, D) \partial_2 + Y^2(y_0) Y(x, D) \partial_1 - Y^1(y_0) Y^2(y_0) \Delta. \end{aligned}$$

Comme  $v_h = \Delta^{-1} \nabla^\perp \omega_h$ , ceci entraîne grâce au lemme 4.3 et à (4.1),

$$(4.2) \quad |\nabla v_h(y_0)| \leq C \left( \|\omega_h\|_{L^\infty} + \frac{\|\nabla v_h\|_0}{\min(\sigma, \epsilon - \epsilon')} \log \left( e + \frac{\|Y(x, D)v_h\|_\sigma + h^{\frac{\epsilon'}{\alpha}} \mathcal{N}_\phi^\alpha(\omega) \|Y\|_\epsilon}{\sigma \epsilon' (\epsilon - \epsilon') |X(y_0)| \|\nabla v_h\|_0} \right) \right),$$

pour tout  $\epsilon'$  tel que  $0 < \epsilon' < \epsilon$ .

Comme  $Y(x, D)v_h = \theta X(x, D)v_h$ , une majoration grossière donne

$$\|Y(x, D)v_h\|_\sigma \leq C \left( \frac{\|X\|_\epsilon}{|X(y_0)|} \right)^{\frac{\sigma}{\epsilon}} \|X(x, D)v_h\|_\sigma.$$

La majoration de  $\|X(x, D)v_h\|_\sigma$  est faite en détails dans [D2]. On utilise des résultats d'opérance pour le paraproduit, et le lemme 4.1. On trouve

$$(4.3) \quad \|X(x, D)v_h\|_\sigma \leq \frac{Ch^{\frac{\epsilon-\sigma}{\alpha}} (\mathcal{N}_\sigma(X, \omega) + \mathcal{N}_\phi^\alpha(\omega) \|\tilde{X}\|_\epsilon)}{\epsilon\sigma(1-\epsilon)(\epsilon-\sigma)^2}.$$

En prenant  $\epsilon' = \bar{\alpha}\gamma/\beta$  dans (4.2) puis en y injectant les inégalités (4.1) et (4.3), il vient

$$|\nabla v_h(y_0)| \leq C \left( \|\omega_h\|_{L^\infty} + \frac{\|\nabla v_h\|_0}{P(\sigma, \bar{\alpha}\gamma/\beta, \epsilon)} \log \left( e + \frac{h^{\frac{\gamma}{\beta}}}{|X(y_0)|} \frac{\mathcal{N}_\phi^\alpha(\omega) \|X\|_\epsilon}{\|\nabla v_h\|_0} \right. \right. \\ \left. \left. + h^{\frac{\epsilon-\sigma}{\alpha}} \left( \frac{\|\tilde{X}\|_\epsilon}{|X(y_0)|} \right)^{\frac{\epsilon+\sigma}{\epsilon}} \left( \frac{\mathcal{N}_\sigma(X, \omega) + \mathcal{N}_\phi^\alpha(\omega) \|\tilde{X}\|_\epsilon}{\|\tilde{X}\|_\epsilon \|\nabla v_h\|_0} \right) \right) \right).$$

Compte tenu des hypothèses sur  $\gamma$  et  $\beta$ , de  $h \leq 1$  et de  $|X(y_0)| \geq \mathcal{I}_\gamma(X)|y_0|^\gamma \geq c_1^\gamma \mathcal{I}_\gamma(X)h^{\gamma/\beta}$ , on obtient l'estimation voulue.  $\square$

#### Démonstration du théorème 4.1 :

D'après la proposition 4.1, si  $x_0 = 0$ , on a  $\nabla v \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ , ce qui donne un sens aux calculs qui suivent, pour presque tout  $x$ .

Soit donc  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . Posons  $\mathcal{R} = (\|\Psi^{-1}\|_\beta^{-1} R')^{1/\beta}$  et  $h_1 = \mathcal{R}^{\beta\bar{\alpha}/(\beta-\bar{\alpha})}$ . Supposons que  $|x| \leq h_1^{1/\beta} \mathcal{R}/2$ . On pose alors  $h = (2|x|/\mathcal{R})^\beta$  de telle sorte que  $h \leq h_1$ . On écrit

$$\nabla v(x) = \nabla v_h(x) + \nabla(v - v_h)(x).$$

Le premier terme s'estime grâce au lemme 4.2 appliqué avec  $c_1 = \mathcal{R}/4$ . On obtient

$$(4.4) \quad |\nabla v_h(x)| \leq \frac{C}{P(\sigma, \bar{\alpha}\gamma/\beta, \epsilon)} \mathcal{N}_\phi^\alpha(\omega) \log \left( e + \frac{\mathcal{N}_\phi^\alpha(\omega) \sup_{\lambda \in \Lambda} \|\tilde{X}_\lambda\|_\epsilon + \mathcal{N}_\sigma(X, \omega)}{\mathcal{R} \mathcal{I}_\gamma(X) \mathcal{N}_\phi^\alpha(\omega)} \right).$$

Majoration de  $\nabla(v - v_h)(x)$  :

Posons  $q_1 = [(\log_2 h_1 - \log_2 h)/\beta]$  de telle sorte que  $2^{q_1\beta} h \leq h_1 \leq 2^{(q_1+1)\beta} h$ . On écrit ensuite

$$(4.5) \quad \nabla(v - v_h)(x) = \sum_{q=0}^{q_1-1} \nabla(v_{2^{(q+1)\beta} h} - v_{2^q\beta h})(x) + \nabla(v - v_{2^{q_1\beta} h})(x).$$

Le premier terme pourra être estimé à l'aide du lemme suivant qui se démontre directement à l'aide de (BS) et de l'inégalité de Hölder.

**Lemme 4.4.**—*Soit  $p \in [1, +\infty[$  et  $v$  un champ de vitesse à divergence nulle et à tourbillon  $\omega$  dans  $L^p$ . Alors il existe une constante  $C$  universelle telle que, si  $x \notin \text{Supp}(\omega)$ ,*

$$|\nabla v(x)| \leq Cp \|\omega\|_{L^p} \left( d(x, \text{Supp}(\omega)) \right)^{-2/p}.$$

On obtient alors

$$(4.6) \quad |\nabla(v_{2^{(q+1)\beta}h} - v_{2^{q\beta}h})(x)| \leq C \|\phi_{2^{(q+1)\beta}h}\omega - \phi_{2^{q\beta}h}\omega\|_{L^1} \left( d(x, \text{Supp}(\phi_{2^{(q+1)\beta}h} - \phi_{2^{q\beta}h})) \right)^{-2}.$$

Comme  $\Psi$  et  $\Psi^{-1}$  sont dans  $C^\beta$ , on a

$$(4.7) \quad \forall z_0 \in \mathbb{R}^2, \forall r > 0, B\left(\Psi(z_0), \left(\frac{r}{\|\Psi^{-1}\|_\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right) \subset \Psi(B(z_0, r)).$$

D'après (4.7),  $\text{Supp}(\phi_{2^{(q+1)\beta}h} - \phi_{2^{q\beta}h}) \subset \mathbb{R}^2 \setminus B(0, 2^q h^{1/\beta} \mathcal{R})$ , d'où  $d(x, \text{Supp}(\phi_{2^{(q+1)\beta}h} - \phi_{2^{q\beta}h})) \geq 2^q |x|$  pour  $q \in \mathbb{N}$ . D'après (4.6) et la définition de  $\mathcal{N}_\phi^\alpha(\omega)$ , il vient finalement

$$|\nabla(v_{2^{(q+1)\beta}h} - v_{2^{q\beta}h})(x)| \leq C(2^{(q+1)\beta}h)^{2+\alpha} \mathcal{N}_\phi^\alpha(\omega) (2^q |x|)^{-2} \leq C \frac{(2^{q+2}|x|)^{(2+\alpha)\beta-2}}{\mathcal{R}^{(2+\alpha)\beta}} \mathcal{N}_\phi^\alpha(\omega).$$

En revenant à la définition de  $q_1$  et de  $h_1$ , on trouve après calculs,

$$(4.8) \quad \left| \sum_{q=0}^{q_1-1} \nabla(v_{2^{(q+1)\beta}h} - v_{2^{q\beta}h})(x) \right| \leq \left( \frac{C2^\alpha}{\beta - \bar{\alpha}} \right) \mathcal{N}_\phi^\alpha(\omega).$$

Le terme  $\nabla(v - v_{2^{q_1\beta}h})(x)$  s'estime à l'aide de la proposition 4.1. En tenant compte de (4.4) et (4.8), on trouve finalement que, pour  $|x| \leq \mathcal{R}^{\frac{\beta}{\beta-\bar{\alpha}}}/2$ ,

$$|\nabla v(x)| \leq \frac{Ca2^\alpha}{(\beta - \bar{\alpha})\sigma^2} \mathcal{N}_\phi^\alpha(\omega) \log\left( e + \frac{N_\phi^\alpha(\omega) \sup_{\lambda \in \Lambda} \|\tilde{X}_\lambda\|_\epsilon + N_\sigma(X, \omega)}{R' \|\psi^{-1}\|_\beta^{-1} I_\gamma(X) N_\phi^\alpha(\omega)} \right).$$

La majoration de  $\nabla v$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus B(0, \mathcal{R}^{\beta/(\beta-\bar{\alpha})}/2)$  résulte de la proposition 4.1.  $\square$

## 5 Un résultat de propagation de structures effilées

Sachant qu'*a priori*, le gradient de la vitesse est borné, il serait tentant d'appliquer le schéma de preuve suivant : régulariser les données initiales, démontrer des estimations uniformes pour ces solutions régularisées portant notamment sur la géométrie que l'on veut propager (c'est ici qu'interviennent les estimations uniformes sur le gradient de la vitesse), puis passer à la limite.

Malheureusement, l'étape de contrôle des normes des solutions régularisées est délicate. En effet, les éléments de  $C_\alpha^{\sigma, \epsilon}(X)$  se prêtent mal à la régularisation car, conformément au principe d'incertitude, on perd alors les propriétés d'effilement près d'un point, ce qui empêche d'estimer le gradient de la vitesse régularisée, *via* le théorème 4.1.

C'est pourquoi nous avons opté pour une autre approche. On sait déjà d'après le théorème de Yudovitch, que (E) a une unique solution  $v$  qui est en fait quasi-lipschitzienne. De plus, d'après la remarque 2.4,  $v$  est à gradient borné localement en dehors de la singularité. Tout se ramène donc à montrer que  $v$  est à gradient borné sur  $\mathbb{R}^2$  entier et propage la géométrie effilée initiale.

La première étape de la démonstration consiste à prouver que cette géométrie est effectivement transportée sans perte de régularité et jusqu'au temps  $T$  si l'on sait de plus que  $\nabla v \in L^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^2)$ . Ceci fait l'objet de la proposition 5.1. Nous démontrons ensuite dans le lemme 5.1, l'existence d'un  $\eta > 0$  que l'on peut minorer à l'aide des données initiales, et tel que  $\nabla v \in L^\infty([0, \eta] \times \mathbb{R}^2)$ . Pour cela, on remarque que, comme le tourbillon est dans  $L^a \cap L^\infty$ , on peut obtenir des estimations uniformes de la norme  $C_\star^0$  des solutions régularisées. Grâce aux estimations à perte de la partie 3,

on obtient des estimations uniformes à temps petit et avec perte de la solution régularisée et on peut appliquer le théorème 4.1 sur un petit intervalle de temps.

La dernière étape consiste alors à conjuguer la proposition 5.1 et le lemme 5.1 pour “pousser” le temps de persistance de la géométrie effilée initiale.

**Première étape :** Elle est résumée dans la proposition suivante qui se démontre aisément à l’aide du théorème 4.1 et de la remarque 3.2.

**Proposition 5.1.**—*Soit  $T > 0$  et  $v_0$  un champ de vecteurs vérifiant les hypothèses du théorème 2.1. Supposons que la solution  $v$  de (E) vérifie  $\nabla v \in L^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^2)$ . Soit  $(X_{t,\lambda})_{\lambda \in \Lambda}$  la famille transportée de  $(X_{0,\lambda})_{\lambda \in \Lambda}$  par le flot de  $v$ ,  $\phi_{t,h} = \phi_{0,h} \circ \psi_t^{-1}$  et  $x_t = \psi_t(x_0)$ . Alors pour tout temps  $t \in [0, T]$ , la géométrie  $(\phi_t, X_t)$  reste  $(1, \epsilon)$ -effilée en  $x_t$ , et  $\omega_t \in C_{\alpha}^{\sigma, \epsilon}(X_t)$ . De plus, il existe une constante  $C$  ne dépendant que de  $\epsilon$ , de  $\alpha$ , de  $\sigma$  et de  $a$ , et telle que pour tout  $t \in [0, T]$ , on ait*

$$\|\nabla v(t)\|_{L^\infty} \leq C L_0 N_{\phi_0}^\alpha(\omega_0) e^{C t N_{\phi_0}^\alpha(\omega_0)}$$

$$\|\omega_t\|_{\alpha, X_t}^{\sigma, \epsilon} \leq C \|\omega_0\|_{\alpha, X_0}^{\sigma, \epsilon} e^{C L_0 (e^{C t N_{\phi_0}^\alpha(\omega_0)} - 1)}$$

avec  $L_0 = \log\left(e + \frac{\|\nabla \Psi^{-1}\|_{L^\infty} \|\omega_0\|_{\alpha, X_0}^{\sigma, \epsilon}}{R' N_{\phi_0}^\alpha(\omega_0)}\right)$  et  $R', \Psi$  vérifiant les conditions du théorème 4.1.

**Deuxième étape :** Il existe  $\eta > 0$  tel que  $\nabla v \in L^\infty([0, \eta] \times \mathbb{R}^2)$ .

Ce résultat est assuré par la remarque 2.4 et le lemme suivant.

**Lemme 5.1.**—*Soit  $v_0$  un champ de vecteurs de  $\mathcal{E}$  vérifiant les hypothèses du théorème 2.1. Notons  $v$  la solution de Yudovitch de (E) avec donnée initiale  $v_0$ . Soit  $K$  une fonction croissante continue positive telle que, si  $x_t = \psi_t(x_0)$ , on ait pour tout temps  $t$ ,*

$$(5.1) \quad \sup_{h \in ]0, 1]} \frac{\|\nabla v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus B(x_t, h))}}{1 - \log h} \leq C_1 \|\omega_0\| K(t).$$

Alors il existe une constante universelle  $C$  telle que l’on ait  $\nabla v \in L^\infty([0, \eta] \times \mathbb{R}^2)$  pour

$$(5.2) \quad \eta = \min\left(\frac{\sigma^2}{2C\|\omega_0\|}, \frac{1}{2C_1\|\omega_0\|} \log\left(1 + \frac{\epsilon^2 - \bar{\alpha}\epsilon - \bar{\alpha}\sigma - \sigma\epsilon}{(2 + K(T))(\epsilon + \sigma)\bar{\alpha}}\right)\right).$$

**Preuve :** On montre d’abord que sur un intervalle de temps  $[0, T]$  avec  $T$  suffisamment petit, la géométrie  $(\phi_t, X_t)$  est  $(\beta_t, \gamma_t, \epsilon_t)$ -effilée en  $x_t$  avec des paramètres d’effilement  $\gamma_t$  et de régularité  $\beta_t$  et  $\epsilon_t$  qui se dégradent au cours du temps (plus précisément,  $\gamma_t$  est une fonction croissante et continue de  $t$  valant 1 en 0,  $\beta_t$  est décroissante continue valant 1 en 0 et  $\epsilon_t$  est décroissante continue et vaut  $\epsilon$  en 0). En outre,  $\omega_t \in C_{\alpha}^{\sigma_t, \epsilon_t}(X_t)$ . Ces résultats font l’objet du lemme 5.2 et permettront ensuite de montrer, *via* le théorème 4.1, que  $\nabla v(t)$  est borné, tant que les conditions

$$(5.3) \quad \epsilon_t > \bar{\alpha}, \quad 0 < \frac{\gamma_t}{\beta_t} \leq \frac{1}{\bar{\alpha}} \left( \frac{\epsilon_t - \sigma_t}{1 + \frac{\sigma_t}{\epsilon_t}} \right) \quad \text{et} \quad 0 < \sigma_t < \epsilon_t \left( \frac{\epsilon_t - \bar{\alpha}}{\epsilon_t + \bar{\alpha}} \right)$$

sont satisfaites, donc sur un petit intervalle de temps non vide.

**Lemme 5.2.**—*Sous les hypothèses du lemme précédent, il existe une constante universelle  $C$  telle que, si l’on pose  $T = \frac{\sigma^2}{2C\|\omega_0\|}$  et*

$$\beta_t = e^{-C_1 \|\omega_0\| t}, \quad \gamma_t = 1 + (K(t) + 1)(e^{C_1 \|\omega_0\| t} - 1), \quad \epsilon_t = \epsilon - \frac{C}{\sigma} \|\omega_0\| t \quad \text{et} \quad \sigma_t = \sigma - \frac{C}{\sigma} \|\omega_0\| t,$$

la géométrie  $(\phi_t, X_t)$  reste  $(\beta_t, \gamma_t, \epsilon_t)$ -effilée pour tout  $t \in [0, T]$ . De plus, on a

$$(5.4) \quad \|\tilde{X}_{t,\lambda}\|_{\epsilon_t} \leq C \left( \|\tilde{X}_{0,\lambda}\|_{\epsilon} + \frac{\|X_{0,\lambda}(x, D)\omega_0\|_{\epsilon-1}}{\|\omega_0\|} \right),$$

$$(5.5) \quad \|X_{t,\lambda}(x, D)\omega_t\|_{\epsilon_t-1} \leq 2\|X_{0,\lambda}(x, D)\omega_0\|_{\epsilon-1},$$

$$(5.6) \quad \mathcal{N}_{\sigma_t}(X_t, \omega_t) \leq 2\mathcal{N}_{\sigma}(X_0, \omega_0),$$

$$(5.7) \quad \mathcal{N}_{\phi_t}^{\alpha}(\omega_t) = \mathcal{N}_{\phi_0}^{\alpha}(\omega_0),$$

$$(5.8) \quad I_{\gamma_t}(X_t) \geq \frac{I_1(X_0)}{L(t)} \text{ avec } L(t) = e^{C(1+K(t))(e^{3C_1\|\omega_0\|^t} - 1)},$$

où  $C$  est une constante ne dépendant que de  $\epsilon$  et de  $\sigma$ .

### Démonstration :

Elle exploite d'une part que  $|\nabla v(t, x)|$  croît comme  $(1 - \log|x - x_t|)$ , ce qui entraîne une dégradation de l'indice  $\gamma_t$ , d'autre part que  $v$  est seulement quasi-lipschitzien *a priori*, ce qui, d'après le lemme 2.5, provoque une perte linéaire de régularité dans les estimations sur les champs de vecteurs transportés. Comme de plus le flot  $\psi$  de  $v$  perd aussi de la régularité au cours du temps (voir la relation (5.9) ci-dessous), on a également une décroissance de l'indice  $\beta$ .

#### 1) Conservation des hypothèses de type effilé :

Rappelons d'abord que, d'après [Ch2] par exemple, le flot  $\psi$  de  $v$  vérifie

$$(5.9) \quad \left( \frac{|x - y|}{e} \leq e^{-e^{C_1\|\omega_0\|^t}} \right) \Rightarrow \left( \frac{|\psi_t(x) - \psi_t(y)|}{e} \leq \left( \frac{|x - y|}{e} \right)^{e^{-C_1\|\omega_0\|^t}} \right).$$

où  $C_1$  est une constante universelle. Pour  $|x - x_t| \leq e^{1 - e^{2C_1\|\omega_0\|^t}}$ , on a donc d'après (5.9),

$$\forall \tau' \in [0, t], |\psi_{\tau'}^{-1}(x) - \psi_{\tau'}^{-1}(x_t)| \geq e \left( \frac{|x - x_t|}{e} \right)^{e^{C_1\|\omega_0\|^{\tau'}}}.$$

En revenant à la définition du flot et en intégrant, on montre que

$$|X_{0,\lambda}(\psi_t^{-1}(x))| \leq |X_{t,\lambda}(x)| e^{\int_0^t |\nabla v(\tau, \psi_{\tau}(\psi_t^{-1}(x)))| d\tau}.$$

En utilisant (5.1), on trouve donc  $|X_{0,\lambda}(\psi_t^{-1}(x))| \leq |X_{t,\lambda}(x)| e^{K(t)(1 - \log|x - x_t|)(e^{C_1\|\omega_0\|^t} - 1)}$  puis

$$I_1(X_0) \leq \left( \inf_{\substack{x \in \text{Supp } \phi_{t,1} \\ |x - x_t| \leq \exp(1 - \exp(2C_1\|\omega_0\|^t))}} \sup_{\lambda \in \Lambda} \frac{|X_{t,\lambda}(x)|}{|x - x_t|^{\gamma_t}} \right) e^{(K(t) + e^{C_1\|\omega_0\|^t})(e^{C_1\|\omega_0\|^t} - 1)},$$

avec  $\gamma_t = 1 + (K(t) + 1)(e^{C_1\|\omega_0\|^t} - 1)$ . L'inégalité (5.8) en découle.

#### 2) Évolution de la régularité de la famille $X_{t,\lambda}$ :

On pose  $v_{n,0} = S_n v_0$ . Soit  $v_n$  la solution correspondante de (E) et  $\psi_n$  son flot. On fixe  $\lambda \in \Lambda$  et, pour alléger les notations, on omet l'indice  $\lambda$  dans cette partie. On note alors  $X_n$  le champ de vecteurs transporté de  $X_{0,\lambda}$  par  $\psi_n$ . En utilisant le lemme 3.1 et les relations

$$(\partial_t + v_n \cdot \nabla)X_n(x, D)\omega_n = 0 \quad \text{et} \quad (\partial_t + v_n \cdot \nabla) \text{div } X_n = 0,$$

on obtient l'existence d'une constante universelle  $C$  telle que, pour  $t \in [0, T]$ , on ait

$$(5.10) \quad \|\operatorname{div} X_{t,n}\|_{\epsilon_t} \leq 2\|\operatorname{div} X_0\|_{\epsilon},$$

$$(5.11) \quad \|X_{t,n}(x, D)\omega_{t,n}\|_{\epsilon_t-1} \leq 2\|X_0(x, D)\omega_0\|_{\epsilon-1}.$$

Pour estimer  $X_n$ , on part de la relation  $(\partial_t + v_n \cdot \nabla)X_n = X_n(x, D)v_n$  et on montre à l'aide de techniques de calcul paradifférentiel, que  $X_n(x, D)v_n = g_{1,n} + g_{2,n}$  avec

$$\begin{aligned} \|g_{1,n}\|_{\epsilon_t} &\leq \frac{C}{\sigma(1-\epsilon)} (\|\omega_0\| \|X_n\|_{\epsilon_t} + \|X_n(x, D)\omega_n\|_{\epsilon_t-1}), \\ \|\Delta_q g_{2,n}\|_{L^\infty} &\leq C(q+2)2^{-q\epsilon_t} \|\omega_0\| \|X_n\|_{\epsilon_t}. \end{aligned}$$

En appliquant le lemme 3.1 puis le lemme de Gronwall, il vient

$$(5.12) \quad \|X_n(t)\|_{\epsilon_t} \leq C \left( \|X_0\|_{\epsilon} + \frac{\|X_0(x, D)\omega_0\|_{\epsilon-1}}{\|\omega_0\|} \right)$$

pour  $t \in [0, T]$ .

Comme  $\omega_0 \in L^a \cap L^\infty$  et  $v_0 \in \sigma + L^2$ ,  $v_n$  est une suite de Cauchy de  $L_{loc}^\infty(\mathbb{R}; \sigma + L^2)$ . On conclut alors par interpolation grâce aux estimations (5.10), (5.11) et (5.12) (voir [D2]).

### 3) Évolution de la régularité de la famille $(\phi_{t,h})_{h>0}$ .

Soient  $\Psi$  et  $g$ , deux applications vérifiant la condition  $i)$  de la définition 2.1 pour  $(\phi_{0,h})_{h>0}$ . L'application  $\Psi$  est donc bilipschitzienne, vérifie  $\Psi(0) = x_0$  et on a  $\phi_{0,h}(x) = g(\Psi^{-1}(x)/h)$ .

Si l'on pose  $\Psi_t = \psi_t \circ \Psi$ ,  $\Psi_t$  est visiblement bijective de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$ , de classe  $C^{\exp(-C_1\|\omega_0\|t)}$  ainsi que son inverse, vérifie  $\Psi_t(0) = x_t$  et  $\phi_{t,h}(x) = g(\Psi_t^{-1}(x)/h)$ .

On en déduit que  $(\phi_{t,h})_{h>0}$  vérifie la condition  $i')$  de la remarque 2.1 avec l'indice  $\beta_t = e^{-C_1\|\omega_0\|t}$ . La géométrie  $(\phi_t, X_t)$  est donc  $(\beta_t, \gamma_t, \epsilon_t)$ -effilée en  $x_t$ .

### 4) Conservation des hypothèses d'effilement sur le tourbillon

Les fonctions  $\phi_{t,h}$  sont transportées par le flot et le tourbillon est constant le long des lignes de flot. L'incompressibilité assure donc que  $\mathcal{N}_{\phi_t}^\alpha(\omega_t) = \mathcal{N}_{\phi_0}^\alpha(\omega_0)$ .

De même, comme  $(\partial_t + v \cdot \nabla)(X_t(x, D)\omega_{t,h}) = 0$ , le lemme 3.1 donne  $\mathcal{N}_{\sigma_t}(X_t, \omega_t) \leq 2\mathcal{N}_\sigma(X_0, \omega_0)$ . Ceci achève la démonstration du lemme 5.2.  $\square$

Fin de la preuve du lemme 5.1 : Grâce au lemme 5.2, on peut appliquer le théorème 4.1 et donc prouver que  $\nabla v(t)$  est borné pour tout temps  $t \in [0, T]$  tel que la condition (5.3) soit satisfaite. On vérifie aisément que c'est le cas dès que

$$(5.13) \quad t \in [0, T] \quad \text{et} \quad \frac{\gamma_t}{\beta_t} \left( 1 + \frac{\sigma}{\epsilon} \right) \leq \frac{\epsilon - \sigma}{\bar{\alpha}}.$$

Un simple calcul montre alors que, si l'on définit  $\eta$  comme en (5.2), l'inégalité (5.13) est vérifiée pour tout  $t \in [0, \eta]$ . On conclut à l'aide du théorème 4.1.  $\square$

**Troisième étape :** On pousse le temps de persistance de la géométrie effilée.

Grâce à la réversibilité en temps de (E), il suffit de montrer que  $\nabla v \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^2)$ . Supposons par l'absurde que  $\nabla v \notin L_{loc}^\infty(\mathbb{R}; L^\infty(\mathbb{R}^2))$ . Soit  $T^*$ , le plus petit temps tel que  $\nabla v \notin L^\infty([0, T^*] \times \mathbb{R}^2)$ . Rappelons que d'après (2.4), la condition (5.1) est satisfaite avec  $K(t) = Ce^{C_0 e^{C\|\omega_0\|t}}$ . On a donc  $T^* > 0$ . Définissons

$$\tilde{\eta} = \min \left( T, T^*, \frac{1}{2C_1\|\omega_0\|} \log \left( 1 + \frac{\epsilon^2 - \bar{\alpha}\epsilon - \bar{\alpha}\sigma - \sigma\epsilon}{(2 + K(T + T^*))(\epsilon + \sigma)\bar{\alpha}} \right) \right).$$

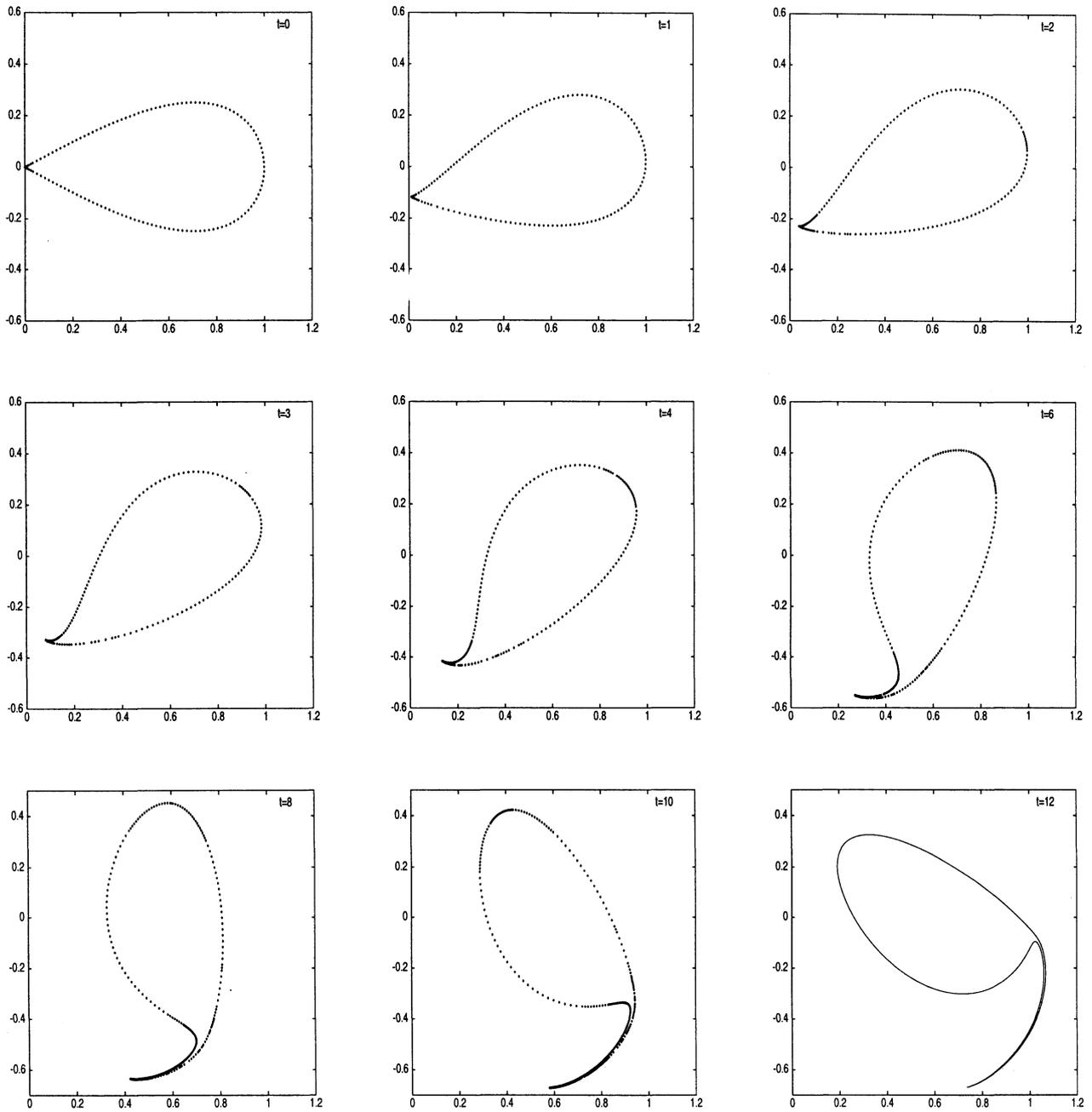
Posons  $T_0 = T^* - \tilde{\eta}/2$ ,  $\tilde{v}(t, x) = v(t + T_0, x)$  et  $\tilde{K}(t) = K(t + T_0)$ . En posant  $\tilde{X}_{0,\lambda} = X_{T_0,\lambda}$  et en utilisant la proposition 5.1, on constate que les hypothèses du lemme 5.1 sont vérifiées : on a bien  $\tilde{\omega}_0 \in C_{\alpha}^{\sigma,\epsilon}(\tilde{X}_0)$ . Une simple application du lemme 5.1 donne donc  $\nabla \tilde{v} \in L^{\infty}([0, \eta] \times \mathbb{R}^2)$  avec

$$\eta = \min\left(T, \frac{1}{2C_1\|\omega_0\|} \log\left(1 + \frac{\epsilon^2 - \bar{\alpha}\epsilon - \bar{\alpha}\sigma - \sigma\epsilon}{(2 + \tilde{K}(T))(\epsilon + \sigma)\bar{\alpha}}\right)\right).$$

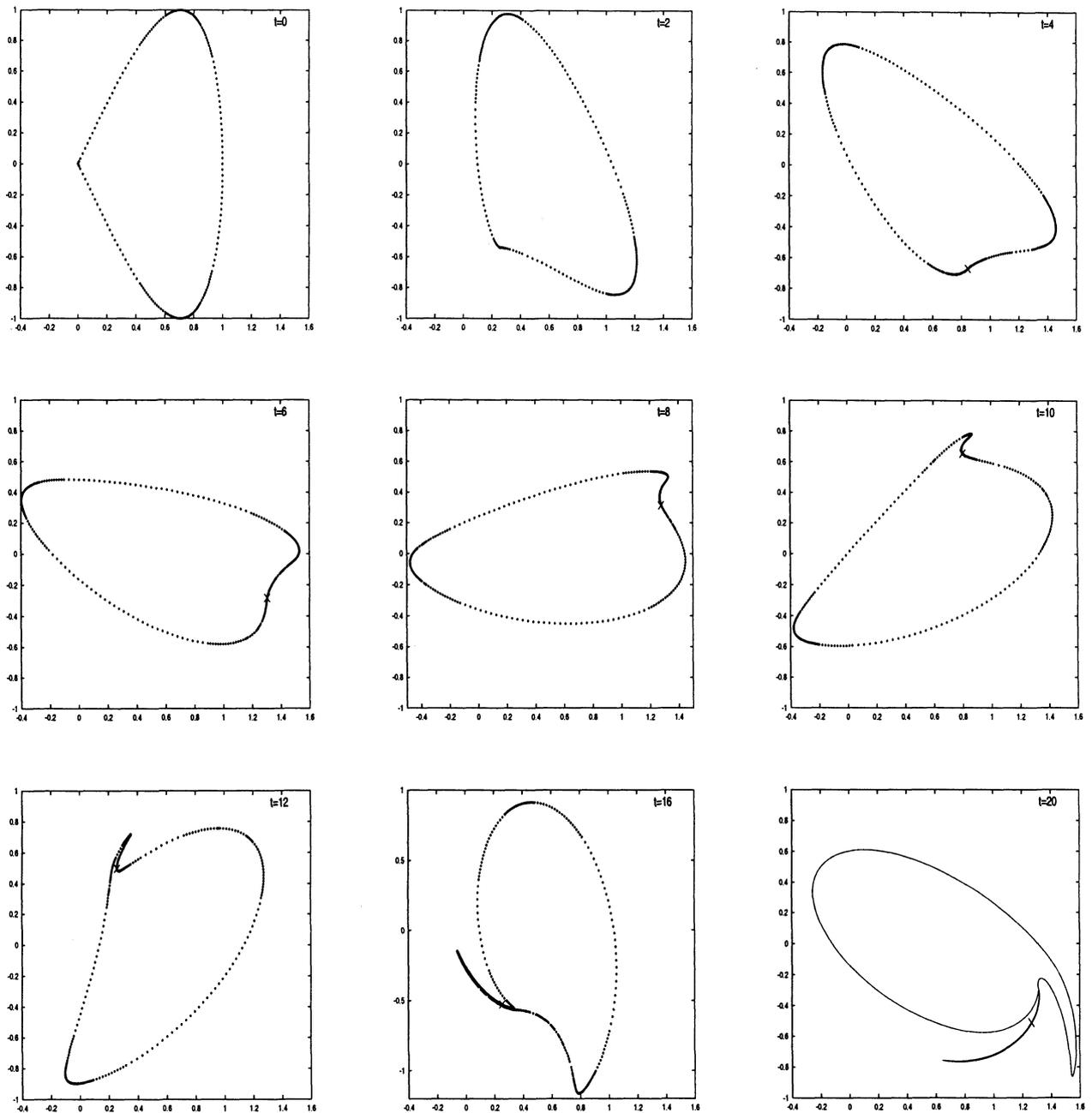
Comme  $\tilde{K}(T) \leq K(T + T^*)$ , on a  $\eta \geq \tilde{\eta}$ , et donc en particulier  $\nabla v \in L^{\infty}([0, T^* + \eta/2] \times \mathbb{R}^2)$ . Ceci contredit  $\nabla v \notin L^{\infty}([0, T^*]; L^{\infty}(\mathbb{R}^2))$ .  $\square$

### Références bibliographiques

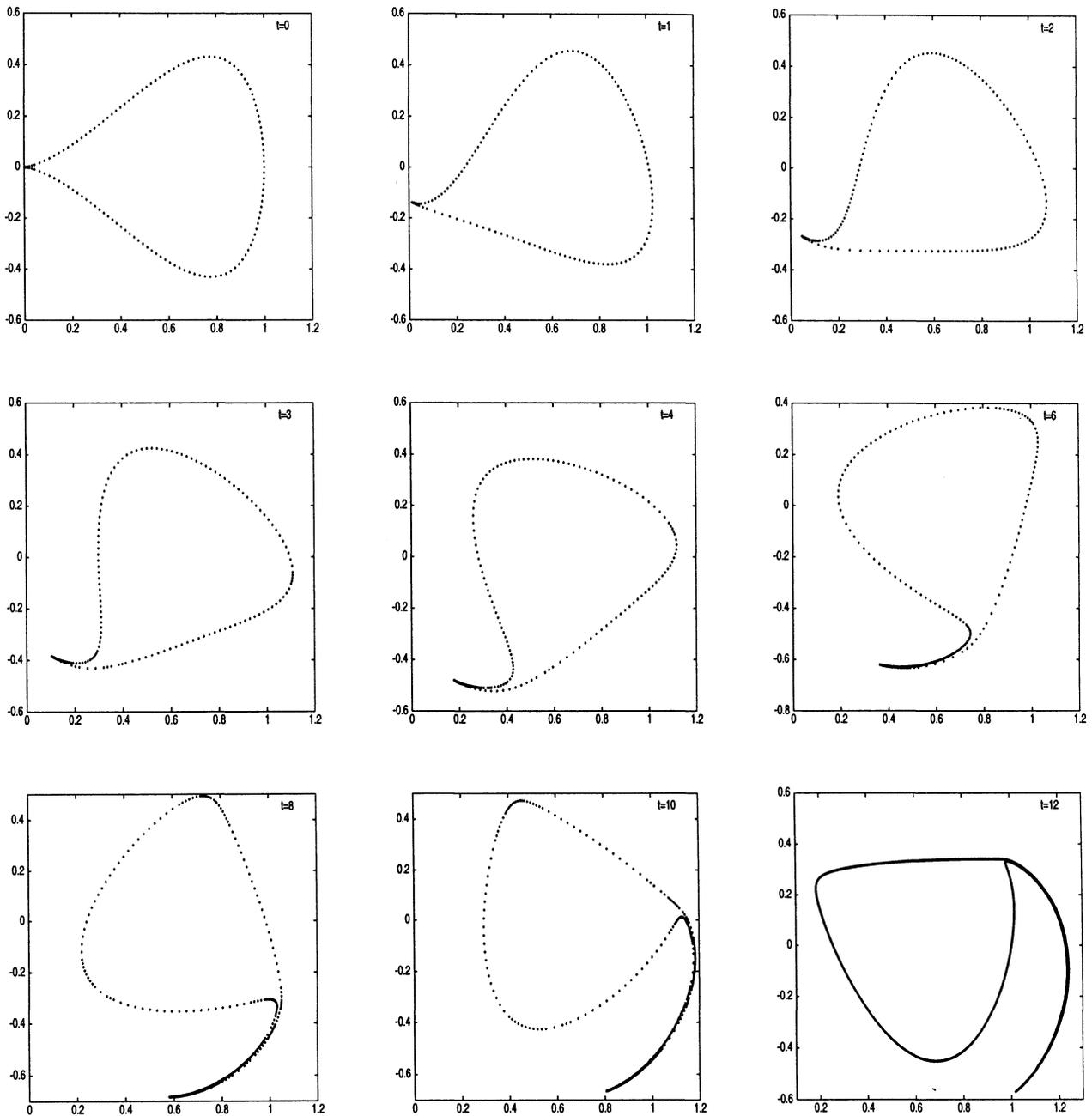
- [A] S. Alinhac : Interaction d'ondes simples pour des équations complètement non linéaires, *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, **21**, pages 91-133 (1988).
- [BCh] H. Bahouri et J.-Y. Chemin : Équations de transport relatives à des champs de vecteurs non lipschitziens et mécanique des fluides, *Archiv for Rational Mechanics and Analysis*, **127**, pages 159-182 (1994).
- [Bo] J.-M. Bony : Propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires, *Séminaire EDP de l'École Polytechnique* (1979-1980).
- [Bu] T. Buttke : The observation of singularities in the boundary of patches of constant vorticity, *Physical fluids A*, **1**(7), pages 1283-1285 (1989).
- [Ch1] J.-Y. Chemin : Calcul paradifférentiel précisé et application à des équations aux dérivées partielles non semi-linéaires, *Duke Mathematical Journal*, **56**, pages 431-469 (1988).
- [Ch2] J.-Y. Chemin : Fluides parfaits incompressibles, *Astérisque*, **230** (1995).
- [CD] A. Cohen et R. Danchin : Multiscale approximation of vortex patches, soumis au *SIAM Journal on Applied Mathematics*.
- [D1] R. Danchin : Évolution temporelle d'une poche de tourbillon singulière, à paraître dans *Communications in Partial Differential Equations*.
- [D2] R. Danchin : Évolution d'une singularité de type cusp dans une poche de tourbillon. Prépublication du *Centre de Mathématiques de l'École Polytechnique* (1997).
- [D3] R. Danchin : Analyse numérique et harmonique d'un problème de mécanique de fluide, thèse de doctorat de l'École Polytechnique (1996).
- [DD] G. Deslauriers et S. Dubuc : Symmetric iterative interpolation processes, *Constructive Approximation*, **5**, pages 49-68 (1989).
- [J] S. Jaffard : Pointwise smoothness, two-microlocalization and wavelet coefficients, *Publicacions Matemàtiques*, **35**, pages 155-168 (1991).
- [T] H. Triebel : Theory of function spaces, Birkhauser (1983).
- [W] W. Wolibner : Un théorème sur l'existence du mouvement plan d'un fluide parfait, homogène, incompressible, pendant un temps infiniment long, *Mathematische Zeitschrift*, **37**, pages 698-726 (1933).
- [Y] V. Yudovitch : Non stationary flows of an ideal incompressible fluid, *Zurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoy fiziki*, **3**, pages 1032-1066 (1963).
- [ZHR] N. Zabusky, M. Hughes et K. Roberts : Contour dynamics for the Euler equations in two dimensions, *Journal of computational physics*, **30**, pages 96-106 (1979).



**Fig. 1 :** Évolution d'un angle aigu dans une poche de tourbillon. On a choisi  $\Delta t=0.04$  et  $\epsilon=10^{-6}$ . Pour  $t=0, 1, 2, 3, 4, 6, 8$  et  $10$ , la courbe a été représentée à l'aide des points effectivement utilisés pour calculer l'évolution. Pour  $t=12$ , on a pris une grille fine de 32768 points.



**Fig. 2 :** Évolution d'un angle obtus dans une poche de tourbillon. On a choisi  $\Delta t=0.04$  et  $\epsilon=10^{-6}$ . Pour  $t=0, 2, 4, 6, 8, 10, 12$  et  $16$ , la courbe a été représentée à l'aide des points effectivement utilisés pour calculer l'évolution. Pour  $t=20$ , on a pris une grille fine de 32768 points. Remarquer l'émergence d'une structure effilée dans une zone où la courbe devrait être régulière. La véritable singularité, quant à elle, semble avoir disparu. Elle est matérialisée par une croix.



**Fig. 3** : Évolution d'un cusp dans une poche de tourbillon. On a choisi  $\Delta t=0.04$  et  $\epsilon=10^{-5}$ . Pour  $t=0, 1, 2, 3, 4, 6, 8$  et  $10$ , la courbe a été représentée à l'aide des points effectivement utilisés pour calculer l'évolution. Pour  $t=12$ , on a pris une grille fine de 32768 points. Remarquer les légères oscillations près de la singularité pour  $t=10$ . Le calcul à  $t = 12$  a été fait avec un seuil  $\epsilon=10^{-6}$ . Plus aucune oscillation n'est visible.