THIERRY CAZENAVE

Solutions self-similaires de l'équation de Schrödinger non-linéaire

Journées Équations aux dérivées partielles (1997), p. 1-17

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1997____A2_0>

Solutions self-similaires de l'équation de Schrödinger non-linéaire

Thierry Cazenave[1] et Fred B. Weissler[2]

[1] Analyse Numérique—URA CNRS 189
Université Pierre et Marie Curie
4, place Jussieu
75252 Paris Cedex 05 France
e-mail: cazenave@ccr.jussieu.fr

[2] Laboratoire Analyse Géométrie et Applications
URA CNRS 742
Institut Galilée–Université Paris XIII
Avenue J.-B. Clément
93430 Villetaneuse France
e-mail: weissler@math.univ-paris13.fr

1. Introduction. L'objet de cet article est de présenter des résultats récents [6,7] concernant l'existence de solutions globales, de solutions self-similaires, et de solutions asymptotiquement self-similaires, de l'équation de Schrödinger non-linéaire

$$iu_t + \Delta u = \gamma |u|^\alpha u, \tag{1.1}$$

$$u(0,x) = \varphi(x). \tag{1.2}$$

Ici, $u = u(t,x)$ est une fonction $[0,\infty) \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$, γ est un paramètre réel, $\alpha > 0$, et la condition initiale $\varphi(x)$ est une fonction $\mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$.

Il est clair que si $u(t,x)$ est une solution de (1.1), alors pour tout $\lambda > 0$, u_λ défini par

$$u_\lambda(t,x) = \lambda^{\frac{2}{\alpha}} u(\lambda^2 t, \lambda x), \tag{1.3}$$

est aussi une solution de (1.1). La solution u est self-similaire si $u = u_\lambda$ pour tout $\lambda > 0$. L'approche habituelle pour étudier les solutions self-similaires de (1.1) consiste d'abord à observer que $u = u_\lambda$ pour tout $\lambda > 0$ si et seulement si u est de la forme

$$u(t,x) = t^{-\frac{1}{\alpha}} f\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right), \tag{1.4}$$

pour une certaine fonction $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$, appelée le profil de la solution self-similaire. L'équation (1.1) pour u correspond à une équation elliptique non-linéaire pour le profil f, qu'on peut alors étudier. Cette équation pour f se réduit à une équation différentielle ordinaire si f est radial. Pour des résultats concernant l'étude de solutions self-similaires de (1.1) de ce point de vue, on pourra consulter [24, 29, 30].

Récemment, est apparue une nouvelle méthode pour l'étude des solutions self-similaires (dans le contexte du système de Navier-Stokes) dans les travaux de Giga et Miyakawa [19], Cannone [1] et Cannone et Planchon [2]. L'idée essentielle consiste à chercher des données initiales φ pour lesquelles la solution correspondante est self-similaire. Formellement, si $u(t,x)$ est une solution self-similaire avec un profil f, alors

$$\lim_{t\downarrow 0} u(t,x) = \lim_{t\downarrow 0} t^{-\frac{1}{\alpha}} f\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) = |x|^{-\frac{2}{\alpha}} \lim_{t\downarrow 0} \left(\frac{|x|}{\sqrt{t}}\right)^{\frac{2}{\alpha}} f\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) = |x|^{-\frac{2}{\alpha}} \lim_{r\to\infty} r^{\frac{2}{\alpha}} f\left(r\frac{x}{|x|}\right).$$

Par conséquent, si

$$\lim_{r\to\infty} r^{\frac{2}{\alpha}} f\left(r\frac{x}{|x|}\right) = \Omega\left(\frac{x}{|x|}\right),$$

existe (et donc ne dépend que de $\frac{x}{|x|}$), alors la donnée initiale φ de la solution self-similaire u est donnée par

$$\varphi(x) = \Omega\left(\frac{x}{|x|}\right) |x|^{-\frac{2}{\alpha}}. \tag{1.5}$$

On peut retrouver cette relation en observant que si u est une solution self-similaire de (1.1) avec la donnée initiale φ, alors la relation $u = u_\lambda$ pour tout $\lambda > 0$ implique $\varphi_\lambda(x) := \lambda^{\frac{2}{\alpha}}\varphi(\lambda x) = \varphi(x)$ pour tout $\lambda > 0$. En d'autres termes, φ est homogène de degré $-\frac{2}{\alpha}$, et donc vérifie (1.5).

Nous montrons que le problème (1.1)–(1.2) est globalement bien posé pour des données initiales petites dans un espace de Banach assez grand pour contenir des fonctions homogènes du type (1.5). La technique que nous utilisons pour cela remonte (à notre connaissance) à Fujita et Kato [13, 27] dans contexte du système de Navier-Stokes. (Le changement d'échelle pour le système de Navier-Stokes est donné par (1.3) avec $\alpha = 2$.) On peut expliquer brièvement la méthode comme suit: si $(B, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach tel que $\|\varphi_\lambda\| = \|\varphi\|$ pour tout $\lambda > 0$, alors il est raisonnable d'espérer montrer que tout $\varphi \in B$ de norme assez petite produit une solution globale. Fujita et Kato [13, 27] ont établi un tel résultat pour $\|\varphi\| = \|(-\Delta)^{\frac{1}{4}}\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$. Kato [25] a ensuite montré un résultat semblable dans $L^N(\mathbb{R}^N)$. Giga [14] et Giga et Miyakawa [18, 19] ont développé ces idées en étudiant le système de Navier-Stokes dans des espaces fractionnaires sur L^r et dans des espaces de Morrey de mesures. Très récemment, Cannone [1] et Cannone et Planchon [2] ont appliqué ces mêmes idées au système de Navier-Stokes dans des espaces de Besov d'ordre négatif. Or, les espaces de Morrey et de Besov utilisés par ces auteurs contiennent des données homogènes du type (1.5).

On se heurte à une sérieuse difficulté lorsqu'on cherche à appliquer ces techniques à l'équation de Schrödinger non-linéaire. En effet, les normes de Besov sont équivalentes à des normes du type $\|\varphi\| = \sup\limits_{t>0} t^\beta \|e^{t\Delta}\varphi\|_{L^p}$, et ces dernières normes sont bien adaptées pour montrer l'existence globale pour le système de Navier-Stokes. Pour (1.1), il est relativement facile de montrer l'existence de solutions globales pour des données φ petites pour une norme du type $\|\varphi\| = \sup\limits_{t>0} t^\beta \|S(t)\varphi\|_{L^p}$, où $(S(t))_{t\in\mathbb{R}}$ désigne le groupe de Schrödinger. Comme ces normes ne semblent pas avoir d'équivalents connus, il n'est pas clair qu'elles puissent être finies pour des fonctions homogènes. Dans [6], nous avons montré que $\sup\limits_{t>0} t^\beta \|S(t)\varphi\|_{L^p} < \infty$ pour une certaine classe de fonctions homogènes, et construit une classe correspondante de solutions self-similaires. Dans [7], nous avons obtenu des résultats semblables en utilisant une norme du type $\|\varphi\| = \sup\limits_{t>0} t^\mu \|\nabla S(t)\varphi\|_{L^q}$.

Une fois qu'on a construit des solutions self-similaires par cette méthode, il est naturel de les comparer avec les solutions H^1 dont on connait l'existence depuis les travaux de Ginibre et Velo [20]. On montre alors, au moins pour une certaine plage de α, que tout une classe de solutions H^1 sont asymptotiquement self-similaires. En d'autre termes, la différence entre une telle solution et l'une des solutions self-similaires tend vers 0 dans $L^{\alpha+2}(\mathbb{R}^N)$ plus rapidement que chacune d'entre elles séparément.

On peut aussi considérer l'équation déduite de (1.1) par la transformation pseudo-conforme, et par un traitement analogue on montre l'existence de solutions asymptotiquement self-similaires de cette équation. En termes de l'équation (1.1), cela montre l'existence de solutions définies pour tout $t < 0$ et qui ont une explosion self-similaire en $t = 0$.

Notons que les solutions globales, et en particulier les solutions self-similaires, de l'équation de la chaleur non-linéaire

$$u_t - \Delta u = |u|^\alpha u, \tag{1.6}$$

ont également été étudiées, et divers résultats analogues à ceux valables pour le système de Navier-Stokes ont été obtenus. Le lecteur trouvera quelques résultats typiques dans [11, 12, 33, 21, 31, 8, 9, 28, 10, 32, 6]. On observe (voir [31]) qu'il y a deux sortes de solutions self-similaires radiales de (1.6): celles à décroissance rapide (i.e. avec $\Omega \equiv 0$ dans (1.5)) et celles à décroissance lente (i.e. avec $\Omega \not\equiv 0$ dans (1.5)). L'existence de solutions self-similaires radiales des deux types est établie dans [21]. D'autre part, lorsqu'on applique les méthodes de Cannone et Planchon à l'équation de la chaleur non-linéaire [32, 6], on obtient des solutions self-similaires à décroissance lente, non nécessairement radiales. Les solutions self-similaires que nous construisons dans [6, 7] ont des données initiales φ qui sont toutes de la forme (1.5) avec $\Omega \not\equiv 0$. Il est donc naturel de se demander si pour l'équation de Schrödinger non-linéaire (1.1) il existe deux types de solutions self-similaires, comme c'est le cas pour l'équation de la chaleur non-linéaire (1.6). Nous ne connaissons pas la réponse à cette question.

Le reste de cet article et organisé comme suit. Dans la section 2, nous présentons les résultats principaux d'existence globale, puis dans la Section 3 nous décrivons l'action du groupe de Schrödinger sur des fonctions homogènes du type $\varphi(x) = |x|^{-p}$ et $\varphi(x) = \omega(x)|x|^{-p}$, où $0 < \mathrm{Re}\, p < N$ et ω est homogène de degré 0. Il ressort que (pour certains ω) pour tout $t > 0$, $S(t)\varphi$ est C^∞ et appartient à $L^r(\mathbb{R}^N)$ pour r grand. Ensuite, nous montrons dans la Section 4 comment on peut appliquer les résultats de la Section 2 à de telles données initiales, produisant ainsi des solutions globales, self-similaires de (1.1), avec ou sans symétrie radiale. Nous montrons également dans la Section 4 que certaines solutions H^1 sont asymptotiquement self-similaires. Dans la Section 5, nous montrons comment, en utilisant la transformation pseudo-conforme, on peut obtenir des solutions de (1.1) sur $(-\infty, 0)$ qui ont une explosion asymptotiquement self-similaire en $t = 0$.

2. Solutions globales. Dans cette section, nous considérons l'équation intégrale correspondant à (1.1), i.e.

$$u(t) = S(t)\varphi - i\gamma \int_0^t S(t-s)\left(|u(s)|^\alpha u(s)\right) ds, \tag{2.1}$$

où $S(t)$ désigne le groupe de Schrödinger linéaire. Nous montrons l'existence de solutions globales en utilisant deux arguments de point fixe différents, produisant d'une part des solutions dans $L^{\alpha+2}(\mathbb{R}^N)$ et d'autre par des solutions dans l'espace de Sobolev homogène $\widetilde{W}^{1,\theta}$ où θ est donné par (2.19). Ces deux arguments s'appliquent dans des plages de α différentes, mais non disjointes. L'intervalle de α utilisé pour la construction des solutions dans $L^{\alpha+2}(\mathbb{R}^N)$ est donné par

$$\alpha_0 < \alpha < \frac{4}{N-2}, \tag{2.2}$$

où α_0 est la racine positive de l'équation

$$N\alpha^2 + (N-2)\alpha - 4 = 0. \tag{2.3}$$

Nous conviendrons que l'hypothèse (2.2) signifie $\alpha_0 < \alpha < \infty$ lorsque $N = 1$ ou 2. Notons que $\frac{4}{N+2} < \alpha_0 < \frac{4}{N}$. L'intervalle de α utilisé pour la construction des solutions dans $\widetilde{W}^{1,\theta}$ est donné par

$$\alpha_1 < \alpha < \frac{4}{N-4}, \tag{2.4}$$

où $N \geq 3$ et α_1 désigne la racine positive de l'équation

$$(N-2)\alpha^2 + (N-4)\alpha - 4 = 0. \tag{2.5}$$

On convient que l'hypothèse (2.4) signifie $\alpha_1 < \alpha < \infty$ si $N = 3$ ou 4. Notons que $\frac{4}{N} < \alpha_1 < \frac{4}{N-2}$. Notons aussi que les équations (2.3) et (2.5) qui déterminent α_0 et α_1 se déduisent l'une de l'autre en remplaçant N par $N-2$.

Avant d'énoncer notre premier résultat, introduisons une nouvelle définition. Pour α vérifiant (2.2), soit

$$\beta = \frac{4-(N-2)\alpha}{2\alpha(\alpha+2)}. \tag{2.6}$$

Il en résulte que

$$\beta(\alpha+1) < 1, \quad \frac{N\alpha}{2(\alpha+2)} < 1. \tag{2.7}$$

La première relation a lieu parceque $\alpha > \alpha_0$ et la seconde parceque $\alpha < \dfrac{4}{N-2}$. De plus,

$$\beta + 1 - \frac{N\alpha}{2(\alpha+2)} - \beta(\alpha+1) = 0. \tag{2.8}$$

On vérifie facilement que $(\beta, \alpha+2)$ est l'unique couple (b, r) tel que $\sup\limits_{t>0} t^b \|S(t)\varphi\|_{L^r}$ soit invariante par les transformations $\varphi_\lambda(x) = \lambda^{\frac{2}{\alpha}}\varphi(\lambda x)$ et tel que l'application $u \mapsto S(t)(|u|^\alpha u)$ soit continue $L^r(\mathbb{R}^N) \to L^r(\mathbb{R}^N)$ pour $t \neq 0$.

Théorème 2.1. *Supposons (2.2), et soit β donné par (2.6). Il existe une constante $K_0 = K_0(N, \alpha) > 0$ telle que si $\rho > 0$ et $M > 0$ vérifient*

$$\rho + |\gamma| K_0 M^{\alpha+1} \leq M,$$

et si φ est distribution tempérée telle que

$$\sup_{t>0} |t|^\beta \|S(t)\varphi\|_{L^{\alpha+2}} \leq \rho, \tag{2.9}$$

alors il existe une unique solution globale (i.e. définie pour tout $t \geq 0$) u de (2.1) telle que

$$\sup_{t>0} |t|^\beta \|u(t)\|_{L^{\alpha+2}} \leq M. \tag{2.10}$$

De plus, $u(t) - S(t)\varphi \in C([0,\infty), H^{-\frac{N\alpha}{2(\alpha+2)}}(\mathbb{R}^N))$ et $\lim\limits_{t\downarrow 0} u(t) = \varphi$ en temps que distributions tempérées.

Remarque 2.2.

(a) L'estimation (2.9), interprétée comme une vitesse de décroissance pour $|t|$ grand, est plus lente que cette de $\|S(t)\varphi\|_{L^{\alpha+2}}$ lorsque $\varphi \in L^{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}}(\mathbb{R}^N)$, i.e. $\beta < \dfrac{N\alpha}{2(\alpha+2)}$. (Voir (2.11).)

(b) Pour $\alpha < \dfrac{4}{N-2}$, il est bien connu que pour tout $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$, il existe une solution "classique" $u_1(t)$ de (2.1), $u_1 \in C([0,T_1], H^1(\mathbb{R}^N))$, pour un certain $T_1 > 0$. On montre facilement que si $\alpha > \alpha_0$ et si φ vérifie (2.9), alors la solution u donnée par le Théorème 2.1 coincide avec la solution "classique", i.e. $u \in C([0,\infty), H^1(\mathbb{R}^N))$ (voir Proposition 2.3 (f) de [6]).

(c) Le Théorème 2.1, s'il fournit de nouveaux cas d'existence globale pour (2.1), ne permet pas de retrouver la plupart des résultats classiques sur l'existence locale et globale. D'une part la théorie classique H^1 s'applique pour $0 < \alpha < \dfrac{4}{N-2}$, sans la borne inférieure α_0. D'autre part, le Théorème 2.1 n'inclue pas tout les résultats antérieurs d'existence globale basés sur la petitesse de certaines normes, comme dans [3], par exemple.

Idée de la démonstration du Théorème 2.1. (Voir la démonstration détaillée dan [6].) Soit X l'ensemble des functions $u : (0,\infty) \to L^{\alpha+2}(\mathbb{R}^N)$ mesurables au sens de Bochner, telles que $\sup\limits_{t>0} t^\beta \|u(t)\|_{L^{\alpha+2}} < \infty$. Soit X_M l'ensemble des $u \in X$ tels que

$$\sup_{t>0} t^\beta \|u(t)\|_{L^{\alpha+2}} \leq M.$$

Muni de la distance $d(u,v) = \sup_{t>0} t^\beta \|u(t) - v(t)\|_{L^{\alpha+2}}$, X_M est un espace métrique complet. En utilisant l'estimation

$$\|S(t)\psi\|_{L^r} \leq (4\pi|t|)^{-N\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{r}\right)} \|\psi\|_{L^{r'}}, \tag{2.11}$$

qui a lieu pour tous $t \neq 0$ et $2 \leq r \leq \infty$, on montre facilement en utilisant les relations (2.7) et (2.8) que l'application définie formellement par

$$\mathcal{P}_\varphi u(t) = S(t)\varphi - i\gamma \int_0^t S(t-s)\left(|u(s)|^\alpha u(s)\right) ds, \tag{2.12}$$

est une contraction stricte sur X_M, ce qui montre le résultat.

En utilisant les arguments de Kato [25], on peut montrer le résultat suivant de stabilité asymptotique. (Voir la démonstration dans [6].)

Théorème 2.3. *Soient ρ et M comme dans le Théorème 2.1. Supposons que φ et ψ vérifient (2.9) et soient u et v les solutions correspondantes de (2.1) vérifiant (2.10). Supposons en outre que $S(t)(\varphi - \psi)$ ont la propriété de décroissance plus forte*

$$\sup_{t>0} |t|^\beta (1+|t|)^\delta \|S(t)(\varphi - \psi)\|_{L^{\alpha+2}} < \infty, \tag{2.13}$$

où $\delta > 0$ est tel que $\beta(\alpha+1) + \delta < 1$. Alors il existe une constante $K_1 = K_1(N, \alpha, \delta) > 0$ telle que si $|\gamma| K_1 M^\alpha < 1$, on a

$$\sup_{t>0} |t|^\beta (1+|t|)^\delta \|u(t) - v(t)\|_{L^{\alpha+2}} \leq (1 - |\gamma| K_1 M^\alpha)^{-1} \sup_{t>0} |t|^\beta (1+|t|)^\delta \|S(t)(\varphi-\psi)\|_{L^{\alpha+2}}. \tag{2.14}$$

Remarque 2.4. Le Théorème 2.3 impose une propriété de décroissance supplémentaire uniquement sur la différence $\varphi - \psi$, mais pas sur les données initiales séparément. Par exemple, supposons que φ et ψ verifient (2.9) et que $\varphi - \psi \in L^{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}}(\mathbb{R}^N)$. Il en résulte que

$$\|S(t)(\varphi - \psi)\|_{L^{\alpha+2}} \leq (4\pi t)^{-\frac{N\alpha}{2(\alpha+2)}} \|\varphi - \psi\|_{L^{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}}}.$$

En particulier, (2.13) a lieu avec $\delta = \delta_0 = \dfrac{N\alpha}{2(\alpha+2)} - \beta$. On vérifie facilement que

$$\beta(\alpha+1) + \delta_0 = \beta\alpha + (\beta + \delta_0) = 1.$$

Par conséquent, (2.13) et (2.14) ont lieu pour tout δ tel que $0 \leq \delta < \delta_0$. En d'autres termes, pour t grand,

$$\|u(t) - v(t)\|_{L^{\alpha+2}} \leq C_\varepsilon t^{-\frac{N\alpha}{2(\alpha+2)}+\varepsilon}, \tag{2.15}$$

pour tout $\varepsilon > 0$.

Supposons à présent que $N \geq 3$ et que α est dans l'intervalle donné par (2.4), et posons

$$\mu = \frac{4 - (N-4)\alpha}{2\alpha(\alpha+2)} > 0. \tag{2.16}$$

Il en résulte que

$$\mu(\alpha+1) < 1, \quad \frac{(N-2)\alpha}{2(\alpha+2)} < 1, \tag{2.17}$$

et

$$\mu + 1 - \frac{(N-2)\alpha}{2(\alpha+2)} - \mu(\alpha+1) = 0. \tag{2.18}$$

Soit

$$\theta = \frac{N(\alpha+2)}{N+\alpha}. \tag{2.19}$$

Puisque $N \geq 3$, on a $2 < \theta < N$.

Pour $1 \leq r < N$, soit l'espace de Banach

$$\widetilde{W}^{1,r}(\mathbb{R}^N) = \{u \in L^{\frac{Nr}{N-r}}(\mathbb{R}^N);\ \nabla u \in L^r(\mathbb{R}^N)\},$$

muni de la norme $\|u\|_{\widetilde{W}^{1,r}} = \|\nabla u\|_{L^r}$. On a $\widetilde{W}^{1,r}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{\frac{Nr}{N-r}}(\mathbb{R}^N)$, et pour θ défini par (2.19), on obtient donc

$$\|u\|_{L^{\frac{N(\alpha+2)}{N-2}}} \leq C\|\nabla u\|_{L^\theta}, \tag{2.20}$$

pour tout $u \in \widetilde{W}^{1,\theta}(\mathbb{R}^N)$.

Pour $s < N/2$, on désigne par $\widetilde{H}^\sigma(\mathbb{R}^N)$ le complété de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ pour la norme $\|u\|_{\widetilde{H}^\sigma} = \|(-\triangle)^{\frac{\sigma}{2}}u\|_{L^2} = \|\,|\cdot|^\sigma \widehat{u}\|_{L^2}$. $\widetilde{H}^\sigma(\mathbb{R}^N)$ est un espace de distributions tempérées, et pour θ défini par (2.19),

$$\widetilde{W}^{1,\theta'}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow \widetilde{H}^\sigma(\mathbb{R}^N), \tag{2.21}$$

où

$$\sigma = \frac{4-(N-4)\alpha}{2(\alpha+2)}. \tag{2.22}$$

De plus, comme $(S(t))_{t\in\mathbb{R}}$ est un groupe d'isométries sur $L^2(\mathbb{R}^N)$, c'est aussi un groupe d'isométries sur $\widetilde{H}^\sigma(\mathbb{R}^N)$.

On vérifie aisément que (μ,θ) est l'unique couple (b,r) tel que $\sup_{t>0} t^b\|S(t)\nabla\varphi\|_{L^r}$ soit invariant par les transformations $\varphi_\lambda(x) = \lambda^{\frac{2}{\alpha}}\varphi(\lambda x)$ et tel que l'application $u \mapsto S(t)(|u|^\alpha u)$ soit continue $\widetilde{W}^{1,\theta}(\mathbb{R}^N) \to \widetilde{W}^{1,\theta}(\mathbb{R}^N)$ pour $t \neq 0$.

Théorème 2.5. *Supposons que $N \geq 3$ et que $\alpha > 0$ vérife (2.4). Supposons de plus que $\alpha \geq 1$ (de sorte que nécessairement $N \leq 7$) soient μ et θ définis par (2.16) et (2.19). Il existe une constante $K_2 = K_2(N,\alpha) > 0$ telle que si $\rho > 0$ et $M > 0$ vérifient*

$$\rho + |\gamma|K_2M^{\alpha+1} \leq M,$$

et si φ est une distribution tempérée telle que $S(t)\varphi \in \widetilde{W}^{1,\theta}(\mathbb{R}^N)$ pour presque tout $t > 0$ et

$$\sup_{t>0}|t|^\mu\|\nabla S(t)\varphi\|_{L^\theta} \leq \rho, \tag{2.23}$$

alors il existe une unique solution globale (i.e. définie pour tout $t \geq 0$) u de (2.1) telle que $u(t) \in \widetilde{W}^{1,\theta}(\mathbb{R}^N)$ pour presque tout $t > 0$ et

$$\sup_{t>0}|t|^\mu\|\nabla u(t)\|_{L^\theta} \leq M.$$

De plus, $u(t) - S(t)\varphi \in C([0,\infty), \widetilde{H}^\sigma)$, où σ est défini par (2.22); et $\lim_{t\downarrow 0} u(t) = \varphi$ en temps que distributions tempérées.

Remarque 2.6. On rappelle que si $\alpha < \dfrac{4}{N-4}$, alors pour tout $\varphi \in H^2(\mathbb{R}^N)$ il existe une solution classique $u_2(t)$ de (2.1), $u_2 \in C([0,T_2], H^2(\mathbb{R}^N))$, pour un certain $T_2 > 0$ (voir par exemple Kato [26], Theorem III). On montre facilement que si de plus $\alpha > \alpha_1$ et si φ vérifie (2.23), alors la solution u donnée par le Théorème 2.5 coincide avec la solution classique, i.e. $u \in C([0,\infty), H^2(\mathbb{R}^N))$ (voir Remark 2.2 (c) de [7]).

Idée de la démonstration du Théorème 2.5. (Voir la démonstration détaillée dans [7].) Soit Y l'ensemble des fonctions $u : (0,\infty) \to \widetilde{W}^{1,\theta}(\mathbb{R}^N)$ mesurables au sens de Bochner et telles que $\sup_{t>0} t^\mu \|\nabla u(t)\|_{L^\theta} < \infty$. Soit Y_M l'ensemble des $u \in Y$ tels que

$$\sup_{t>0} t^\mu \|\nabla u(t)\|_{L^\theta} \leq M.$$

Muni de la distance $d(u,v) = \sup_{t>0} t^\mu \|\nabla u(t) - \nabla v(t)\|_{L^\theta}$, Y_M est un espace métrique complet. On montre en utilisant les relations (2.17) et (2.18) que l'application définie formellement par (2.12) est une contraction stricte sur Y_M, et on en déduit le résultat. Notons que l'hypothèse $\alpha \geq 1$ intervient pour que l'application définie par (2.12) soit Lipschitzienne, puisqu'on doit estimer $\nabla(|u|^\alpha u - |v|^\alpha v)$. □

Puisque $\alpha_1 < \dfrac{4}{N-2}$, il y a des valeurs de α pour lesquelles on peut appliquer d'une part le Théorème 2.1 et d'autre part le Théorème 2.5, pourvu que la condition initiale vérifie (2.9) et (2.23). En fait, les solutions données par les Théorèmes 2.1 et 2.5 coincident. On a le résultat plus précis suivant.

Théorème 2.7. *Supposons que $N \geq 3$ soit $\alpha_1 < \alpha < \dfrac{4}{N-2}$, soient μ et θ définis par (2.16) et (2.19), et soit β défini par (2.6). Il existe une constante $K_3 = K_3(N,\alpha) \geq K_0(N,\alpha)$ telle que si $\rho > 0$ et $M > 0$ vérifient*

$$\rho + |\gamma| K_3 M^{\alpha+1} \leq M,$$

et si φ est une distribution tempérée telle que $S(t)\varphi \in \widetilde{W}^{1,\theta}(\mathbb{R}^N) \cap L^{\alpha+2}(\mathbb{R}^N)$ pour presque tout $t > 0$ et

$$\max\left\{\sup_{t>0} |t|^\mu \|\nabla S(t)\varphi\|_{L^\theta}, \sup_{t>0} |t|^\beta \|S(t)\varphi\|_{L^{\alpha+2}}\right\} \leq \rho, \tag{2.16}$$

alors la solution u de (2.1) donnée par le Théorème 2.1 vérifie $u(t) \in \widetilde{W}^{1,\theta}(\mathbb{R}^N)$ pour presque tout $t > 0$ et

$$\sup_{t>0} |t|^\mu \|\nabla u(t)\|_{L^\theta} \leq M.$$

Remarque 2.8. Il n'intervient pas l'hypothèse $\alpha \geq 1$ dans le Théorème 2.7. En particulier, alors qu'on ne peut appliquer le Théorème 2.5 que lorsque $3 \leq N \leq 7$, on peut appliquer le Théorème 2.8 pour toutes les valeurs de $N \geq 3$.

Idée de la démonstration du Théorème 2.7. On combine les estimations utilisées dans les démonstrations des Théorèmes 2.1 et 2.5. Avec les notations introduites dans ces démonstrations, soit $Z = X \cap Y$ et soit Z_M l'ensemble des $u \in Z$ tels que

$$\sup_{t>0} \max\{t^\mu \|\nabla u(t)\|_{L^\theta}, t^\beta \|u(t)\|_{L^{\alpha+2}}\} \leq M.$$

Muni de la distance $d(u,v) = \sup_{t>0} t^\beta \|u(t) - v(t)\|_{L^{\alpha+2}}$, Z_M est un espace métrique complet. On vérifie facilement que l'application définie formellement par (2.12) est une contraction stricte sur Z_M, ce qui démontre le résultat. □

3. L'équation de Schrödinger linéaire pour des données homogènes. Dans cette section, nous étudions l'action du groupe de Schrödinger linéaire $(S(t))_{t\in\mathbb{R}}$ sur les fonctions homogènes. Le résultat principal est le suivant. (Voir Proposition 3.9 de [6] et Lemma 3.2 de [7].)

Théorème 3.1. *Soit $p \in \mathbb{C}$ tel que $0 < \operatorname{Re} p < N$. Si $P_k(x)$ est un polynôme homogène de degré $k \in \mathbb{N}$ (y compris $k = 0$) et si $\varphi(x) = P_k(x)|x|^{-p-k}$, alors $S(t)\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N) \cap L^r(\mathbb{R}^N)$, pour tout $t > 0$ et tout*

$$r > \max\left\{\frac{N}{\operatorname{Re} p}, \frac{N}{N - \operatorname{Re} p}\right\}.$$

De plus, $S(t)\varphi(x) \in C^\infty((0,\infty) \times \mathbb{R}^N)$ et $\sup_{t>0} t^{\frac{\operatorname{Re} p}{2} - \frac{N}{2r}} \|S(t)\varphi\|_{L^r} < \infty$.

Idée de la démonstration. La démonstration est relativement longue et technique. On considère d'abord le cas $\varphi(x) = |x|^{-p}$ (i.e. $k = 0$), et l'on montre dans un premier temps que

$$[S(t)\varphi](x) = (4it)^{-\frac{p}{2}} \Gamma(p/2)^{-1} H\left(\frac{|x|^2}{4t}; \frac{p}{2}, \frac{N-p}{2}\right),$$

où la fonction H est définie par

$$H(y; a, b) = \int_0^1 e^{iyr} r^{a-1}(1-r)^{b-1}\, dr,$$

pour $a, b \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} a > 0$, $\operatorname{Re} b > 0$, et $y \in \mathbb{C}$. (Voir Proposition 3.3 de [6].) On voit en particulier que $S(t)\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$. On en déduit le résultat dans le cas $\varphi(x) = |x|^{-p}$, en développant la fonction $H(y; a, b)$ en série (en y). (Voir Lemma 3.5 et Proposition 3.7 de [6].)

Ensuite, on établit le résultat pour $\varphi(x) = Q_k(x)|x|^{-p-k}$, où $Q_k(x)$ est un polynôme homogène harmonique de degré $k \in \mathbb{N}$. Pour cela, on utilise les propriétés de la transformation de Fourier pour montrer que

$$S(t)[P_k |\cdot|^{-p-k}] = P_k[S_{N+2k}(t) |\cdot|^{-p-k}],$$

où le terme $|\cdot|^{-p-k}$ est interprété comme une distribution tempérée sur $\mathbb{R}^{N+2k}$ et $S_{N+2k}(t)$ désigne le groupe de Schrödinger sur $\mathbb{R}^{N+2k}$. La fonction radiale $S_{N+2k}(t) |\cdot|^{-p-k}$ est alors re-interprétée comme une fonction sur $\mathbb{R}^N$. (Voir Proposition 3.9 de [6].)

Enfin, dans le cas général, on observe que tout polynôme homogène P_k de degré k peut s'écrire sous la forme d'une somme finie

$$P_k(x) = Q_k(x) + |x|^2 Q_{k-2} + |x|^4 Q_{k-4}(x) + \cdots,$$

où chaque Q_{k-2m} est polynôme harmonique homogène de degré $k - 2m$. (Voir Lemma 3.2 de [7].) □

Remarque 3.2. Il est clair que les conclusions du Théorème 3.1 ont lieu lorsque $\varphi(x)$ est une combinaison linéaire finie de fonctions de la forme $P_k(x)|x|^{-p-k}$, où P_k est un polynôme homogène de degré $k \geq 0$.

4. Solutions self-similaires. Grâce à la nature complexe de l'équation de Schrödinger non-linéaire (1.1), on peut définir des solutions self-similaires un peu plus générales que celles décrites dans l'introduction. Plus précisément, une solution $u(t,x)$ de (1.1) (ou (2.1)) est *self-similaire* si, pour un certain p tel que $\mathrm{Re}\, p = \dfrac{2}{\alpha}$, on a

$$u(t,x) = \lambda^p u(\lambda^2 t, \lambda x),$$

pour tout $\lambda > 0$. Notons qu'on a alors

$$u(t,x) = t^{-\frac{p}{2}} f\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right), \tag{4.1}$$

où $f = u(1,\cdot)$. Notons aussi que si u est une solution self-similaire, alors

$$\|u(t)\|_{L^r} = t^{\frac{N}{2r}-\frac{1}{\alpha}} \|f\|_{L^r}, \tag{4.2}$$

pour tout $1 \le r \le \infty$ tel que $f \in L^r(\mathbb{R}^N)$. En particulier, si $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$, alors

$$\|u(t)\|_{L^2} = t^{\frac{N}{4}-\frac{1}{\alpha}} \|f\|_{L^2}.$$

Ceci montre que, sauf dans le cas $\alpha = \dfrac{4}{N}$, une solution self-similaire **ne peut pas** être une solution classique H^1, puisque les solutions H^1 ont une charge constante.

Notre premier résultat de cette section concerne l'existence de solutions self-similaires de (1.1) (voir Proposition 4.3 de [6]).

Théorème 4.1. *Supposons (2.2), et soit $p \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}\, p = \dfrac{2}{\alpha}$. Soit$\psi(x)$ une combinaison linéaire finie de fonctions de la forme $P_k(x)|x|^{-p-k}$, où P_k est un polynôme homogène de degré k (y compris $k = 0$). Alors pour tout ε assez petit, $\varphi = \varepsilon\psi$ vérifie les hypothèses du Théorème 2.1. La solution correspondante u de (2.1) est self-similaire.*

Démonstration. Il résulte des conditions sur α et p que

(i) $0 < \mathrm{Re}\, p < N$,
(ii) $\alpha + 2 > \max\left\{\dfrac{N}{\mathrm{Re}\, p}, \dfrac{N}{N - \mathrm{Re}\, p}\right\}$.

(La propriété (i) a lieu car $\alpha_0 > \dfrac{2}{N}$.) Par conséquent, il résulte du Théorème 3.1 que pour ε assez petit, $\varphi = \varepsilon\psi$ vérifie les hypothèses du Théorème 2.1. Le fait que la solution correspondante u est self-similaire résulte de l'unicité: Puisque $\lambda^p \varphi(\lambda x) = \varphi(x)$ pour tout $\lambda > 0$, les fonctions $\lambda^p u(\lambda^2 t, \lambda x)$ sont toutes solutions de (2.1) avec la même donnée initiale φ et vérifient toutes (2.10). □

Remarque 4.2. Nous ignorons quelle est la régularité de ces solutions self-similaires. On peut toutefois observer que $u \in C((0,\infty), L^{\alpha+2}(\mathbb{R}^N))$. En effet, puisque $u \in L^\infty_{\mathrm{loc}}((0,\infty), L^{\alpha+2}(\mathbb{R}^N))$, il résulte de (4.1) que $f \in L^{\alpha+2}(\mathbb{R}^N)$. L'operateur $s \mapsto f(s\,\cdot)$ étant continu $(0,\infty) \to L^{\alpha+2}(\mathbb{R}^N)$, on déduit la continuité de (4.1).

Remarque 4.3. Etant donné ψ comme dans le Théorème 4.1, on peut appliquer les Théorèmes 2.5 et 2.7 au lieu du Théorème 2.1. On obtient alors les résultats suivants.

(i) Supposons que $3 \leq N \leq 7$ et que $\alpha \geq 1$ vérifie (2.4). Supposons de plus que $p \in \mathbb{C}$ vérifie $\operatorname{Re} p = \frac{2}{\alpha}$. Alors pour ε assez petit, $\varphi = \varepsilon\psi$ vérifie les hypothèses du Théorème 2.5. La solution correspondante u de (2.1) est self-similaire. (Voir Theorem 3.1 de [7].)

(ii) Supposons que $N \geq 3$ et que $\alpha_1 < \alpha < \frac{4}{N-2}$, et soit $p \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re} p = \frac{2}{\alpha}$. Alors pour ε assez petit, la solution self-similaire u de (2.1) avec $\varphi = \varepsilon\psi$ et donnée par le Théorème 4.1 est telle que $u(t) \in \widetilde{W}^{1,\theta}(\mathbb{R}^N)$ pour tout $t > 0$ et $\sup_{t>0} |t|^\mu \|\nabla u(t)\|_{L^\theta} < \infty$, où μ et θ sont définis par (2.16) et (2.19). (Voir Theorem 3.5 de [7].)

Comme nous l'avons déjà observé, les solutions self-similaires ne sont pas des solutions H^1. Cependant, nous allons voir qu'elles interviennent dans le cadre des solutions H^1, dans la mesure où elles décrivent le comportement asymptotique lorsque $t \to \infty$ de certaines d'entre elles.

Théorème 4.4. *Supposons (2.2). Soit β défini par (2.6) et soit $p \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re} p = \frac{2}{\alpha}$. Soit $\psi(x)$ une fonction telle que $\psi(\lambda x) = \lambda^p \psi(x)$ pour tout $\lambda > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}^N$, et telle que $\sup_{t>0} t^\beta \|S(t)\psi\|_{L^{\alpha+2}} < \infty$. Si $\psi = \psi_1 + \psi_2$ avec $\psi_1 \in L^{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}}(\mathbb{R}^N)$ et $\psi_2 \in H^1(\mathbb{R}^N)$, alors les propriétés suivantes ont lieu.*

(i) $\sup_{t>0} t^\beta \|S(t)\psi_2\|_{L^{\alpha+2}} < \infty$. *De plus,*

$$\sup_{t>0} t^\beta \|S(t)\psi_2\|_{L^{\alpha+2}} \leq \sup_{t>0} t^\beta \|S(t)\psi\|_{L^{\alpha+2}} + C\|\psi_1\|_{L^{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}}}^{\frac{4-(N-2)\alpha}{N\alpha^2}} \|\psi_2\|_{H^1}^{\frac{N\alpha^2+(N-2)\alpha-4}{N\alpha^2}}, \tag{4.3}$$

où la constante C est indépendante de ψ.

(ii) *Soit $\varphi = \varepsilon\psi$ et $\varphi_2 = \varepsilon\psi_2$. Si ε est assez petit, alors il existe une solution self-similaire $u(t,x) = t^{-\frac{p}{2}} f\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$ de (2.1) au sens du Théorème 2.1, et la solution (classique) u_2 de (1.1) avec la donnée initiale $u_2(0) = \varphi_2$ est globale. De plus, pour tout $\eta > 0$,*

$$\left\| u_2(t,\cdot) - t^{-\frac{p}{2}} f\left(\frac{\cdot}{\sqrt{t}}\right) \right\|_{L^{\alpha+2}} = O(t^{-\frac{N\alpha}{2(\alpha+2)}+\eta}), \tag{4.4}$$

et

$$\|f - t^{\frac{p}{2}} u_2(t, x\sqrt{t})\|_{L^{\alpha+2}} \leq C_\eta t^{-\frac{N(\alpha+1)}{2(\alpha+2)}+\frac{1}{\alpha}+\eta}, \tag{4.5}$$

lorsque $t \to \infty$. Le deux membres de droite convergent vers 0 lorsque $t \to \infty$ si η est assez petit.

Démonstration. On procède en deux étapes.

Etape 1. Preuve de (i). Comme $\psi_2 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ et $\alpha < \frac{4}{N-2}$, on voit que

$$\|S(t)\psi_2\|_{L^{\alpha+2}} \leq C\|S(t)\psi_2\|_{H^1} \leq C\|\psi_2\|_{H^1} < \infty.$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} t^\beta \|S(t)\psi_2\|_{L^{\alpha+2}} &= t^\beta \|S(t)(\psi - \psi_1)\|_{L^{\alpha+2}} \leq t^\beta \|S(t)\psi\|_{L^{\alpha+2}} + t^\beta \|S(t)\psi_1\|_{L^{\alpha+2}} \\ &\leq t^\beta \|S(t)\psi\|_{L^{\alpha+2}} + Ct^\beta t^{-\frac{N\alpha}{2(\alpha+2)}} \|\psi_1\|_{L^{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}}}. \end{aligned}$$

Puisque $\alpha > \alpha_0$, on a $\beta - \frac{N\alpha}{2(\alpha+2)} < 0$, et il résulte des deux inégalités ci-dessus que

$$\sup_{t>0} t^\beta \|S(t)\psi_2\|_{L^{\alpha+2}} \leq \sup_{t>0} t^\beta \|S(t)\psi\|_{L^{\alpha+2}} + C\tau^{\beta - \frac{N\alpha}{2(\alpha+2)}} \|\psi_1\|_{L^{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}}} + C\tau^\beta \|\psi_2\|_{H^1},$$

pour $\tau > 0$ arbitraire. On en déduit le résultat en prenant $\tau = \|\psi_1\|_{L^{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}}}^{\frac{2(\alpha+2)}{N\alpha}} \|\psi_2\|_{H^1}^{-\frac{2(\alpha+2)}{N\alpha}}$.

Etape 2. Preuve de (ii). L'existence des solutions globales u et u_2 résulte du Théorème 2.1. En raisonnant comme dans la démonstration du Théorème 4.1, on montre facilement que u est self-similaire. Le fait que u_2 soit une solution globale H^1 résulte de la Remarque 2.2 (b). (4.4) est une conséquence de (2.15), et (4.5) en résulte. □

Nous allons voir maintenant que la décomposition $\psi = \psi_1 + \psi_2$ peut être effectivement réalisée, au moins lorsque $\alpha < 4/N$.

Proposition 4.5. *Soit $\alpha_0 < \alpha < \dfrac{4}{N}$ et soit $p \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re} p = \dfrac{2}{\alpha}$. Soit $\psi(x)$ une combinaison linéaire finie de fonctions de la forme $P_k(x)|x|^{-p-k}$, où P_k est un polynôme homogène de degré $k \geq 0$. La décomposition $\psi = \psi_1 + \psi_2$ décrite dans le Théorème 4.4 peut être réalisée avec $\psi_1 = \eta\psi + \widetilde{\psi}$, où η et $\widetilde{\psi}$ vérifient*

(i) $\eta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)$,

(ii) $\eta(x) = 1$ *au voisinage de* $x = 0$,

(iii) $\eta(x)|x|^{-\frac{2}{\alpha}} \in L^{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}}(\mathbb{R}^N)$,

(iv) $\widetilde{\psi} \in L^{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}}(\mathbb{R}^N) \cap H^1(\mathbb{R}^N)$.

Par exemple, on peut prendre pour η une fonction de troncature C^1 à support compact.

Démonstration. Il s'agit d'une vérification élémentaire. Notons que la restriction $\alpha < \dfrac{4}{N}$ est nécessaire pour que $(1-\eta)\psi \in H^1(\mathbb{R}^N)$. □

Remarque 4.6. Voici quelques commentaires sur le Théorème 4.4 et la Proposition 4.5.

(i) Ces résultats montrent que si $\alpha_0 < \alpha < \dfrac{4}{N}$, alors il existe toute une classe de données initiales dans $H^1(\mathbb{R}^N)$ qui sont "asymptotiquement homogènes" dan $\mathbb{R}^N$ (i.e. les fonctions φ_2 de la Proposition 4.5), et donnent naissance a des solutions globales, asymptotiquement (en temps) self-similaires, de l'équation (2.1). Notons que pour ces solutions, on **ne peut pas** appliquer les théories du scattering connues. En effet, la théorie H^1 ne s'applique pas puisque $\alpha < 4/N$; et la théorie dans $X = H^1 \cap L^2(|x|^2dx)$ ne s'applique pas puisque $\varphi_2 \notin X$.

(ii) Pour les solutions asymptotiquement self-similaires décrites ci-dessus, il résulte de (4.4) et (4.2) que

$$t^{\frac{4-(N-2)\alpha}{2\alpha(\alpha+2)}} \|u_2(t)\|_{L^{\alpha+2}} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \|f\|_{L^{\alpha+2}} > 0.$$

Comme $\alpha > \alpha_0$, on obtient une décroissance plus lente que (2.11). D'autre part, puisque $\alpha < 4/N$, u_2 a une "décroissance linéaire" au sens de la Definition 1.4 de [5]. De plus, vec les notations de la Definition 1.1 de [5], $\|u_2(t)\|_{L^{\alpha+2}}^{a} \approx t^{-1}$, de sorte que u_2 n'a pas une "décroissance rapide".

(iii) Soient φ_2 et u_2 comme dans la partie (ii) du Théorème 4.4. Il résulte aisément de (4.3) que si $\widetilde{\varphi}_2 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ et si $\|\varphi_2 - \widetilde{\varphi}_2\|_{H^1} + \|\varphi_2 - \widetilde{\varphi}_2\|_{L^{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}}}$ est assez petit, alors la solution correspondante $\widetilde{u}_2$ de (1.1) vérifie aussi (4.4), avec le même f. Par conséquent, le comportement asymptotique décrit par le Théorème 4.4 est dans un certain sens moins précis que la théorie du scattering. Par exemple, dans le cas linéaire $\gamma = 0$, u_2 et $\widetilde{u}_2$ ont le même comportement self-similaire donné par f, mais ont des "scattering states" φ_2 et $\widetilde{\varphi}_2$ différents.

5. Explosion self-similaire. Si les solutions self-similaires interviennent dans la description du comportement lorsque $t \to \infty$ de certaines solutions globales, on sait qu'elles peuvent également intervenir dans la description de certains phénomènes d'explosion. C'est le cas pour certaines équations de la chaleur non-linéaires (voir par exemple Y. Giga et R.V. Kohn [15,16,17], et M.A. Herrero et J.J.L. Velázquez [22, 23]). Dans cette section, nous construisons une classe de solutions globales pour $t < 0$ de (1.1) qui sont asymptotiquement self-similaires au "temps d'explosion" $t = 0$. Toutefois, il ne s'agit pas de solutions H^1.

L'outil principal pour cette construction est la transformation pseudo-conforme, qui échange les comportements en $t = 0$ et $t = \infty$. Plus précisément, soit une solution u de l'équation (1.1) sur $(-\infty, 0)$, et posons

$$v(s,y) = s^{-\frac{N}{2}} e^{i\frac{|y|^2}{4s}} u\left(-\frac{1}{s}, \frac{y}{s}\right), \tag{5.1}$$

pour $y \in \mathbb{R}^N$ et $s > 0$. Alors, du moins formellement, v est solution de l'équation de Schrödinger non-linéaire (et non-autonome)

$$iv_s + \Delta v = \gamma s^{\frac{N\alpha-4}{2}} |v|^\alpha v, \tag{5.2}$$

sur $(0, \infty)$. On écrit le problème de Cauchy pour l'équation (5.2) sous la forme intégrale

$$v(s) = S(s)\psi - i\gamma \int_0^s S(s-\tau)\tau^{\frac{N\alpha-4}{2}}(|v(\tau)|^\alpha v(\tau))\, d\tau. \tag{5.3}$$

Comme c'est le cas pour l'équation (1.1), l'ensemble des solutions de l'équation (5.2) est invariant par le groupe de dilatations $v_\lambda(s,y) = \lambda^q v(\lambda^2 s, \lambda y)$, où $\operatorname{Re} q = N - \dfrac{2}{\alpha}$. On peut donc définir une notion de solutions self-similaires. De plus, on peut développer une théorie des solutions globales et des solutions asymptotiquement self-similaires de (5.2) comme nous l'avons fait pour l'équation (1.1).

Théorème 5.1. *Supposons (2.2) et soit σ défini par*

$$\sigma = \frac{N\alpha^2 + (N-2)\alpha - 4}{2\alpha(\alpha+2)}. \tag{5.4}$$

Il existe une constante $K_4 = K_4(N,\alpha) > 0$ telle que si $\rho > 0$ et $M > 0$ vérifient

$$\rho + |\gamma| K_4 M^{\alpha+1} \le M,$$

et si ψ est une distribution tempérée telle que $S(s)\psi \in L^{\alpha+2}(\mathbb{R}^N)$ pour presque tout $s > 0$ et

$$\sup_{s>0} |s|^\sigma \|S(s)\psi\|_{L^{\alpha+2}} \le \rho, \tag{5.5}$$

alors il existe une unique solution globale (i.e. définpour tout $s \ge 0$) v de (5.3) telle que

$$\sup_{s>0} |s|^\sigma \|v(s)\|_{L^{\alpha+2}} \le M. \tag{5.6}$$

De plus, $v(s) - S(s)\psi \in C([0,\infty), H^{-\frac{N\alpha}{2(\alpha+2)}}(\mathbb{R}^N))$ et $\lim_{s\downarrow 0} v(s) = \psi$ en temps que distributions tempérées.

Soient ψ et $\widetilde{\psi}$ vérifiant (5.5) et soient v et $\widetilde{v}$ les solutions correspondantes de (5.3) vérifiant (5.6). Supposons que $S(s)(\psi - \widetilde{\psi})$ a la propriété de décroissance plus forte

$$\sup_{s>0} |s|^{\sigma}(1+|s|)^{\delta}\|S(s)(\psi - \widetilde{\psi})\|_{L^{\alpha+2}} < \infty, \tag{5.7}$$

avec $\delta > 0$ tel que $\sigma(\alpha+1) + \delta < \dfrac{N\alpha}{2} - 1$. Il existe une constante $K_5 = K_5(N, \alpha, \delta) > 0$ telle que si $|\gamma| K_5 M^{\alpha} < 1$, alors

$$\sup_{s>0} |s|^{\sigma}(1+|s|)^{\delta}\|v(s) - \widetilde{v}(s)\|_{L^{\alpha+2}} \le (1 - |\gamma| K_5 M^{\alpha})^{-1} \sup_{s>0} |s|^{\sigma}(1+|s|)^{\delta}\|S(s)(\psi - \widetilde{\psi})\|_{L^{\alpha+2}}. \tag{5.8}$$

Démonstration. Elle est identique à celle des Théorèmes 2.1 et 2.3, en remplaçant β par σ. □

Remarque 5.2. Il résulte du Theorem 3.4, p. 90 de [5] que le problème de Cauchy pour (5.2) est localement bien posé dans l'espace $H^1(\mathbb{R}^N)$. On montre aisément que si $\psi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ vérifie (5.5), alors la solution de (5.3) donnée par le Théorème 5.1 coincide pour tout $s \ge 0$ avec la solution "classique" H^1, qui est donc globale (voir Remark 5.4 de [6]).

Soit $\widetilde{\psi}(y) = |y|^{-q}$ (ou plus généralement, une combinaison linéaire finie de fonctions de la forme $P_k(y)|y|^{-q-k}$, où P_k est un polynôme homogène de degré $k \ge 0$), où $q \in \mathbb{C}$ vérifie

$$\operatorname{Re} q = N - \frac{2}{\alpha}.$$

La condition (2.2) implique que $\alpha + 2 \ge \max\left\{\dfrac{N}{\operatorname{Re} q}, \dfrac{N}{N - \operatorname{Re} q}\right\}$, et il résulte du Théorème 3.1 que

$$\sup_{s>0} s^{\sigma}\|S(s)\widetilde{\psi}\|_{L^{\alpha+2}} < \infty.$$

On peut par conséquent appliquer le Théorème 5.1 avec $\psi = c\widetilde{\psi}$ dès que c est une constante assez petite. En utilisant les mêmes arguments que dans la démonstration du Théorème 4.1, on montre le résultat suivant.

Proposition 5.3. *Supposons (2.2) et soit $\widetilde{\psi}$ comme ci-dessus. Si c est assez petit, alors il existe une solution v de (5.3) ayant toutes les propriétés décrites au Théorème 5.1. De plus, v est self-similaire, i.e.*

$$v(s, y) \equiv \lambda^{q} v(\lambda^2 s, \lambda y),$$

pour tout $\lambda > 0$. En particulier, $v(s, y) \equiv s^{-\frac{q}{2}} f\left(\dfrac{y}{\sqrt{s}}\right)$, où $f(\cdot) = v(1, \cdot)$.

Soit $\widetilde{\psi}$ comme ci-dessus, et soit η une fonction de troncature C^{∞}, i.e. identiquement égale à 1 au voisinage de l'origine et à support compact. On vérifie aisément que $(1-\eta)\widetilde{\psi} \in H^1(\mathbb{R}^N)$ pourvu que $\alpha > \dfrac{4}{N}$. De plus, $\eta\widetilde{\psi} \in L^{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}}(\mathbb{R}^N)$ puisque $\alpha < \dfrac{4}{N-2}$. Par conséquent, on peut adapter les démonstrations du Théorème 4.4 et de la Proposition 4.5 pour obtenir le résultat suivant.

Proposition 5.4. *Supposons $\dfrac{4}{N} < \alpha < \dfrac{4}{N-2}$. Soit $\widetilde{\psi}$ comme dans la Proposition 5.3 et soit η une fonction de troncature comme ci-dessus. Soient $\psi = c\widetilde{\psi}$, $\psi_1 = \eta\psi$, et $\psi_2 = (1-\eta)\psi$. Si c est assez petit, alors*

ψ, ψ_1 et ψ_2 vérifient les hypothèses de la première partie du Théorème 5.1, et ψ et ψ_2 vérifient les hypotèses de la deuxième partie du Théorème 5.1. Si v, v_1 et v_2 désignent les solutions correspondantes de (5.3), alors v est self-similaire au sens de la Proposition 5.3, et pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\left\| v_2(s,\cdot) - s^{-\frac{q}{2}} f\left(\frac{\cdot}{\sqrt{s}}\right) \right\|_{L^{\alpha+2}} = O\left(s^{-\frac{N\alpha}{2(\alpha+2)}+\varepsilon}\right), \tag{5.9}$$

lorsque $s \to \infty$, où $f(\cdot) = v(1,\cdot)$. Enfin, v_2 est une solution "classique" H^1 de (5.2).

Lorsqu'on interprète le résultat précédent, à l'aide de la transformation pseudo-conforme inverse, en termes de solutions de l'équation (1.1), on obtient le théorème suivant. (Voir Theorem 5.7 de [6].)

Théorème 5.5. *Supposons $\frac{4}{N} < \alpha < \frac{4}{N-2}$, et soient v et v_2 comme dans la Proposition 5.4. Soit u définie par*

$$u(t,x) = (-t)^{-\frac{N}{2}} e^{i\frac{|x|^2}{4t}} v\left(-\frac{1}{t}, -\frac{x}{t}\right), \tag{5.10}$$

pour $x \in \mathbb{R}^N$ et $t < 0$, et soit u_2 définie de la même manière en termes de v_2. Alors u et u_2 sont des solutions de (1.1) sur $(-\infty, 0)$ au sens du Théorème 2.1. De plus, u est self similaire, i.e.

$$u(t,x) = (-t)^{-\frac{p}{2}} g\left(\frac{x}{\sqrt{-t}}\right),$$

avec $p = N - q$ et $g(x) = e^{-i\frac{|x|^2}{4}} v(1,x)$. De plus, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\|(-t)^{\frac{p}{2}} u_2(t, x\sqrt{-t}) - g(x)\|_{L^{\alpha+2}} = O\left((-t)^{\frac{4-(N-2)\alpha}{2\alpha(\alpha+2)}-\varepsilon}\right), \tag{5.11}$$

lorsque $t \uparrow 0$, le membre de droite convergeant vers 0 lorsque $t \uparrow 0$ pour ε assez petit. En outre, $u_2 \in C((-\infty,0), L^r(\mathbb{R}^N))$ pour tout $r \in \left[2, \frac{2N}{N-2}\right]$, $\|u_2(t)\|_{L^2}$ est constante, et $u_2 \in C((-\infty,0), H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N))$.

Remarque 5.6. Naturellement, la construction de solutions self-similaires u de (1.1) par la formule (5.10) du Théorème 5.5 est valable pour toute la plage $\alpha_0 < \alpha < \frac{4}{N-2}$. Cependant, nous ne savons pas si ce sont les solutions self-similaires - modulo une conjugaison complexe - décrites dans la Proposition 4.1.

Remarque 5.8. Il résulte de (5.11) que $\|(-t)^{\frac{p}{2}} u_2(t, x\sqrt{-t})\|_{L^{\alpha+2}} \to \|g\|_{L^{\alpha+2}}$ lorsque $t \uparrow 0$. Par conséquent,

$$\|u_2(t)\|_{L^{\alpha+2}} \approx (-t)^{-\frac{4-(N-2)\alpha}{2\alpha(\alpha+2)}} \|g\|_{L^{\alpha+2}},$$

qui explose lorsque $t \uparrow 0$. Cependant, la relation entre ces solutions et l'explosion de solutions dans H^1 n'est pas évidente. En effet, la solution u_2 du Théorème 5.5 n'est **pas** une solution H^1. Si c'était le cas, v_2 (qui est une solution H^1) serait alors solution dans $X = H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N, |x|^2 dx)$, ce qui est exclu car sa donnée initiale ψ_2 n'appartient pas à X. Par ailleurs, le résultat ci-dessus est valable indépendamment du signe de γ, et en particulier pour $\gamma > 0$ (ou même $\gamma = 0$), alors que dans ce cas les solutions H^1 n'explosent pas. Il est toutefois intéressant de constater que, dans le cas $\frac{4}{N} < \alpha < \frac{4}{N-2}$ et $\gamma < 0$, dans lequel il existe des solutions H^1 de (1.1) qui explosent en temps fini, on peut construire des solutions qui explosent de manière asymptotiquement self-similaire et qui sont "presque" dans H^1.

Références.

[1] M. Cannone, A generalization of a theorem by Kato on Navier-Stokes equations, preprint.

[2] M. Cannone and F. Planchon, Self-similar solutions for the Navier-Stokes equations in $\mathbb{R}^3$, Comm. Partial Differential Equations **21** (1996), 179—193.

[3] T. Cazenave and F. B. Weissler, The Cauchy problem for the critical nonlinear Schrödinger equation in H^s, Nonlinear Anal. T.M.A. **14** (1990), 807—836.

[4] T. Cazenave and F. B. Weissler, The structure of solutions to the pseudo-conformally invariant nonlinear Schrödinger equation, Proc. Royal Soc. Edinburgh Sect. A **117** (1991), 251—273.

[5] T. Cazenave and F. B. Weissler, Rapidly decaying solutions of the nonlinear Schrödinger equation, Comm. Math. Phys. **147** (1992), 75—100.

[6] T. Cazenave and F. B. Weissler, Asymptotically self-similar global solutions of the nonlinear Schrödinger and heat equations, Math. Z., to appear.

[7] T. Cazenave and F. B. Weissler, More self-similar solutions of the nonlinear Schrödinger equation, to appear.

[8] M. Escobedo and O. Kavian, Asymptotic behavior of positive solutions of a nonlinear heat equation, Houston J. Math. **13** (1987), 39—50.

[9] M. Escobedo and O. Kavian, Variational problems related to self-similar solutions of the heat equation, Nonlinear Anal. **11** (1987), 1103—1133.

[10] M. Escobedo , O. Kavian and H. Matano, Large time behavior of solutions of a dissipative semi-linear heat equation, Comm. Partial Differential Equations **20** (1995), 1427—1452.

[11] H. Fujita, On the blowing-up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{\alpha+1}$, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **13** (1966), 109—124.

[12] H. Fujita, On some nonexistence and nonuniqueness theorems for nonlinear parabolic equations, Proc. Symp. Pure Math. **18**, Amer. Math. Soc., 1968, 138—161.

[13] H. Fujita and T. Kato, On the Navier-Stokes initial value problem I, Arch. Rat. Mech. Anal. **16** (1964), 269—315.

[14] Y. Giga, Solutions for semilinear parabolic equations in L^p and regularity of weak solutions of the Navier-Stokes system, J. Diff. Eq. **62** (1986), 186—212.

[15] Y. Giga and R.V. Kohn, Asymptotically self-similar blow-up of semilinear heat equations, Comm. Pure Appl. Math. **38** (1985), 297—319.

[16] Y. Giga and R.V. Kohn, Characterizing blow up using similarity variables, Indiana Math. J. **36** (1987), 1—40.

[17] Y. Giga and R.V. Kohn, Nondegeneracy of blowup for semilinear heat equations, Comm. Pure Appl. Math. **62** (1989), 845—885.

[18] Y. Giga and T. Miyakawa, Solutions in L^r of the Navier-Stokes initial value problem, Arch. Rat. Mech. Anal. **89** (1985), 267—281.

[19] Y. Giga and T. Miyakawa, Navier-Stokes flow in $\mathbb{R}^3$ with measures as initial vorticity and Morrey spaces, Commun. Partial Differential Equations **14** (1989), 577—618.

[20] J. Ginibre and G. Velo, On a class of nonlinear Schrödinger equations I,II, J. Func. Anal. **32** (1979), 1—71.

[21] A. Haraux and F.B. Weissler, Non uniqueness for a semilinear initial value problem, Indiana Univ. Math. J. **31** (1982), 167—189.

[22] M.A. Herrero and J.J.L. Velázquez, Blow-up behaviour of one-dimensional semilinear parabolic equations, Ann. Inst. Henri Poincaré, Analyse Non-Linéaire **10** (1993), 131—189.

[23] M.A. Herrero and J.J.L. Velázquez, Some results on blow up for some semilinear parabolic problems, in *Degenerate diffusion (Minneapolis, 1991)*, IMA Vol. Math. Appl. **47**, Springer, New York, 1993, 105—125.

[24] R. Johnson and X. Pan, On an elliptic equation related to the blow-up phenomenon in the non-linear Schrödinger equation, Proc. Royal Soc. Edin. Sect. A **123** (1993), 763—782.

[25] T. Kato, Strong L^p solutions of the Navier-Stokes equation in $\mathbb{R}^m$, with applications to weak solutions, Math. Z. **187** (1984), 471—480.

[26] T. Kato, Nonlinear Schrödinger equations, in *Schrödinger Operators*, Lecture Notes in Physics **345**, Springer, 1989, 218—263.

[27] T. Kato and H. Fujita, On the nonstationary Navier-Stokes system, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **32** (1962), 243—260.

[28] O. Kavian, Remarks on the time behaviour of a nonlinear diffusion equation, Ann. Inst. Henri Poincaré, Analyse Non Linéaire **4** (1987), 423—452.

[29] O. Kavian and F. B. Weissler, Self-similar solutions of the pseudo-conformally invariant nonlinear Schrödinger equation, Mich. Math. J. **41** (1992), 151—173.

[30] N. Kopell and M. Landman, Spatial structure of the focusing singularity of the nonlinear Schrödinger equation: a geometric analysis, SIAM J. Appl. Math. **55** (1995), 1297—1323.

[31] L.A. Peletier, D. Terman and F.B. Weissler, On the equation $\Delta u + \frac{1}{2}x \cdot \nabla u - u + f(u) = 0$, Archive Rat. Mech. Anal. **94** (1986), 83—99.

[32] F. Ribaud, Analyse de Littlewood Paley pour la résolution d'équations paraboliques semi-linéaires, Doctoral Thesis, University of Paris XI, January 1996.

[33] F. B. Weissler, Existence and non-existence of global solutions for a semilinear heat equation, Israel J. Math. **38** (1981), 29—40.