

# JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

NICOLAS BURQ

## Vitesse de convergence vers le réel des résonances

*Journées Équations aux dérivées partielles* (1996), p. 1-9

[http://www.numdam.org/item?id=JEDP\\_1996\\_\\_\\_\\_A7\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1996____A7_0)

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1996, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# Vitesse de convergence vers le réel des résonnances

N. Burq,

Centre de Mathématiques\*, Ecole Polytechnique,  
91128 Palaiseau Cedex, FRANCE.

## 1 Introduction

On se propose, dans cet exposé, de montrer l'existence d'un voisinage exponentiellement petit de l'axe réel de la forme  $\{\lambda \in \mathbb{C}; \operatorname{Im}\lambda < Ce^{-\varepsilon|\lambda|}, |\lambda| \geq C\}$ , ne contenant pas de résonnance pour le problème de Dirichlet.

On considère  $\Theta \subset \mathbb{R}^d$  un obstacle compact de  $\mathbb{R}^d$  à frontière de classe  $C^\infty$  et  $A = (a_{i,j}) \in C^\infty(\overline{\Theta^c})$  une matrice symétrique uniformément définie positive, égale à l'identité en dehors d'un compact. On note  $\Delta = \sum_{i,j} \partial_i a_{i,j}(x) \partial_j$  le Laplacien associé. On définit la résolvante sortante pour le Laplacien avec conditions de Dirichlet dans  $\Theta^c$  par la relation

$$(1.1) \quad R(\xi) f = \int_0^{+\infty} e^{-it\xi} v(t) dt.$$

où  $v(t)$  est la solution de l'équation des ondes avec conditions de Dirichlet associée aux données initiales  $(0, f)$ .

Il est classique que cet opérateur, analytique dans  $\operatorname{Im}\xi < 0$  possède un prolongement méromorphe comme opérateur de  $L^2_{\text{comp}}(\Theta^c)$  dans  $H^1_{0,\text{loc}}(\Theta^c)$  dans  $\mathbb{C}$  si  $d$  est impair et dans le revêtement simplement connexe de  $\mathbb{C}^*$  si  $d$  est pair et que ses pôles coïncident avec ceux de l'opérateur  $\chi_1 R(\lambda) \chi_2$  si les fonctions  $\chi_i \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$  sont égales à 1 au voisinage de  $\Theta$  et du support de  $Id - A$ . Si l'obstacle est non captif, il est connu, depuis les travaux de R. Melrose et J. Sjöstrand [11] que la résolvante ne possède qu'un nombre fini de pôles sous toute courbe  $\operatorname{Im}\lambda \leq C \log(|\operatorname{Re}\lambda|)$  ( $C$  arbitraire). Si  $A = Id$  et  $\Theta$  est la réunion de deux convexes stricts, alors M. Ikawa [2, 3, 5] et C. Gérard [1] ont montré qu'il existe  $C > 0$  tel qu'il n'y a qu'un nombre fini de pôles dans une

---

\*URA 169 du CNRS

région de la forme  $\text{Im}\lambda < C$ . Enfin, M. Ikawa [4] a montré que dans le cas de deux obstacles convexes (non stricts), il peut exister une suite de pôles convergeant vers l'axe réel et un exemple explicite de Ralston [14] montre (dans un cas où  $A \neq Id$  et  $\Theta$  est une boule de  $\mathbb{R}^2$ ) que cette convergence peut avoir lieu exponentiellement vite, c'est à dire qu'il exhibe un exemple où on a une suite de pôles vérifiant  $0 < \text{Im}\lambda \leq e^{-C\text{Re}|\lambda|}$  avec  $C > 0$ . Le deuxième résultat que nous démontrons dans cet article est que cette dernière situation est la pire qui puisse arriver

THÉORÈME 1.— *Il existe  $c_1, c_2, \varepsilon_0 > 0$  tels que la résolvante sortante ne possède pas de pôles dans la région*

$$(1.2) \quad \{\lambda \in \mathbb{C} ; \text{Im}\lambda < \varepsilon_0 e^{-c_2|\text{Re}\lambda|}\} \cap \{|\lambda| > c_1\}.$$

*Plus précisément, il existe  $\chi_1$  et  $\chi_2$ , comme précédemment et  $C, c_3 > 0$ ) tels que dans la région précédente, la résolvante tronquée vérifie*

$$(1.3) \quad \|\chi_1 R(\lambda) \chi_2\|_{\mathcal{L}(L^2; H_0^1)} \leq C e^{+c_3|\text{Re}\lambda|}$$

Le deuxième résultat que nous obtenons comme conséquence du premier concerne l'estimation du taux de décroissance de l'énergie locale de l'équation des ondes. On note  $u(t, x)$ , la solution du système

$$(1.4) \quad \begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta) u = 0 \text{ dans } \Omega \times \mathbb{R}_t \\ u|_{t=0} = u_0 \in H_0^1(\Theta^c) \\ \partial_t u|_{t=0} = u_1 \in L^2(\Theta^c) \\ u|_{\partial\Theta} = 0 \end{cases}$$

et pour  $R_1, R_2 > 0$ ,  $(u_0, u_1)$  à support dans  $B(0, R_1)$  on définit son énergie locale à l'instant  $t$  par

$$(1.5) \quad E_{\text{loc}}(u, t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega \cap B(0, R_2)} |\nabla u|^2(t) + |\partial_t u|^2(t)$$

Elle bornée par l'énergie initiale.

Depuis les travaux de P. D. Lax et R. S. Phillips [6] (voir aussi [7]), on sait que pour toutes données initiales à support compact, l'énergie locale de la solution de l'équation des ondes associée à ces données tend vers 0 quand le temps tend vers l'infini. Les résultats de R. Melrose et J. Sjöstrand [11] impliquent que, si l'obstacle est non captif, cette convergence à lieu exponentiellement vite, en dimension impaire d'espace, par rapport à l'énergie initiale et (à cause de la singularité de la résolvante en  $\lambda = 0$ ) polynomialement, en dimensions paires d'espace (les cas des dimensions petites ( $d = 2, 3$ ) ayant été traités précédemment par C. Morawetz, J. Ralston et W. Strauss [12].

$$(1.6) \quad d \text{ pair } \exists \varepsilon > 0; \forall \chi_{1,2} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d) \exists C > 0; E(\chi_1 e^{itB} \chi_2 U_0) \leq C e^{-\varepsilon t} E(U_0).$$

$$(1.7) \quad d \text{ impair } \exists \varepsilon > 0; \forall \chi_{1,2} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d) \exists C > 0; E(\chi_1 e^{itB} \chi_2 U_0) \leq \frac{C}{t^2} E(U_0).$$

Dans le cas où l'obstacle est captif, On sait (voir J. Ralston [13]) qu'il n'existe pas de taux uniforme de décroissance par rapport à l'énergie initiale. Néanmoins, un argument simple de compacité (voir Walker, [15]) montre que pour des données initiales à support dans  $B(0, R_1)$  il existe toujours un taux uniforme de décroissance de l'énergie locale par rapport à toute norme Sobolev plus forte que l'énergie initiale (l'énergie étant la norme  $H^1$ , par rapport à toute norme  $H^s, s > 1$ ). Le seul résultat précis dans cette direction que nous connaissons est celui où l'obstacle est constitué de deux convexes stricts ou d'un nombre fini de convexes stricts "assez" éloignés les uns des autres. Dans ce cas, M. Ikawa [2, 3] montre que le taux est exponentiel par rapport à des normes Sobolev assez grandes. Le deuxième résultat que nous obtenons dans cet article est que le taux est toujours au moins logarithmique. Si on note  $B = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i\Delta_{\text{Dir}} & 0 \end{pmatrix}$ ,  $D(B)$  son domaine naturel,

**THÉORÈME 2.**— *Pour tout  $R_1, R_2 > 0$  et tout  $k > 0$  il existe  $C > 0$  tel que pour toutes données initiales  $(u_0, u_1) \in D(B^k)$  à supports dans  $(B(0, R_1) \cap \overline{\Theta^c})$ , on a*

$$(1.8) \quad E_{\text{loc}}(u(t))^{1/2} = \left( \int_{B(0, R_2) \cap \Theta^c} |\nabla u|^2(t) + |\partial_t u|^2(t) \right)^{1/2} \leq \frac{C}{\log(2+t)^k} \|(u_0, u_1)\|_{D(B^k)}$$

**REMARQUE 1.1.**— *L'exemple de Ralston montre que le théorème 1 est optimal. Il est certainement aussi possible, dans le cas où il existe une trajectoire captive de type elliptique, en construisant des quasi-modes localisés le long de cette trajectoire, de montrer que ce résultat est aussi optimal même si on impose  $A = \text{Id}$ . Par ailleurs, comme les pôles de diffusion sont (en dimension impaire) les valeurs propres du générateur infinitésimal de Lax et Philipps, qui donnent une borne supérieure sur le taux de décroissance, l'exemple de Ralston montre que le théorème 2 est aussi optimal.*

Le fait que le théorème 1 implique le théorème 2 est essentiellement démontré par G. Lebeau dans [8]. Néanmoins, nous améliorons légèrement son résultat en le rendant optimal.

Nous nous limiterons, dans cet exposé à donner une idée de la démonstration du théorème 1 dans un cas plus simple où on suppose que l'obstacle est topologiquement une boule. L'idée de notre démonstration est d'utiliser une méthode de Lebeau et Robbiano [10] pour obtenir des estimations sur les solutions de l'équation de Helmholtz,  $\Delta u + \lambda^2 u = f$  avec  $f$  à support compact dans une zone bornée (une boule qui contient l'obstacle et la perturbation du Laplacien) où on a à priori peu d'information. Le coût à payer pour l'obtention de ces estimations est qu'on doit utiliser des fonctions phases vérifiant les hypothèses d'hypoellipticité de Hörmander et qui croissent donc très vite. On montre ensuite, que, quitte à agrandir la boule, on peut stabiliser le comportement de ces fonctions, puis on utilise le caractère sortant de la solution  $u$  pour conclure.

## 2 Idée de la démonstration

### 2.1 Inégalités de Carleman

Nous rappelons dans cette partie des inégalités de Carleman pour l'opérateur de Helmholtz avec conditions de Dirichlet. Ces résultats sont essentiellement contenus dans un article de G. Lebeau et L. Robbiano [9] quoique démontrés par ces auteurs pour l'opérateur de Laplace.

Soient  $\Omega$  un ouvert borné, de classe  $C^\infty$  et  $P = -h^2\Delta - 1$ , l'opérateur de Helmholtz, de symbole principal semi-classique  $p(x, \xi) = {}^t\xi A(x)\xi - 1$  défini pour  $h \in ]0, h_0]$ . Pour toute fonction  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ , on définit l'opérateur  $P_\varphi = e^{\varphi/h} P e^{-\varphi/h}$  de symbole principal  $p_\varphi = p(x, \xi + i\varphi'_x)$ .

On supposera par la suite que la fonction  $\varphi$  vérifie les hypothèses d'hypoellipticité de Hörmander:

$$(2.1) \quad \exists c > 0; \forall x \in \overline{\Omega} \forall \xi \in \mathbb{R}^d, p_\varphi(x, \xi) = 0 \Rightarrow \{\mathcal{R}ep_\varphi, \text{Imp}_\varphi\} \geq c$$

et

$$(2.2) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} |_{\partial\Omega} \neq 0 \text{ et } \nabla \varphi \neq 0 \text{ dans } \overline{\Omega}$$

PROPOSITION 2.1.— Soit  $\varphi$  vérifiant les relations (2.2) et (2.1). Il existe  $C > 0$ ,  $h_1 > 0$ , tels que pour tout  $0 < h < h_1$  et tout  $g \in C^\infty(\overline{\Omega})$  on a

$$(2.3) \quad \int_{\Omega} |P_\varphi(g)|^2 + h \int_{\partial\Omega} (|g|_{x_n=0}|^2 + |h\partial_{x'}g|_{x_n=0}|^2 + |\partial_{x_n}g|_{x_n=0}|^2) \\ \geq Ch \int_{\Omega} (|g|^2 + |h\nabla g|^2)$$

PROPOSITION 2.2.— Soient  $\varphi$  vérifiant les relations (2.2) et (2.1), et  $\Gamma \subset \partial\Omega$  une partie connexe du bord de  $\Omega$ . Si on suppose que  $\frac{\partial \varphi}{\partial n} < 0$  sur  $\Gamma$  ( $\frac{\partial}{\partial n}$  désigne la normale sortante sur le bord), alors il existe  $c > 0$ ,  $h_1 > 0$ , tels que pour tout  $0 < h < h_1$  et tout  $g \in C^\infty(\overline{\Omega})$  vérifiant  $g|_{\Gamma} = 0$ , on a

$$(2.4) \quad \int_{\Omega} |P_\varphi(g)|^2 + h \int_{\partial\Omega \setminus \Gamma} (|g|_{x_n=0}|^2 + |h\partial_{x'}g|_{x_n=0}|^2 + |\partial_{x_n}g|_{x_n=0}|^2) \\ \geq Ch \int_{\Omega} (|g|^2 + |h\nabla g|^2)$$

Les analogues de ces deux propositions sont démontrés par G. Lebeau et L. Robbiano, dans le cas où  $P = -h^2\Delta$  dans [9] (propositions 3.1 et 3.2). La démonstration dans notre cas ( $P = -h^2\Delta - 1$ ) est la même, mot pour mot.

## 2.2 Asymptotique des fonctions de Hankel

On étudie, dans cette partie les solutions sortantes de l'équation  $(\Delta + \lambda^2)u = 0$  à l'extérieur d'une boule  $B(0, R_1)$ . On a alors

**PROPOSITION 2.3.**— *Pour tous  $R_2 > R_1 > 0$ , il existe  $C, C', \eta > 0$  tels que pour toute solution sortante de l'équation  $(\Delta + \lambda^2)u = 0$  à l'extérieur de la boule  $B(0, R_1)$  et pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}; |Im\lambda| \leq 1$ , on a*

$$(2.5) \quad \int_{r=R_2} -Im(\partial_r u \bar{u}) d\sigma \geq |\lambda|C \int_{r=R_2} |u|^2 + |\lambda^{-1}\partial_r u|^2 + |\lambda^{-1}\partial_\theta u|^2 d\sigma \\ - C'e^{-\eta|\lambda|} \int_{r=R_1} |u|^2 d\sigma.$$

L'idée de la démonstration est d'établir que l'inégalité (2.5) est vraie dans la zone hyperbolique du cercle  $C(0, R_2)$ , sans le terme correctif donné par l'intégrale sur le cercle  $C(0, R_1)$  et de montrer en majorant l'effet tunnel entre  $C(0, R_1)$  et une géodésique de la zone glancing du cercle  $C(0, R_2)$  (donc tangente à ce cercle, donc qui ne rencontre pas le cercle  $C(0, R_1)$ ), que la contribution de la zone glancing peut être absorbée dans le terme correctif. Enfin, il ne reste plus qu'à montrer qu'il en est de même de la contribution de la zone elliptique. En fait la démonstration est simplifiée par la possibilité de se ramener à des calculs effectifs sur le comportement asymptotique des fonctions de Hankel. Ces calculs effectifs sont standard et connus dans la littérature sous le nom d'estimations de Debye (voir par exemple [16]).

## 2.3 Construction d'une phase vérifiant les hypothèses d'hypoellipticité de Hörmander

On construit dans cette partie une phase vérifiant les hypothèses d'hypoellipticité de Hörmander, radiale à l'extérieur d'une boule  $B(0, R_1)$  qui contient l'obstacle et la perturbation du Laplacien et telle que, pour  $r \geq R_1$ ,  $\varphi'(r) = \kappa$  avec  $\kappa > 0$  arbitrairement petit. Le point crucial de cette construction (et de tout l'exposé) est que le choix de  $R_1$  est indépendant de celui de  $\kappa > 0$ .  $R_1$  ne dépend que de  $A$  et  $\Theta$ .

### 2.3.1 Construction sur un domaine borné

Soit  $R > 0$  tel que  $\Theta \subset B(0, R)$  et  $A = Id$  sur  $B(0, R)^c$ . On commence par construire la phase sur  $B(0, R)$ . Pour cela, on choisit une fonction  $\psi \in C^\infty$  telle que  $\nabla\psi \neq 0$ ,  $\partial_n \psi|_{\partial\Theta} > 0$  ( $\partial_n$  est la normale extérieure à  $\Theta$ ). On cherche  $\varphi$  sous la forme  $e^{\beta\psi}$ , avec  $\beta$  grand. On va vérifier que pour  $\beta > 0$  assez grand, la fonction  $\varphi$  vérifie la relation (2.1)

sur  $\Omega = \Theta^c \cap B(0, R)$ . On a  $\varphi' = \beta e^{\beta\psi} \psi'$ ,  $\varphi'' = e^{\beta\psi} (\beta^2 \psi' {}^t\psi' + \beta \psi'')$  et si  $p_\varphi = 0$  alors

$$\begin{aligned}
 \{\text{Rep}_\varphi, \text{Imp}_\varphi\} &= 4 {}^t\xi A \varphi'' A \xi + 4 {}^t\varphi' A \varphi'' A \varphi' + 4 A' (\varphi', \varphi', A \varphi') \\
 &= 4 e^{\beta\psi} \beta {}^t\xi A \psi'' A \xi + 4 e^{3\beta\psi} (\beta^4 {}^t(\psi' A \psi')^2 + \beta^3 {}^t\psi' A \psi'' A \psi') \\
 &\quad + 4 e^{3\beta\psi} \beta^3 A' (\psi', \psi', A \psi') \\
 &= 4 e^{3\beta\psi} \left( \beta^4 ({}^t\psi' A \psi')^2 + \mathcal{O}(\beta^3) \right)
 \end{aligned}
 \tag{2.6}$$

d'où le résultat, puisque  $\psi' \neq 0$  et  $A \gg c \text{Id}$ ,  $c > 0$ . On remarque aussi, puisque  $\frac{\partial \psi}{\partial r} > 0$  sur  $\{|x| = R\}$  qu'il en est de même de  $\varphi$  et que la construction impose aussi  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} > 0$ .

### 2.3.2 Stabilisation de la phase à l'extérieur d'une boule

Il reste à prolonger cette phase sur  $B(0, R)^c \cap B(0, R_2)$  ( $R_1$  restant à fixer). Puisque la phase  $\varphi$  est radiale pour  $R - \alpha < |x| < R$  ( $\alpha > 0$  assez petit), on cherche ce prolongement sous la forme d'une fonction radiale. On passe pour cela en coordonnées polaires,  $(r, \rho, \theta, \eta)$  où  $\theta$  est la variable angulaire sur  $S^{d-1}$ . Dans ce système, on a  $p = \rho^2 + \frac{\eta^2}{r^2} - 1$  et  $p_\varphi = \rho^2 - (\varphi')^2 + \frac{\eta^2}{r^2} - 1 + 2i\rho\varphi'$ . On impose que  $\varphi'(r) > 0$ . On a donc  $p_\varphi = 0 \Rightarrow \rho = 0$  et  $\frac{\eta^2}{r^2} = 1 + \varphi'^2$  et sur l'ensemble  $p_\varphi = 0$  on a

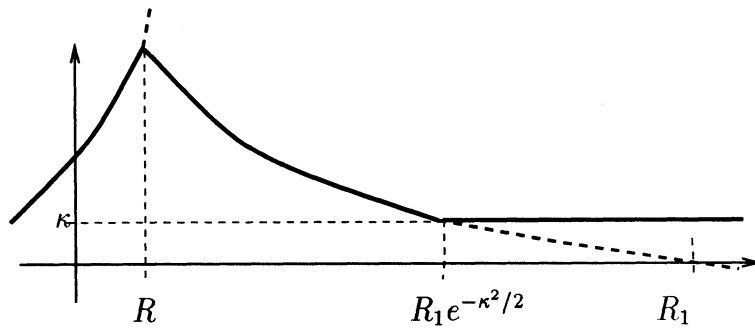
$$\begin{aligned}
 \{\text{Rep}_\varphi, \text{Imp}_\varphi\} &= 4\varphi'\varphi''\varphi' + 4\frac{\eta^2}{r^3}\varphi' \\
 &= 4\varphi' \left( \varphi''\varphi' + \frac{1+\varphi'^2}{r} \right)
 \end{aligned}
 \tag{2.7}$$

Or la solution,  $g$  de l'équation  $g''g' + \frac{1}{r} = 0$  vérifiant  $g(R) = \varphi'(R)$  est

$$g = \sqrt{(\varphi'(R))^2 - 2 \log \left( \frac{r}{R} \right)}.
 \tag{2.8}$$

Soit  $R_1 = R e^{\varphi'^2(R)/2}$  ( $R_1$  ne dépend donc que de  $A$  et de la géométrie de l'obstacle  $\Theta$ ). Soient  $\eta > 0$  vérifiant les conclusions de la proposition 2.3 (pour le choix de  $R_2 = R_1 + 1$ ) et  $0 < \kappa < \eta/2$ . On définit la fonction  $\tilde{\varphi}'$  par

$$\tilde{\varphi}'(r) = \begin{cases} \varphi(r) & \text{si } R - \alpha < r < R \\ g(r) & \text{si } R \leq r < R_1 e^{-\kappa^2/2} \\ \kappa & \text{si } R_1 e^{-\kappa^2/2} \leq r < R_2 \end{cases}
 \tag{2.9}$$



*Grappe de la fonction  $\tilde{\varphi}$ .*

Soient  $H \in C^\infty(\mathbb{R})$  égale à 0 pour  $r < R - \alpha/2$  et égale à 1 pour  $r > R - \alpha/3$ ,  $0 \leq H \leq 1$ ,  $H' \geq 0$  et  $h \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ , positive, d'intégrale égale à 1 et à support dans  $]0, 1[$ . On note  $h_\eta(r) = \frac{1}{\eta} h\left(\frac{r}{\eta}\right)$  et  $\varphi'_\eta = (1 - H)\tilde{\varphi}' + h_\eta * (H\tilde{\varphi}')$ . La fonction  $\varphi'_\eta(r)$  converge uniformément vers  $g(r)$  quand  $\eta$  tend vers  $0^+$  et il est facile de voir que pour  $\eta > 0$  assez petit, la fonction  $\varphi'_\eta$  permet de prolonger la phase  $\varphi$  à  $\Theta^c \cap B(0, R_2)$ , avec  $R_2 = R_1 + 1$  et d'assurer que la phase ainsi prolongée vérifie les hypothèses d'hypoellipticité de Hörmander, est radiale sur  $B(0, R_2) \setminus B(0, R_1)$  et vérifie  $\varphi'(r) = \kappa$ ;  $R_1 \leq r \leq R_2$ .

## 2.4 Démonstration du théorème 1

Soient  $f$  à support dans  $\Omega \cap B(0, R_1)$  et  $u$  solution sortante de l'équation de Helmholtz, avec conditions de Dirichlet sur  $\partial\Omega$ . D'après la proposition 2.2 appliquée à la fonction  $e^{\varphi/h}u$  et à  $\Omega = \Theta^c \cap B(0, R_2)$ , on a, si on note  $h = (\operatorname{Re}(\lambda^2))^{-1/2}$  et  $g = h^2(f - i\operatorname{Im}\lambda^2 u)$

$$(2.10) \quad \int_{\Omega} e^{\frac{2\varphi}{h}} |g|^2 + h \int_{r=R_2} (|u|^2 + |\nabla_r u|^2) \Big|_{r=R_2} e^{\frac{2\varphi(R_2)}{h}} \geq Ch \int_{\Omega} (|u|^2 + |h\nabla u|^2) e^{\frac{2\varphi}{h}}$$

$$(2.11) \quad \int_{\Omega \cap B(0, R_2)} e^{2\varphi/h} h^4 (|f|^2 + |\operatorname{Im}(\lambda^2)|^2 |u|^2) + h \int_{r=R_2} e^{2\varphi/h} (|u|^2 + |h\nabla u|^2) \Big|_{r=R_2} \\ \geq Ch \int_{\Omega \cap B(0, R_2)} e^{2\varphi/h} (|u|^2 + |h\nabla u|^2)$$

ce qui implique, d'après la proposition 2.3

$$(2.12) \quad \int_{\Omega \cap B(0, R_2)} e^{2\varphi/h} h^4 (|f|^2 + |\operatorname{Im}(\lambda^2)|^2 |u|^2) + h^2 e^{2\varphi(R_2)/h} \left| \int_{r=R_2} \operatorname{Im}(\partial_r u \bar{u}) \right| \\ \geq Ch \int_{\Omega \cap B(0, R_2)} e^{2\varphi/h} (|u|^2 + |h\nabla u|^2) - e^{(2\varphi(R_2) - \eta)/h} \int_{r=R_1} h^2 |u|^2$$

Or, d'après les théorèmes de trace,

$$(2.13) \quad \int_{\Omega} |u|^2 + |h\nabla u|^2 e^{2\varphi/h} \geq Ch^2 \int_{r=R_1} |u|^2 e^{2\varphi(R_1)/h}$$

donc, puisqu'on a choisi  $\kappa < \eta/2$  (et donc  $2\varphi(R_1) > 2\varphi(R_2) - \eta$ ), on obtient, d'après (2.12) et (2.13)

$$(2.14) \quad \int_{\Omega \cap B(0, R_2)} e^{2\varphi/h} h^4 (|f|^2 + |\operatorname{Im}(\lambda^2)|^2 |u|^2) + h^2 e^{2\varphi(R_2)/h} \left| \int_{\Omega \cap B(0, R_2)} \operatorname{Im}(\partial_r u \bar{u}) \right| \\ \geq Ch \int_{\Omega \cap B(0, R_2)} e^{2\varphi/h} (|u|^2 + |h\nabla u|^2)$$

Or, d'après la formule de Green,

$$(2.15) \quad \operatorname{Im} \int_{r=R_2} \partial_r u \bar{u} = \int_{\Omega \cap B(0, R_2)} (\operatorname{Im} f \bar{u} - \operatorname{Im}(\lambda^2) |u|^2)$$



On obtient finalement d'après (2.14) et (2.15),

$$(2.16) \quad e^{C/h} \int_{\Omega \cap B(0, R_2)} h^4 |f|^2 + h^2 |\operatorname{Im}(\lambda^2)|^2 |u|^2 + h^2 |f\bar{u}| \geq Ch \int_{\Omega} (|u|^2 + |h\nabla u|^2)$$

Si  $\operatorname{Im}\lambda < |\operatorname{Re}\lambda|^{-2} e^{-\frac{C}{4}|\operatorname{Re}\lambda|}$ , on a aussi  $e^{C/h} |\operatorname{Im}(\lambda^2)|^2 \leq 2$  ce qui permet d'absorber le terme en  $|\operatorname{Im}(\lambda^2)|^2 |u|^2$  par le terme de droite. En utilisant l'inégalité de Cauchy Schwartz on obtient alors

$$(2.17) \quad e^{C/h} \left( \int_{\Omega \cap B(0, R_2)} h^4 |f|^2 + \left( \int_{\Omega \cap B(0, R_2)} h^4 |f|^2 \right)^{1/2} \left( \int_{\Omega \cap B(0, R_1+1)} |u|^2 \right)^{1/2} \right) \\ \geq Ch \int_{\Omega \cap B(0, R_2)} (|u|^2 + |h\nabla u|^2)$$

le terme  $(\int |u|^2)^{1/2}$  de gauche peut être absorbé par le terme quadratique,  $(\int |u|^2)$  de droite, ce qui donne, si  $\operatorname{Im}\lambda < |\operatorname{Re}\lambda|^{-2} e^{-\frac{C}{4}|\operatorname{Re}\lambda|}$

$$(2.18) \quad e^{C'/h} \int_{\Omega \cap B(0, R_2)} |f|^2 \geq C \int_{\Omega \cap B(0, R_2)} (|u|^2 + |h\nabla u|^2)$$

Le théorème 1 est donc démontré.

## Références

- [1] C. Gérard. Asymptotique des pôles de la matrice de scattering pour deux obstacles strictement convexes. *Supplément au Bulletin de la Société Mathématique de France*, 116, 1988.
- [2] M. Ikawa. Decay of solution of the wave equation in the exterior of several convex bodies. *Annales de l'Institut Fourier*, 38(2):113–146, 1982.
- [3] M. Ikawa. Decay of solution of the wave equation in the exterior of two convex bodies. *Osaka Journal of Mathematics*, 19:459–509, 1982.
- [4] M. Ikawa. Trapping obstacles with a sequence of pôles converging to the real axis. *Osaka Journal of Mathematics*, 22:657–689, 1985.
- [5] M. Ikawa. On the poles of the scattering matrix for two convex obstacles. *Annales de l'Institut Fourier*, 38:113–146, 1988.
- [6] P. D. Lax and R. S. Phillips. The acoustic equation with an indefinite energy form and the schrödinger equation. *J. Funct. Analysis*, 1:37–83, 1967.
- [7] P. D. Lax and R. S. Phillips. *Scattering theory*. Number 26 in Pure and Applied Mathematics. Academic Press, 2 edition, 1989.

- [8] G. Lebeau. Equation des ondes amorties. A paraître à Algebraic and Geometric Methods in Mathematical Physics. Math-Physics Book Series Kluwer's.
- [9] G. Lebeau and L. Robbiano. Contrôle exact de l'équation de la chaleur. *Communications in Partial Differential Equation*, 20:335–356, 1995.
- [10] G. Lebeau and L. Robbiano. Stabilisation de l'équation des ondes par le bord. *Prépublications de l'université de Paris-Sud*, 95-40, 1995.
- [11] R.B. Melrose and J. Sjöstrand. Singularities of boundary value problems I. *Communications in Pure Applied Mathematics*, 35, 1982.
- [12] C. S. Morawetz, J. V. Ralston, and W. Strauss. Decay of solutions of the wave equation outside non-trapping obstacles. *Communications in Pure and Applied Mathematics*, 30:447–508, 1977.
- [13] J. V. Ralston. Solutions of the wave equation with localized energy. *Comm. in Pure and Applied Mathematics*, 22:807–823, 1969.
- [14] J. V. Ralston. Trapped rays in spherically symmetric media and poles of the scattering matrix. *Comm. in Pure and Applied Mathematics*, XXIV:571–582, 1971.
- [15] H. F. Walker. Some remarks on the local energy decay of solution of the initial-boundary value problem for the wave equation in unbounded domains. *Journal of Differential Equations*, 23:459–471, 1977.
- [16] G. N. Watson. *Theory of Bessel functions*. Cambridge University Press, second edition edition, 1944.