JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

VINCENT BRUNEAU

Asymptotique de la phase de diffusion à haute énergie pour l'opérateur de Dirac

Journées Équations aux dérivées partielles (1996), p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1996____A6_0>

Asymptotique de la phase de diffusion à haute énergie pour l'opérateur de Dirac

Vincent BRUNEAU
Département de mathématiques-URA CNRS 758
Université de Nantes
2, rue de la Houssinière - F-44 072 NANTES Cedex 03
E-mail : bruneau@math.univ-nantes.fr

Résumé— Nous étudions le comportement asymptotique, quand $\lambda \to \pm\infty$, de la phase de diffusion (ou fonction spectrale de perturbation) $s_H(\lambda)$, pour H, l'opérateur de Dirac perturbé par un potentiel à courte portée. Une formule de type Weyl est établie pour un potentiel électromagnétique. Si le potentiel est uniquement magnétique, le développement asymptotique complet de s_H est donné en utilisant des propriétés de supersymétrie que nous exploitons aussi pour aborder l'étude de l'opérateur de Hodge-Dirac.

Asymptotic of the scattering phase for the Dirac operator: High energy

Abstract— We examine the scattering phase related to electromagnetic perturbations of the Dirac operator. For a short-range electromagnetic potential, we prove a Weyl type formula. For a magnetic potential, we obtain a full asymptotic expansion using a supersymmetry property. Using the same arguments we study the scattering phase for the Hodge-Dirac operator.

1 Introduction

Nous considérons l'opérateur de Dirac dans $I\!R^3$ avec champ électro-magnétique:

$$H = c\sum_{j=1}^{3} \alpha_j.(\hbar D_j - A_j(x)) + \beta mc^2 + V(x), \qquad D_j \stackrel{\text{def}}{=} -i\partial_{x_j},$$

où $\{\alpha_j\}_{j=1}^3$ et β sont les matrices 4×4 de Dirac, $A = (A_1, A_2, A_3)$ est le potentiel magnétique et $V = \begin{pmatrix} V_+ 1_2 & 0 \\ 0 & V_- 1_2 \end{pmatrix}$ avec $V_\pm$ scalaire (1_2 est la matrice identité de $\mathbb{C}^2$). Les constantes physiques c (vitesse de la lumière), m (masse) et $\hbar$ (constante de Planck) sont fixées.

Nous supposons que les potentiels sont C^∞ et qu'il existe $\delta > 0$ tel que :
(H_δ): $\quad \forall \alpha \in I\!N^3, \quad |\partial_x^\alpha A(x)| + |\partial_x^\alpha V(x)| = O(<x>^{-\delta-|\alpha|}), \quad <x> \stackrel{\text{def}}{=} (1+|x|^2)^{\frac{1}{2}}$.

On note encore H, l'extension autoadjointe sur $\left(L^2(I\!R^3)\right)^4$, de domaine $\left(H^1(I\!R^3)\right)^4$.

H est une perturbation de l'opérateur de Dirac libre $H_0 = c\alpha.D + mc^2\beta$ dont le spectre est purement absolument continu :

$$\sigma(H_0) = \sigma_c(H_0) = \sigma_{ac}(H_0) =]-\infty, -mc^2] \cup [mc^2, +\infty[.$$

Pour $\delta > 1$, on a les propriétés suivantes ([17], [19]) :

(i) Les opérateurs d'onde associés au couple (H, H_0) existent et sont complets.

(i) Le spectre essentiel de H est égal à $]-\infty, -mc^2] \cup [mc^2, +\infty[$.

(iii) Le spectre singulièrement continu de H est vide.

(iv) Les valeurs propres de H sont localisées dans $[-mc^2, mc^2]$.

Dans cet article, nous étudions les propriétés asymptotiques du spectre continu de H, à l'aide de la phase de diffusion, définie comme suit, pour la paire (H, H_0).

D'après (i), l'opérateur de diffusion, S, est défini et unitaire. L'opérateur S commute avec H_0, sa représentation en énergie $S(\lambda)$ définit la matrice de diffusion, pour $\lambda \in]-\infty, -mc^2] \cup [mc^2, +\infty[$. L'opérateur $S(\lambda)$ est unitaire sur $L^2(S^2)^4$ (S^2 est la sphère unité de $I\!R^3$).

Pour $\delta > 3$, $S(\lambda) - 1$ est un opérateur de classe trace dans $L^2(S^2)^4$, et l'égalité suivante définit la phase de diffusion $s(\lambda)$ (modulo $Z\!\!\!Z$) : $\det(S(\lambda)) = \exp(-2i\pi s(\lambda))$. D'après la théorie de Birman-Krein [2], on peut définir la phase de diffusion globalement sur $I\!R$, à une constante près, par la formule de Krein:

$$Tr\Big(f(H) - f(H_0)\Big) = \int_{I\!R} s(\lambda) f'(\lambda) d\lambda, \qquad \forall f \in \mathcal{S}(I\!R). \tag{1}$$

Celle-ci étend, au spectre continu, la notion de fonction de répartition des valeurs propres.

L'hypothèse (H_δ) entraine que $s \in C^\infty(]-\infty, -mc^2[\cup]mc^2, +\infty[)$. Ceci se démontre comme pour l'opérateur de Schrödinger (cf. corollaire 5.8 de [13]) à partir de la représentation stationnaire de la matrice de diffusion donnée par E. Balslev et B. Helffer [1].

Dans cet article, on fixe $m = c = \hbar = 1$, et on étudie le comportement asymptotique de $s(\lambda)$ quand $\lambda \longrightarrow \pm\infty$. Cela revient à étudier celui de $s_h(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} s(\frac{\mu}{h})$ pour $\pm\mu > 0$ fixé quand $h \searrow 0$. Au paragraphe 3, on commence par faire une étude au sens des distributions. D'après la formule de Birman-Krein (1), cela consiste à étudier le comportement asymptotique quand $h \searrow 0$ de $Tr\Big(f(hH) - f(hH_0)\Big)$ pour $f \in \mathcal{S}(I\!R)$.

Ensuite, on considère $s(\lambda)$ non plus comme distribution, mais comme fonction. L'existence d'une asymptotique du type Weyl est établie au paragraphe 4. Celle-ci repose sur la construction d'une paramétrix du propagateur à temps petit.

Enfin, nous donnons un développement asymptotique complet de $s(\lambda)$ dans le cas particulier $V = 0$. Celui-ci se déduit directement de l'étude réalisée par D. Robert [13] pour des opérateurs de type Schrödinger, en utilisant les propriétés de supersymétrie que possède l'opérateur de Dirac avec champ magnétique. Nous indiquons de plus comment ces propriétés permettent aussi d'étudier l'opérateur de Hodge-Dirac grâce à un théorème d'Indice Relatif (cf. [3]).

Les principaux résultats présentés ici étaient annoncés dans [5] et résument essentiellement les chapitres 2 et 3 de [4].

2 Enoncés des résultats

Nous utiliserons librement la théorie des opérateurs pseudo-différentiels. Une quantification bien adaptée au calcul de traces est la quantification de Weyl. A un symbole a et un réel $h > 0$, elle associe un opérateur $Op_h^w(a)$ défini pour $u \in \mathcal{S}(I\!R)$, par :

$$(Op_h^w(a)u)(x) = (2\pi)^{-n} \int \int e^{i(x-y,\xi)} a(\frac{x+y}{2}, h\xi) u(y) dy d\xi.$$

Pour plus de détails concernant les classes de symboles, nous renvoyons au livre [11] et au paragraphe 1.8 de [4].

Dans la suite, $a_0(\xi) = \alpha.\xi$ désigne le symbole principal de H, et $a_1(x) = -\alpha.A(x) + \beta mc^2 + V(x)$ le symbole sous principal (a_0 et a_1 sont des matrices). L'opérateur hH est h-admissible : $hH = Op_h^w(a_0) + hOp_h^w(a_1)$.

Théorème 2.1 (Asymptotique au sens faible):

Soit $\phi \in \mathcal{S}(I\!R)$ nulle au voisinage de 0. Sous l'hypothèse (H_δ), on a :

i) L'opérateur $\phi(hH)$ est h-admissible de symbole principal $\phi(a_0)$, et de symbole sous-principal :

$$a_{\phi,1} = a_{1,D}\phi'(a_0) + \frac{1}{2} a_{1,M}(a_0)^{-1}\Big(\phi(a_0) - \phi(-a_0)\Big), \tag{2}$$

où $a_{1,D} = P^+a_1P^+ + P^-a_1P^-$ et $a_{1,M} = P^+a_1P^- + P^-a_1P^+$, $P^\pm \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\Big(1 \pm \frac{\alpha.\xi}{|\xi|}\Big)$ étant la projection orthogonale sur le sous-espace propre associé à la valeur propre $\pm \mid \xi \mid$ de $\alpha.\xi$.

ii) Si de plus $\delta > 3$, alors on a le développement asymptotique suivant :

$$Tr(\phi(hH) - \phi(hH_0)) \asymp (2\pi h)^{-3} \sum_{j \geq 1} \gamma_j(\phi) h^j \qquad \text{lorsque } h \searrow 0$$

Les coefficients $\gamma_j(\phi)$ sont des distributions par rapport à ϕ, calculables en fonction de A, V et leurs dérivées.

Notons que le phénomène d'interaction entre les énergies positives et négatives, propre à la théorie de Dirac, apparait dans le symbole sous-principal avec $a_{1,M}$.

Théorème 2.2 (Formule de type Weyl):

On suppose (H_δ), avec $\delta > 3$. On a alors, une asymptotique du type Weyl pour $s(\lambda)$:

$$s(\lambda) = (2\pi)^{-3}\alpha_1\lambda^2 + O(\lambda)\ , \qquad \lambda \to \pm\infty.$$

avec $\alpha_1 = 4\pi \int_{I\!R^3} (V_+ + V_-)(x)dx$.

Actuellement, l'existence d'un développement asymptotique complet n'est pas établie. Une différence importante avec l'opérateur de Schrödinger est que la norme (dans un espace à poids) de la résolvante au bord (définie par le principe d'absorption limite) ne temps pas vers 0 avec $1/\sqrt{\lambda}$, elle est seulement bornée (cf. [10]).

Par contre, si $V = 0$, on montre que l'étude de la phase de diffusion pour l'opérateur de Dirac avec champ magnétique se ramène facilement à celle des opérateurs du type Schrödinger. On a alors :

Théorème 2.3 ($V = 0$): *On suppose que V est nul et que A vérifie (H_δ), avec $\delta > 3$. On a alors l'asymptotique complète suivante :*

$$\frac{ds}{d\lambda}(\lambda) \asymp \pm(2\pi)^{-3}\lambda^{-2} \sum_{j\geq 0} \beta_j \lambda^{-2j}\ , \qquad \lambda \to \pm\infty,$$

avec $\beta_0 = \frac{8\pi}{3} \int_{I\!R^3} B(x)^2 dx$ où $B = rot(A)$ est le champ magnétique.

De plus, cette asymptotique est dérivable à tout ordre par rapport à λ.

3 Asymptotique faible

Pour la démonstration du théorème 2.1, nous renvoyons aux méthodes standards de calcul fonctionnel et de calcul de trace déjà employées pour des opérateurs de type Schrödinger (cf. [8], [11], [6], [13]...).

Notons cependant que la principale différence est que H est de symbole principal matriciel non semi-borné. Nous précisons donc comment établir que $\phi(hH)$ est h-admissible et comment calculer son symbole.

Pour démontrer que $\phi(hH)$ est h-admissible, une première méthode consiste à utiliser les extensions presque analytiques comme le suggèrent B. Helffer et J. Sjöstrand [9]. Celle-ci permet de relier $\phi(hH)$ directement à la résolvante $(hH - z)^{-1}$.

Une autre solution, plus spécifique à l'opérateur de Dirac, est de séparer les énergies positives et négatives, grâce à la relation suivante :

$$\phi(\lambda) = \frac{1}{2}(1 + \frac{\lambda}{|\lambda|})\phi(|\lambda|) + \frac{1}{2}(1 - \frac{\lambda}{|\lambda|})\phi(-|\lambda|), \quad \text{si} \quad \lambda \neq 0. \tag{3}$$

Ainsi, l'étude de $\phi(hH)$ se ramène au calcul fonctionnel de h^2H^2 et à la composition par hH. Le symbole principal de H^2 étant de type scalaire : $a_0{}^2(\xi) = (\alpha.\xi)^2 = |\xi|^2 I_4$ on utilise les études déjà réalisées pour des perturbations du laplacien (cf. [6], [11], [12] ...).

On établit ainsi que $\phi(hH)$ est h-admissible i.e. que son symbole a_ϕ admet un développement en puissances de h. Pour l'expression des coefficients, nous reprenons la méthode de Seeley [16], utilisée dans des contextes voisins dans [11], [8], [6], [13]. Cependant, la non commutativité des symboles matriciels complique un peu la détermination des $a_{\phi,l}$. Nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 3.1 *Soit a un symbole matriciel (d'ordre 4) et $a_0(\xi) = \alpha.\xi$, le symbole principal de H. Pour toute fonction définie sur $I\!R$, on a :*

$$f(a_0)a = a_D f(a_0) + a_M f(-a_0),$$

où $a_D = P^+aP^+ + P^-aP^-$ et $a_M = P^+aP^- + P^-aP^+$, $P^\pm \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{\alpha.\xi}{|\xi|}\right)$ étant la projection orthogonale sur le sous-espace propre associé à la valeur propre $\pm |\xi|$ de $\alpha.\xi$.

Preuve.– On utilise que $P^+ + P^- = Id$ et que $f(a_0)P^\pm = f(\pm |\xi|)P^\pm$. ∎

4 Formule de Weyl

Pour démontrer le théorème 2.2, nous nous inspirons de [13] où D. Robert montre une formule de type Weyl pour des perturbations du laplacien. Comme pour le sens faible, le fait que l'opérateur soit matriciel et non semi-borné nécessite des adaptations.

Avant de démontrer la formule de Weyl donnons une propriété de symétrie qui permet de limiter notre étude aux énergies positives.

Proposition 4.1 *On suppose (H_δ) avec $\delta > 3$. Soit s_- la phase de diffusion associée aux potentiels $(-A, -\bar{V})$ où $\bar{V} = \begin{pmatrix} V_- 1_2 & 0 \\ 0 & V_+ 1_2 \end{pmatrix}$. On a la propriété de symétrie :*

$$s_-(\lambda) = -s(-\lambda).$$

Preuve.– Cette propriété résulte de la cyclicité de la trace et de l'existence d'un opérateur C (opérateur de configuration de charge), unitaire sur $L^2(I\!R^3, I\!R^4)$, tel que :

$$CHC^{-1} = H_-,$$

où H_- est l'opérateur de Dirac associé au potentiel $(-A, -\bar{V})$ (cf. paragraphe 1.4.6 de [17]). ■

Formellement, $s(\lambda)$ s'exprime en fonction de la différence des projecteurs spectraux de H et H_0. Comme dans [13], nous commençons par l'exprimer uniquement en fonction du projecteur spectral de H. Introduisons :

$$Q := H^2 - H_0^2, \qquad \mathcal{A} := \frac{1}{2}(x.D + D.x).$$

L'opérateur différentiel Q est d'ordre 1 à coefficients matriciels décroissants comme A et V (cf. (H_δ)). Ici, le générateur des dilatations $\mathcal{A}$ est considéré comme opérateur agissant sur $L^2(I\!R^3, \mathbb{C}^4)$.

Proposition 4.2 *On suppose (H_δ) avec $\delta > 3$. Soit $f \in C_0^\infty(]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[)$, on a :*

$$\int_{I\!R} s(\lambda) f'(\lambda) d\lambda = Tr\Big((Q - \frac{i}{2}[Q, \mathcal{A}])(H^2 - 1)^{-1} f(H)\Big).$$

Preuve.– Ce résultat repose sur la relation $i[-\Delta, \mathcal{A}] = -2\Delta$ et sur la cyclicité de la trace. En effet, on a :

$$2(H_0^2 - I) = i[H_0^2, \mathcal{A}] \quad \text{et} \quad 2(H^2 - I) = i[H^2, \mathcal{A}] + (2Q - i[Q, \mathcal{A}]),$$

et la trace étant cyclique (cf. Appendice A de [13]), on obtient :

$$Tr\big(f(H) - f(H_0)\big) = Tr\Big((Q - \frac{i}{2}[Q, \mathcal{A}])(H^2 - 1)^{-1} f(H)\Big).$$

La formule de Krein donne alors le résultat. ■

Il résulte de cette proposition une expression de $s(\lambda)$ en fonction de $E_H(\lambda_0, \lambda)$ ($\lambda > \lambda_0 > 1$), le projecteur spectral associé à H, sur l'intervalle $[\lambda_0, \lambda]$.

Corollaire 4.3 *Soit $\chi \in C^\infty(I\!R)$ une fonction de troncature valant 1 sur $[2, +\infty[$ et nulle sur $]-\infty, \frac{3}{2}]$. Alors, pour tout $\lambda > \lambda_0 > 2$, nous avons:*

$$s(\lambda) - s(\lambda_0) = Tr\Big((Q - \frac{i}{2}[Q, \mathcal{A}])\frac{\chi(H)}{(H^2 - 1)} E_H(\lambda_0, \lambda)\Big)$$

Pour étudier la phase de diffusion en $\lambda = +\infty$, nous introduisons un paramètre $h > 0$. Pour μ dans un compact de $]0, +\infty[$, on pose:

$$s_h(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} s(\frac{\mu}{h}) - s(\lambda_0), \tag{4}$$

et nous nous intéressons au comportement de $s_h(\mu)$ en $h = 0^+$, pour μ fixé.

On décompose s_h en une partie décrivant le bas du spectre continu et une autre localisée autour de μ/h :

Soient χ_1 et χ_2 deux fonctions positives de $C_0^\infty(I\!R)$, telles que $\chi_1 + \chi_2 = 1$ sur $[0,3]$, supp$\chi_1 \subset]-\infty, 1]$, supp$\chi_2 \subset]0,4]$. Alors, il existe $h_0 > 0$ tel que pour tout $h \in]0, h_0]$ et tout $\mu \in [1,3]$, on ait une décomposition de $s_h(\mu)$: $s_h(\mu) = s_{1,h}(\mu) + s_{2,h}(\mu)$, avec

$$\begin{cases} s_{1,h}(\mu) & \stackrel{\text{def}}{=} \; Tr\Big((Q - \frac{i}{2}[Q,\mathcal{A}])\chi(H)(H^2-1)^{-1}\chi_1(hH)\Big) \\ s_{2,h}(\mu) & \stackrel{\text{def}}{=} \; Tr\Big((Q - \frac{i}{2}[Q,\mathcal{A}])\chi_2(hH)(H^2-1)^{-1}E_h(\mu)\Big) \end{cases}$$

où E_h est la projection spectrale associée à hH.

Comme $s_{1,h}$ ne dépend pas de la projection spectrale, le calcul fonctionnel pour des fonctions régulières nous donne l'existence d'un scalaire $\alpha_{1,0}$ dépendant des potentiels A et V, tel que:

$$s_{1,h} = h^{-2}\alpha_{1,0} + O(h^{-1}) \tag{5}$$

Pour l'étude de $s_{2,h}$, nous nous inspirons d'une méthode de Hörmander-Levitan employée dans [7], [13]... L'idée est d'appliquer un théorème taubérien et de procéder comme dans [8] et [15]. Pour cela, on commence par ramener l'étude de $s_{2,h}$ à celle de fonctions croissantes du type :

$$s_{W,h}(\mu) := hTr\Big(W(h)\chi_2(hH)E_h(\mu)\Big), \tag{6}$$

avec $W(h)$ opérateur positif, h-admissible, de poids $< x >^{-\delta}$. Comme dans [13], il suffit de décomposer $s_{2,h}$ sous la forme : $s_{2,h}(\mu) = s_{W^+,h}(\mu) - s_{W^-,h}(\mu)$, avec $W^\pm(h)$ tels que :

$$(W^+ - W^-)(h)\chi_2(hH) = h(Q - \frac{i}{2}[Q,\mathcal{A}])(h^2H^2 - h^2)^{-1}\chi_2(hH).$$

Le support de χ_2 étant inclus dans $]0,4]$, $s_{W,h}$ est nulle pour $\mu \leq 0$ et est constante pour $\mu \geq 4$. D'autre part, il résulte du calcul fonctionnel (théorème 2.1) et des théorèmes de traces d'opérateurs h-admissibles (cf. [11]), que l'on a :

$$s_{W,h}(\mu) = O(h^{-2}) \qquad h \to 0,$$

uniformément par rapport à $\mu \in I\!R$.

Pour appliquer le théorème taubérien, il reste alors à étudier le comportement asymptotique, quand h tend vers 0 de $\frac{d}{d\mu}(s_{W,h} * \theta_h)(\mu)$, où θ_h est une fonction régularisante définie de la façon suivante :

Soit $\zeta \in C_0^\infty(]-T,T[)$, $(T > 0$ fixé), tel que $\zeta(0) = 1$. La fonction θ_h est définie par:

$$\theta_h(\mu) = \frac{1}{2\pi h}\hat{\zeta}(\frac{\mu}{h}) \qquad \mu \in I\!R$$

Pour étudier la convolution, nous procédons de façon analogue à [8], [15], et on établit :

Proposition 4.4 *Sous l'hypothèse (H_δ) avec $\delta > 3$, $\frac{d}{d\mu}(s_{W,h}*\theta_h)(\mu)$ admet un développement asymptotique complet:*

$$\frac{d}{d\mu}(s_{W,h} * \theta_h)(\mu) \asymp h^{-2}\sum_{j\geq 0} C_{j,W}(\zeta,\mu)h^j \qquad h \to 0$$

De plus, les distributions $\zeta \mapsto C_{j,W}(\zeta,\mu)$ ne dépendent que du germe de ζ à l'origine et les fonctions $\mu \mapsto C_{j,W}(\zeta,\mu)$ appartiennent à $C_0^\infty(I\!R)$.

La preuve de ce résultat repose sur la proposition suivante, donnant une paramétrix, à temps petit, du propagateur $U(t) = e^{itH}$:

Proposition 4.5 *Soit $U(t) := e^{itH}$ le propagateur associé à l'opérateur de Dirac H. Il existe un famille d'opérateurs $\{\tilde{U}_h^N(t)\}_{t,N,h}$ $t \in I\!R$, $N \in I\!N$, $h \in]0, h_0]$ de sorte que pour tout $\chi \in C_0^\infty(I\!R \setminus 0)$, pour tout $N \in I\!N$ et $T > 0$, on ait*

$$\| U(t)\chi(hH) - \tilde{U}_h^N(t)\chi(hH) \| = O(h^{N-3} \mid t \mid), \qquad pour \quad t \in [-T, T].$$

De plus, $\tilde{U}_h^N(t)$ est de la forme:

$$\tilde{U}_h^N(t) = \tilde{U}_h^{N,+}(t) + \tilde{U}_h^{N,-}(t),$$

où $\tilde{U}_h^{N,\pm}(t)$ est un Opérateur Fourier Intégral (O.F.I.) de phase $\pm t \mid \xi \mid \tilde{\chi}(\mid \xi \mid) + x.\xi$, avec $\tilde{\chi} \in C^\infty(I\!R^+ \setminus 0)$ telle que $\tilde{\chi}\chi = \chi$et d'amplitude une matrice 4×4 polynômiale, d'ordre N, par rapport à h.

Preuve de la proposition 4.4. – Par définition de $s_{W,h}$ (cf. (6)), on a:

$$\frac{d}{d\mu}(s_{W,h} * \theta_h)(\mu) \;=\; \frac{h}{2\pi h} Tr\Big(W(h)\chi_2(hH) \int_{I\!R} \zeta(t) e^{-\frac{it\mu}{h}} e^{itH} dt\Big)$$

D'après la proposition 4.5, on peut approcher $\frac{d}{d\mu}(s_{W,h} * \theta_h)(\mu)$ par $\tau_{W,h}^N = \tau_{W,h}^{N,+} + \tau_{W,h}^{N,-}$ où :

$$\tau_{W,h}^{N,\pm}(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{h}{2\pi h} Tr\Big(W(h)\chi_2(hH) \int_{I\!R} \zeta(t) e^{-\frac{it\mu}{h}} \tilde{U}_h^{N,\pm}(t) dt\Big)$$

Nous utilisons les théorèmes généraux relatifs à la composée d'un opérateur pseudo-différentiel par un O.F.I. (cf. par exemple théorème IV-24 de [11]), et au calcul de trace d'O.F.I. (cf. par exemple chap. III.10 de [?]), pour exprimer $\tau_{W,h}^{N,\pm}$ comme une intégrale dépendant du paramètre h. La méthode de la phase stationaire (pour $\pm\mu > 0$) et de la phase non stationaire (pour $\pm\mu < 0$) donnent la proposition 4.4. ∎

Preuve de la proposition 4.5. – Le symbole principal de H, $a_0 = \alpha.\xi$, est une matrice ayant deux valeurs propres, $\pm \mid \xi \mid$, de multiplicité deux. On cherche donc à approcher le propagateur, $U(t)$, par la sommme de deux Opérateur Fourier Intégraaux (O.F.I), d'amplitudes, matricielles, polynomiales par rapport à h (cf. K. Yajima [18] pour le cas semi-classique). Par une méthode B.K.W., et en projetant les équations de transport sur les sous-espaces propres $\mathcal{E}^\pm$ associés aux valeurs propres $\pm \mid \xi \mid$, nous construisons une paramétrix de $U(t)$ pour des énergies non nulles. On utilise notamment que pour $d_A = D_x - A$, $v = (V_+ + V_-)/2$, $\tilde{v} = 1 + (V_+ - V_-)/2$, l'opérateur de Dirac, H, s'écrit : $H_x = \alpha.d_A + \beta\tilde{v} + v$ et vérifie

$$P^\pm H_x = (\alpha.d_A \pm \frac{\xi}{\mid \xi \mid}.d_A + \beta\tilde{v})P^\mp + (v \pm \frac{\xi}{\mid \xi \mid}.d_A)P^\pm \tag{7}$$

où $P^\pm = 1/2(1 \pm \alpha.\xi / \mid \xi \mid)$ sont les projections orthogonales sur $\mathcal{E}^\pm$. ∎

5 Supersymétrie

L'opérateur de Dirac avec uniquement un potentiel magnétique entre dans le cadre abstrait des opérateurs de Dirac supersymétriques. Il s'agit d'opérateurs qui, sur un espace $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$, sont de la forme :

$$H = \begin{pmatrix} \tilde{m}Id & \mathcal{D}^* \\ \mathcal{D} & -\tilde{m}Id \end{pmatrix}, \tag{8}$$

$\tilde{m}$ étant un réel strictement positif et $\mathcal{D}^*$ l'adjoint de $\mathcal{D}$.

L'avantage de ces opérateurs de Dirac est que leurs énergies positives et négatives sont bien séparées. Ceci se traduit par l'existence d'un opérateur unitaire U_{FW} tel que :

$$U_{FW} \begin{pmatrix} \tilde{m}Id & \mathcal{D}^* \\ \mathcal{D} & -\tilde{m}Id \end{pmatrix} U_{FW}^* = \begin{pmatrix} \sqrt{\mathcal{D}^*\mathcal{D} + m^2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{\mathcal{D}\mathcal{D}^* + m^2} \end{pmatrix}.$$

(cf. théorème 5.13 de [17]). Par conséquent, comme nous le montrons maintenant, la phase de diffusion pour l'opérateur de Dirac avec potentiel magnétique est liée à celle associée à son carré, dont le comportement asymptotique est connu (cf. [13]).

De façon analogue, en utilisant un théorème d'indice dû à N.V. Borisov, W. Müller et R. Schrader [3], nous pourrons aborder l'étude de l'opérateur de Hodge-Dirac agissant sur les formes différentielles, dont le carré est l'opérateur de Hodge-Laplace.

5.1 Dirac avec champ magnétique

L'opérateur de Dirac avec champ magnétique $H_A = c\alpha.(D - A) + mc^2\beta$ est un opérateur de Dirac supersymétrique. Il est de la forme (8) avec :

$$\mathcal{H}_+ = \mathcal{H}_- = L^2(I\!R^3)^2, \qquad \tilde{m} = mc^2, \qquad \mathcal{D}^* = \mathcal{D} = c\sigma.(\hbar D - A(x)).$$

σ_1, σ_2 et σ_3 étant les 2×2-matrices de Pauli.

Pour démontrer le théorème 2.3, nous montrons que la phase de diffusion pour le couple (H_A, H_0) est directement liée à la phase de diffusion pour des opérateurs de Pauli.

Comme précédemment, nous posons $m = c = \hbar = 1$.

Lemme 5.1 *On suppose que le champ magnétique A vérifie (H_δ) avec $\delta > 3$. Pour toute fonction $\phi \in C_0^\infty(]0, +\infty[)$, on a :*

$$Tr\Big(H_A\phi(H_A^2) - H_0\phi(H_0^2)\Big) = 0.$$

Preuve.– Dans $\mathcal{L}(L^2(I\!R^3)^2 \oplus L^2(I\!R^3)^2)$, $H_A\phi(H_A^2)$ s'exprime matriciellement par :

$$H_A\phi(H_A^2) = \begin{pmatrix} \phi(\mathcal{D}_A^*\mathcal{D}_A + 1_2) & \mathcal{D}_A^*\phi(\mathcal{D}_A\mathcal{D}_A^* + 1_2) \\ \mathcal{D}_A\phi(\mathcal{D}_A^*\mathcal{D}_A + 1_2) & -\phi(\mathcal{D}_A\mathcal{D}_A^* + 1_2) \end{pmatrix},$$

(de même pour $H_0\phi(H_0^2)$). Or, ici $\mathcal{D}_A^* = \mathcal{D}_A = \sigma.(D - A)$, et donc pour $L_A = \mathcal{D}_A^2 + 1_2$, on a :

$$Tr\Big(H_A\phi(H_A^2) - H_0\phi(H_0^2)\Big) = Tr\Big(\phi(L_A) - \phi(L_0)\Big) - Tr\Big(\phi(L_A) - \phi(L_0)\Big)$$

ce qui est évidemment nul. D'où le lemme. ■

En appliquant la formule de séparation des énergies (3), et le lemme précédent à $\phi(\lambda) = (\sqrt{\lambda})^{-1}f(\pm\sqrt{\lambda})$, on obtient :

Proposition 5.2 *On suppose que le champ magnétique A vérifie (H_δ) avec $\delta > 3$. Pour toute fonction $f \in C_0^\infty(I\!R \setminus \{0\})$, on a :*

$$Tr\Big(f(H_A) - f(H_0)\Big) = \frac{1}{2}Tr\Big(f(\mid H_A \mid) - f(\mid H_0 \mid)\Big) + \frac{1}{2}Tr\Big(f(-\mid H_A \mid) - f(-\mid H_0 \mid)\Big).$$

Dans le corollaire suivant, nous en déduisons une relation entre la phase de diffusion pour la paire (H_A, H_0) et celle pour la paire (h_A, h_0) d'opérateurs de Pauli :

$$h_A \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(\sigma.(D-A))^2}{2} \quad , \qquad h_0 \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{\Delta}{2}1_2.$$

Corollaire 5.3 *On suppose que A vérifie (H_δ) avec $\delta > 3$. Les phases de diffusion s_D^A et s_P^A, associées respectivement aux couples (H_A, H_0) et (h_A, h_0) sont définies et vérifient :*

$$s_D^A(\lambda) = \pm\, s_P^A(\frac{\lambda^2 - 1}{2}) \quad ; \qquad \pm\lambda > 1. \tag{9}$$

(on a pris s_D^A nulle sur $]-1,1[$ et s_P^A nulle sur $]-\infty,0[$)

Preuve.– D'après la formule de Krein (1) appliquée à la phase s_D pour la paire (H_A, H_0) et à la phase s_L pour la paire (H_A^2, H_0^2), la proposition précédente donne que pour toute fonction $f \in C_0^\infty(I\!R \setminus \{0\})$, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s_D(\mu) f'(\mu) d\mu = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} s_L(\mu^2) f'(\mu) d\mu - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} s_L(\mu^2) f'(\mu) d\mu.$$

Les fonctions s_D et s_L étant régulières respectivement sur $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ et $]1,+\infty[$, on en déduit que pour $\pm\mu > 1$ on a :

$$s_D(\mu) = \pm\frac{1}{2}s_L(\mu^2).$$

Pour conclure, il reste à constater que dans $\mathcal{L}(L^2(I\!R^3)^2 \oplus L^2(I\!R^3)^2)$, on a : $H_A^2 = (2h_A + 1_2) \otimes 1_2$ et donc que $s_L(\lambda) = 2s_P((\lambda - 1)/2)$. ■

Pour obtenir l'asymptotique complète du théorème 2.3, on peut alors utiliser les travaux de D. Robert [13] où l'existence d'un développement asymptotique complet de la phase de diffusion est établie pour des perturbations du laplacien, en particulier pour s_P^A.

5.2 Opérateur de Hodge-Dirac

Un second exemple standard d'opérateur de Dirac supersymétrique est l'opérateur de Hodge-Dirac agissant sur l'espace des formes différentielles, dont le carré est l'opérateur de Hodge-Laplace.

Ces opérateurs sont définis sur M, une variété Riemannienne complète, de la façon suivante. Soit d la différentielle extérieure et δ la codifférentielle (i.e. l'adjoint de d par la dualité de Hodge). Alors $Q = d + \delta$ est un opérateur autoadjoint sur $\mathcal{H}$, l'espace des formes différentielles de carré intégrable. Si P désigne l'opérateur qui à une p-forme associe l'entier p, alors $\tau = (-1)^P$ est une involution unitaire autoadjointe telle que $\tau Q + Q\tau = 0$. Ainsi, Q est une supercharge par rapport à τ, $Q^2 = (d+\delta)^2 = d\delta + \delta d$ est un hamiltonien supersymétrique (c'est l'opérateur de Hodge-Laplace), et $H = Q + (-1)^P m$ (avec $m > 0$)

est un opérateur de Dirac supersymétrique, appelé opérateur de Hodge-Dirac. Les sous-espaces bosonique $\mathcal{H}_+$ et fermionique $\mathcal{H}_-$ sont respectivement l'ensemble des $2p$-formes et des $(2p+1)$-formes.

L'étude de la diffusion pour ces opérateurs s'effectue en les comparant aux opérateurs de Hodge-Dirac, H_0 et de Hodge-Laplace, Q_0^2 agissant sur $\mathcal{H}_0$, l'espace des formes différentielles de carré intégrable sur $I\!R^n$ muni de la métrique euclidienne g_0.

Nous considérons les variétés asymptotiquement plates de dimension n. Il s'agit de variétés riemanniennes non compactes (M,g), dont les bouts infinis sont difféomorphes, par φ, au complémentaire d'une boule de $I\!R^n$, et $(\varphi_* g - g_0)$ vérifie (H_δ) (cf. chap. 5 de [3] pour plus de détails).

Les phases de diffusion, pour les couples (H, H_0) et (Q^2, Q_0^2), seront définies pour $\delta > n$.

La différence avec l'opérateur de Dirac relativiste (avec champ magnétique) est que nous n'aurons plus nécessairement le lemme 5.1. Celui-ci sera remplacé par une relation faisant intervenir la notion d'Indice Relatif (du type Witten) introduit par N.V. Borisov, W. Müller et R. Schrader [3]. On prévoit alors d'obtenir la relation suivante entre s_D, la phase de diffusion pour le couple (H, H_0), s_L, la phase de diffusion pour le couple (Q^2, Q_0^2) et Ind, l'Indice Relatif :

$$s_D(\lambda) = \pm\, \frac{1}{2}\, s_L(\lambda^2 - m^2) - \frac{1}{2}\, Ind \qquad\qquad \pm\,\lambda > m. \tag{10}$$

Le développement asymptotique de s_D pour $\lambda \to \pm\infty$ se déduira alors du développement asymptotique de s_L pour $\lambda \to +\infty$.

L'élaboration de ces résultats est en cours. Pour la variété triviale $M = I\!R^n$, nous démontrons dans [4] que l'indice existe et est nul. Ainsi, grâce au développement asymptotique de s_L donné par D. Robert [13], la relation (10) nous permet de déduire un développement asymptotique complet de s_D, pour une métrique asymptotiquement plate, dont les géodésiques ne sont pas captées.

Pour une variété plate à l'infini, N.V. Borisov, W. Müller et R. Schrader ([3]) établissent que l'indice est nul pour n impair et pour n pair :

$$Ind = \int_M \mathcal{R}(x) = \chi(M),$$

où $\mathcal{R}(x)$ est la forme de Chern-Gauss-Bonnet sur (M,g) et $\chi(M)$ est la L^2-caractéristique d'Euler de M.

L'étude de l'Indice Relatif et l'existence d'un développement asymptotique complet pour s_L sont à étendre au cas général des variétés asymptotiquement plates, afin d'obtenir un développement asymptotique complet de s_D.

References

[1] E. Balslev, B. Helffer: *Limiting Absorption Principle and Resonances for the Dirac Operator*, Advances in Applied Mathematics 13, 186-215 (1992).

[2] M.S. Birman et M.G. Krein : *On the theory of wave operators and scattering operators*, Dokl. Akad. Nauk. S.S.S.R., vol.5, 475-478 (1962).

[3] N.V. Borisov, W. Müller, R. Schrader: *Relative Index Theorems and Supersymmetric Scattering Theory* , Commun. Math. Phys. 114, 475-513 (1988).

[4] V. Bruneau: *Propriétés asymptotiques du spectre continu d'opérateurs de Dirac*, Thèse, Université de Nantes (1995).

[5] V. Bruneau:*Sur le spectre continu de l'opérateur de Dirac: formule de Weyl, limite non-relativiste*, C.R. Acad. Sci. Paris, 322(I), 43-48 (1996).

[6] M. Dauge, D. Robert: *Weyl's formula for a class of pseudodifferential operators with negative order in* $L^2(I\!R^n)$, Lecture Notes in Mathematics 1256 , Springer Berlin, 91-122 (1986).

[7] B. Helffer, D. Robert: *Comportement semi-classique du spectre des hamiltoniens quantiques elliptiques*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble 31, 3, 169-223 (1981).

[8] B. Helffer et D. Robert: *Calcul fonctionnel par la transformation de Mellin et opérateurs admissibles*, J. Funct. Anal. 53, 246-268 (1983).

[9] B. Helffer et J. Sjöstrand: *Opérateurs de Schrödinger avec champs magnétiques faibles et constants*, Exposé No XII, Séminaire E.D.P., février 1989, Ecole Polytechnique.

[10] C. Pladdy, Y. Saito, T. Umeda: *Asymptotic behavior of the resolvent of the Dirac Operator*, Mathematical results in quantum mechanics (Blossin, 1993) 45-54. Oper. Theory: Adv. Appl., 70, Birkäuser, Basel, 1994.

[11] D. Robert : *Autour de l'approximation semi-classique* PM, 68, Birkhäuser (1987).

[12] D. Robert: *Asymptotique à grande énergie de la phase de diffusion pour un potentiel*, Asymptotic Analysis, 3, 301-320 (1991).

[13] D. Robert: *Asymptotique de la phase de diffusion à haute énergie pour des perturbations du second ordre du Laplacien*, Ann. Scien. ENS, 25, 107-134 (1992).

[14] D. Robert: *Relative Time-Delay for Perturbations of Elliptic Operators and Semiclassical Asymptotics*, Journal of Functional Analysis, vol. 126, No 1, 36-82 (1994).

[15] D. Robert, H. Tamura: *Semiclassical Asymptotics for Local Spectral Densities and Time Delay Problems in Scattering Process*, Journal of Functional Analysis, vol. 80, No 1, 124-147 (1988).

[16] R.T. Seeley: *Complex powers of an elliptic operator*, Proc. Sympos. Pure Math., 10, AMS 288-307 (1967).

[17] B. Thaller : *The Dirac equation*, Texts and Monographs in Physics, Springer-Verlag (1992).

[18] K. Yajima: *The quasi-classical approximation to Dirac equation, I*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 29, 161-194 (1982).

[19] O. Yamada : *On the principle of limiting absorption for the Dirac operators*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ. 8, (1972-73), 557-577.