JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

YVES COLIN DE VERDIÈRE

La méthode de moyennisation en mécanique semi-classique

Journées Équations aux dérivées partielles (1996), p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1996____A5_0>

Colloque EDP Saint Jean de Monts, juin 1996

LA MÉTHODE DE MOYENNISATION EN MÉCANIQUE SEMI-CLASSIQUE

Yves Colin de Verdière
Institut Fourier, Grenoble

1. INTRODUCTION. —

La méthode de moyennisation est très ancienne; elle remonte au moins à Lagrange [La] en mécanique céleste: il s'agit d'étudier la perturbation d'un système dynamique (Hamiltonien) relativement régulier: à orbites toutes périodiques (P) ou complètement intégrable (CI). Voir [AR], [B-M] et [L-M]. En fait, l'idée est la même: il suffit de moyenniser la perturbation sur les trajectoires: bien sûr, l'espace des trajectoires est en général compliqué; dans le cas où elles sont toutes périodiques (P), c'est simple, on *moyenne* sur la période.

Dans le cas complètement intégrable, on a plusieurs types de trajectoires correspondant à plusieurs dynamiques très différentes: quasi-périodiques ergodiques sur certains tores, périodiques sur d'autres. Les trajctoires quasi-périodiques diophantiennes donnent lieu à la théorie KAM, les autres aux théorèmes du type Poincaré-Birkhoff sur l'existence de trajectoires périodiques.

Les exemples du 1er cas sont bien connus: géodésiques des sphères munies de leurs métriques standard, trajectoires elliptiques du problème à 2 corps dans le potentiel coulombien, particule chargée dans un champ magnétique constant bidimensionnnel, oscillateurs harmoniques *rationnels.*

Les exemples de systèmes hamiltoniens CI sont nombreux et parfois de découverte récente: le plus simple est le flot géodésique sur un tore plat, mais il y aussi le flot géodésique sur les ellipsoïdes, et des exemples intéressants en dimension infinie (équation de Korteweg-de Vries). Poincaré a cependant montré qu'un système hamiltonien générique n'est pas CI.

Dans cet exposé, nous présentons un survey sur l'analogue semi-classique de ces résultats.

On considère un hamiltonien semi-classique dont la limite classique est d'un des types précédents en le considérant d'un point de vue perturbatif.

On aura donc:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + h^2 \hat{K} \ ,$$

où $\hat{H}_0$ est un Hamiltonien quantique de type (P) ou (CI):

Type (P) signifie $e^{i2\pi \hat{H}_0/h} = cId$

Type (CI) signifie qu'il existe des coordonnées actions-angles microlocales telles que:

$$\hat{H}_0 = H_0(\frac{h}{i}\partial_{x_j}) \ .$$

On inclut donc le symbole sous-principal dans la partie non perturbée; s'il est non trivial on traite d'abord

$$H_0 + hH_1$$

du point de vue classique.

Nous nous restreindrons à 2 cas typiques:

L'asymptotique des grandes valeurs propres pour un opérateur de Schrödinger $\Delta_g + V$ sur une variété compacte X de dimension 2 (du point de vue semi-classique

$$\hat{H} = h^2 \Delta + h^2 V$$

):

1) La sphère S^2 (cas (P)).

2) Un tore plat (cas (CI)).

Le 1er cas est classique et a été étudié dans les années 76-77 par A. Weinstein [We 2,3], puis par Guillemin et moi-même [CV4] dans le cas de l'opérateur de Schrödinger sur la sphère S^2 et enfin le cadre général fourni par la théorie des opérateurs de Toeplitz [B-G] qui permet de traiter de façon générale la réduction symplectique.

Le 2ème cas est plus délicat: dans le cas classique, il s'agit de la brisure des tores invariants rationnels (Poincaré) et de la stabilité des tores KAM [L-M], [Po1, 2]. Le cas semi-classique a été étudié par Lazutkin dans les années 73-74, puis par moi-même [CV5]. Il est repris dans le livre [Laz]. Il faut mentionner dans le cas de Schrödinger périodique les travaux [F-K-T 1, 2] que nous relions à ceux de Lazutkin et Shnirelman (appendice AD2 de [Laz]).

L'exposé qui suit peut être lu comme introduction aux travaux précédents et au livre [Laz]. Nous discutons en particulier les quasi-modes de Shnirelman qui sont reliés aux valeurs propres instables de [F-K-T 1].

2. LE CAS PERIODIQUE. —

2.1. La méthode de moyennisation classique. —

Pour ce §, voir [AR] ou [CV6].

On considère un Hamiltonien H_0 sur $T^{\star}X$ tel que pour $E_1 < E < E_2$ les couches d'énergie Σ_E soient lisses et que le flot de H_0 y soit simplement périodique.

Pour chaque valeur de E, avec $E_1 < E < E_2$, les orbites de H_0 contenues dans Σ_E forment une variété symplectique G_E (les sections de Poincaré donnent des cartes locales).

Soit $H_\epsilon = H_0 + \epsilon K$ une petite perturbation de H_0. Alors la couche d'énergie $\Sigma_{E,\epsilon}$ définie par $H_\epsilon = E$ peut s'identifier à $\Sigma_{E,0}$ et la dynamique projetée sur G_E est approximativement donnée pour des temps de l'ordre de $o(1/\epsilon)$ par l'hamiltonien moyenné $\epsilon\bar{K}$ obtenu en moyennant la perturbation sur les trajectoires de H_0 contenue dans Σ_E.

L'exemple historique est l'étude des trajectoires des planètes où l'on part des trajectoires elliptiques du problème à 2 corps (1 planète+ le soleil) et où l'on considère l'interaction des autres planètes comme une perturbation (Lagrange [La]).

Un autre exemple simple est donné par une particule chargée dans un champ magnétique constant $B_o dx \wedge dy$ dans $\mathbf{R}^2$ et un potentiel électrique ϵV: G_E est alors formée de cercles euclidiens tous de même rayon $r = \sqrt{2E}/B_o$, si on identifie chacun de ces cercles à son centre, la forme symplectique sur G_E, $E > 0$ est donnée par $B_o dx \wedge dy$ et la perturbation moyennée est simplement donnée par l'hamiltonien $W(z) = 1/2\pi \int_0^{2\pi} V(z + re^{i\theta})d\theta$. En première approximation les trajectoires suivent donc les lignes de niveau de W et donc de V si r est petit.

2.2. La méthode de moyennisation semi-classique. —

Décrivons le cas de $\Delta + V$ sur S^2. La théorie spectrale de Δ est très simple: les valeurs propres sont les $\lambda_k = k(k+1)$ et les espaces propres associés sont les espaces d'harmoniques sphériques $\mathcal{H}_k$ de dimension $2k+1$.

On note $A = \sqrt{\Delta + \frac{1}{4}}$ dont les valeurs propres sont les $k + \frac{1}{2}$, $k = 0, 1, \cdots$.

Alors si $U(t) = e^{-itA}$, $U(2\pi) = -Id$ qui est l'analogue quantique de la propriété que le flot géodésique est 2π périodique.

Soit $V \in C^\infty(S^2)$ et $\hat{V} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(t)VU(-t)dt$, alors

i) $[\Delta, \hat{V}] = 0$,

ii) il existe un OPD W unitaire tel que

$$W^{-1}(\Delta + V)W - (\Delta + \hat{V})$$

est d'ordre -1.

On en déduit que le spectre de $\Delta + V$ s'écrit sous la forme

$$\lambda_{k,l} = k(k+1) + \mu_{k,l} \ , l = 1, \cdots, 2k+1$$

et les $\mu_{k,l}$ différent des valeurs propres $\tilde{\mu}_{k,l}$ de $\hat{V}$ de $O(k^{-1})$.

On peut alors étudier la fonction:

$$Z_\rho(t) = \sum_k \Big(\sum_{l=1}^{2k+1} \rho(\tilde{\mu}_{k,l}) \Big) e^{-it(k+\frac{1}{2}} \ .$$

On a

$$Z(t) = Tr(\rho(\hat{V})e^{-itA})$$

dont on peut analyser les singularités.

Cela permet de montrer que les mesures de proba.

$$\mu_k = \frac{1}{2k+1}\sum_l \delta(\tilde{\mu}_{k,l})$$

converge vers l'image de la mesure de Liouville sur $U(S^2)$ par l'application $\bar{V}$ qui est la moyenne de V sur les géodésiques périodiques.

3. LE SPECTRE STABLE. —

3.1. Perturbations des systèmes CI: le cas classique. —

Un système hamiltonien est dit complètement intégrable s'il admet localement dans l'espace des phases un système de coordonnées actions-angles:

il existe un ouvert $T^n \times \Omega$ relativement compact du cotangent du tore $T^n = \mathbf{R}^n/(2\pi\mathbf{Z})^n$ tel que l'hamiltonien H_0 soit une fonction des impulsions p_j uniquement. Si on pose $\omega(p) = (\partial H_0/\partial p_j)$, les trajectoires sont donc quasi-périodiques de fréquence $\omega(p)$ sur les tores $p = Cte$.

On fera en général l'hypothèse

(ND) $p \to \omega(p)$ est un difféomorphisme de Ω sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$.

ou (et)

(NDE) l'application $p \to [\omega(p)]$ est un difféo de chaque couche d'énergie $H_0 = E$ sur un ouvert du projectif.

Lorsque $\omega(p)$ est multiple d'un vecteur entier les trajectoires sont périodiques: on a une famille à $n-1$ paramètres de trajectoires périodiques, ce qui n'est pas générique ainsi que l'a observé Poincaré.

Par perturbation de H_0 cette famille en général éclate en un nombre fini de trajectoires périodiques: du point de vue calcul des variations, on a une variété critique non dégénérée au sens de Bott sous l'hypothèse (ND).

Le théorème KAM affirme que, sous l'hypothèse (ND), les tores sur lesquels le ω est suffisamment irrationnel sont préservés par une petite perturbation, plus précisément:

soit $\beta > n-1$ et $C > 0$, on définit

$$K_{C,\beta} = \{p | \forall k \in \mathbf{Z}^n \setminus 0,\ | < k|\omega(p) > | \geq C\|k\|^{-\beta}\}\ .$$

Alors, il est facile de voir que $|\Omega \setminus K_{C,\beta}| = O(C)$.

Soit $H_\epsilon = H_0 + \epsilon H_1(x,p)$, alors les tores correpondant à $p \in K_{C,\beta}$ continuent à exister pourvu que $\epsilon = O(C^2)$.

En fait, on a un résultat beaucoup plus précis du à Lazutkin et généralisé par Pöschel [Po 1, 2]: il existe des coordonnées actions-angles telles que dans ces coordonnées H_ϵ soit seulement fonction de p sur $T^n \times K_{C,\beta}$.

En fait, on aura besoin plus loin d'un compact $K^1_{C,\beta} \subset K_{C,\beta}$ tel que toute fonction C^∞ nulle sur K_1 soit plate sur K_1: on peut prendre pour K_1 la fermeture des points de densité 1 de K et on aura: $|K_{C,\beta} \setminus K^1_{C,\beta}| = 0$.

En dimension 2, sous l'hypothèse (NDE) sur chaque couche de niveau $K_1 \cap \{H_0(p) = E\}$ est un Cantor dont le complémentaire a une infinité de composantes connexes. C'est dans ces composantes que vont se trouver les trajectoires périodiques de l'hamiltonien perturbé.

Tout ceci s'applique au cas où $H_0(p) = \frac{1}{2}\sum g^{i,j}p_ip_j$ qui correspond au flot géodésique pour une métrique riemannienne plate sur le tore.

Nous allons nous intéresser à l'asymptotique des grandes énergies de $\Delta + V$ ce qui correspond à la quantification de

$$\sum g^{i,j}p_ip_j + h^2V(x) \ .$$

3.2. Les quasi-modes KAM et le spectre stable. —

On se donne un hamiltonien classique $H_0(p)$ sur $T^n \times \Omega$ et on suppose qu'il vérifie l'hypothèse (ND).

On va considérer un hamiltonien semi-classique sur $T^n \times \Omega$ de la forme:

$$\hat{H} = H_0(D_j) + h^2H_2(x, D_j) + \cdots \ ,$$

avec $D_j = \frac{h}{i}\partial_{x_j}$.

Alors il existe un opérateur pseudo-différentiel unitaire P de la forme:

$$P = Id + hP_1 + \cdots \ ,$$

et un hamiltonien

$$\Phi(D_j) = H_0(D_j) + h^2\Phi_2(D_j) + \cdots \ ,$$

tels que:

$$P\hat{H}P^{-1} - \Phi(D_j)$$

soit régularisant sur $T^n \times K$, ici régularisant veut dire que le symbole total du pseudo-diff considéré est nul sur $T^n \times K$. En effet, on se ramène à des équations du type:

$$\frac{1}{i}\{H_0(p), P_j\} = \Phi_{j+1}(p) - W_j(x,p) \ , j = 1, \cdots \ ,$$

que l'on résoud sur $T^n \times K$ en choisissant pour Φ_{j+1} la moyenne par rapport à x de $W_j(x,p)$.

Par exemple, si $\hat{H} = h^2\Delta + h^2V$ sur T^n, on aura $\Phi_2(p) = \int V dx$.

Soit maintenant $\mathcal{H}$ l'espace de Hilbert engendré par les $e_k(x) = e^{ikx}$ tels que $kh \in \Omega$.

On a

$$dim(\mathcal{H}) \sim \frac{|\Omega|}{h^n} .$$

Soit $\mathcal{H}_1$ le sous-espace de $\mathcal{H}$ engendré par les e_k tels que

$$d(kh, K^1) \leq h^\alpha ,$$

où $0 < \alpha \leq 1$.

Alors

$$dim\mathcal{H}_1 \sim \frac{|K^1|}{h^n} .$$

L'espace $\mathcal{H}_1$ est l'analogue semi-classique des tores KAM.

Il est maintenant facile de voir que

$$P\hat{H}P^{-1} - \Phi(D_j)$$

est régularisant sur $\mathcal{H}_1$, cela veut dire que sa norme est $O(h^\infty)$ sur ce sous-espace.

On a en particulier construit un quasi-mode d'ordre infini correspondant à des valeurs propres asymptotiques

$$\Phi(hk), \text{ telles que } d(hk, K^1) \leq h^\alpha .$$

C'est cette partie du spectre que l'on nomme spectre *stable*.

Via les coordonnées actions-angles semi-classiques, les constructions précédentes s'étendent facilement aux hamiltoniens H_0 CI quitte à ajouter les contributions des indices de Maslov dans la défintion de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$.

L'étude précédente s'étend au cas où H_0 est une perturbation d'un hamiltonien CI et aussi au cas où

$$\hat{H} = H_0(D_j) + hH_1(x, D_j) + \cdots .$$

On considère alors l'hamiltonien classique $H_0(p) + hH_1(x,p)$ auquel on commence par appliquer le théorème KAM.

4. LE SPECTRE INSTABLE. —

4.1. Perturbations des trajectoires périodiques. —

Soit $H_\epsilon(x,p) = H_0(x,p) + \epsilon K(x,p)$, et supposons que H_0 admette une variété critique non-dégénérée (au sens de Bott) de trajectoires périodiques de période T.

Cela signifie que le graphe du flot ϕ_T de H_0 coupe la diagonale transversalement au sens de Bott en une variété Z.

On peut reformuler ceci en un problème variationnel ayant une variété critique non dégénérée.

Si $F_\epsilon = F_0 + \epsilon G$ et que F_0 admet une variété critique non dégénérée W,,les points critiques de F_ϵ pour ϵ petit sont proches des points critiques de la restriction de G à W.

Ici cela revient à considérer la perturbation K moyennée sur les trajectoires périodiques.

4.2. Quasi-modes associés aux tores rationnels. —

Restreignons nous au cas de $\Delta + V$ sur le tore T^2.

Si γ est une géodésique primitive de longueur L_γ pour la métrique plate, on introduit le tore T_γ de dimension $n-1$ formé des translatées de γ, le potentiel $\bar{V}_\gamma$ sur T_γ obtenu par moyennisation et le laplacien Δ_γ obtenu par restriction aux fonctions constantes sur γ et ses translatées de Δ.

Le résultat de [E-R-T] et [F-K-T 1] montre l'existence pour chaque μ_l valeur propre de $\Delta_\gamma + \bar{V}_\gamma$ d'une suite de valeurs propres de $\Delta + V$ de la forme

$$(\frac{2\pi}{L_\gamma})^2 k^2 + \mu_l + O(\frac{1}{k}), \ k \in \mathbf{Z} .$$

Ces valeurs propres sont dites instables lorsque (cas générique) $\bar{V}_\gamma \neq \bar{V}$: elles sont perturbées de façon anormale par rapport aux valeurs propres KAM!!

4.3. Les quasi-modes de Shnirelman. —

Les quasi-modes de Shnirelman correspondent en dimension 2 aux fonctions propres semi-classiques localisées entre les tores KAM dans le cas où (NDE) est satisfaite: montrons comment construire de telles quasi-modes dans le cas de Schrödinger sur T^2.

On suppose que Ω est un voisinage d'une couche d'énergie $H_0(p) = E$; sous (NDE), soit $\mathcal{H}_l$ les sous-espaces de Hilbert de $\mathcal{H}$ correspondant aux hk dans une composante connexe Ω_l de

$$\{p \in \Omega | d(p, K^1) > h^\alpha\} .$$

On a:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus_l \mathcal{H}_l$$

et montrons que $P\hat{H}P^{-1}$ préserve cette décomposition à $O(h^\infty)$ près dès que $\alpha < 1$.

Si $p = hk, p' = hk'$ sont dans 2 composantes $\mathcal{H}_l$ différentes, on a

$$|hk - hk'| > 2h^\alpha .$$

Maintenant l'action d'un pseudodiff de symbole $Q(x,p)$ sur une exponentielle e_k est donnée par

$$Qe_k = Q(x, hk)e_k(x) .$$

Donc

$$< Qe_k | e'_k >= \int Q(x, hk) e^{i(k-k'|x)} dx ,$$

et cette intégrale est $O(h^\infty)$ car $|k - k'| \geq 2h^{\alpha-1}$.

5. QUESTIONS. —

Q1: et les formules de traces?

L'application des formules de traces semi-classiques à une situation proche de CI générique donne lieu à une contribution des trajectoires périodiques mais pas de contribution des tores KAM, alors que des quasimodes de densité > 0 s'y concentrent.

Cela veut dire sans doute que l'on peut lire une information sur les tores KAM dans les trajectoires périodiques:

cela a été considéré d'un point de vue dynamique classique et porte le nom de critère de Greene, voir [McK].

Est ce que les considérations précédentes donnent un éclairage (une justification?) du critère de Greene?

Enoncé du critère de Greene:

on se place dans une situation KAM (ND) et (NDE) en dimension 2; à chaque orbite périodique γ correspondant à un nombre de rotation p/q on associe son *Résidu*

$$R_\gamma = det(Id - P_\gamma)$$

et si ω est une fréquence KAM et p_n/q_n une suite de réduites de ω correpondant à une suite de trajectoires périodiques γ_n, on considère la limite:

$$\mu(\omega) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{S(\gamma_n)} \log |R_{\gamma_n}| \ ,$$

où $S(\gamma)$ est l'intégrale d'action sur γ.

Alors $\mu(\omega) \leq 0$ implique l'existence d'un tore invariant de fréquence ω et réciproquement.

Ce critèe s'avère efficace numériquement pour détecter la disparition des tores KAM. Il est agréable de constater que le résidu est l'un des ingrédients de la formule de trace qui donne donc accès aux $\mu(\omega)$ (q_n est liée aux longueurs des trajectoires périodiques).

Q2: la finitude du nombre de gaps?

Il est conjecturé (conjecture de Bethe-Sommerfeld) que le spectre de $\Delta + V$ dans $\mathbf{R}^n$ avec V périodique n'a qu'un nombre fini de composantes connexes, cette conjecture est prouvée en dimension ≤ 4 grâce aux travaux de Skriganov, Dahlberg-Trubowitz, Helffer-Mohammed.

Les considérations précédentes donnnent une approximation très bonne du spectre liées aux quasi-modes KAM: en particulier, elles montrent que les gaps sont de taille $O(k^{-\infty})$.

Peut-on raffiner les observations précédentes pour donner une preuve de la conjecture de Bethe-Sommerfeld en toutes dimensions?

Q3: Les grands champs magnétiques dégénérés?

Un champ magnétique en dimension impaire est toujours dégénéré: que peut-on dire dans ce cas de l'asymptotique des grands champs magnétiques?

6. REFERENCES. —

[AR] V. ARNOLD. — *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*, Mir (Moscou), 1976.

[B1] L. BOUTET DE MONVEL. — *Nombre de valeurs propres d'un opérateur elliptique et polynôme de Hilbert-Samuel*, Séminaire Bourbaki, **532** (1978'79), .

[B2] L. BOUTET DE MONVEL. — *Opérateurs de Toeplitz de plusieurs variables complexes*, Séminaire Goulaouic-Schwartz, (78'79), VII1-VII8.

[B3] L. BOUTET DE MONVEL. — *Variétés de contact quantifiées*, Séminaire Goulaouic-Schwartz, (79'80), III1-III6.

[B4] L. BOUTET DE MONVEL. — *Opérateurs à bicaractéristiques périodiques*, Séminaire Bony-Sjöstrand-Meyer, (84'85), XX1-XXX12.

[B5] L. BOUTET DE MONVEL. — *Compléments sur le noyau de Bergman*, Séminaire EDP Ecole Polytechnique, (85'86), XX1-XX13.

[Be] J. BELLISSARD. — *Stability and instability in Quantum Mechanics*, Ed. Albeverio and Blanchard, World Scientific, (1985), 1-105.

[B-G] L. BOUTET DE MONVEL, V. GUILLEMIN. — *The spectral theory of Toeplitz operators*, Princeton, 1981.

[B-M] N. BOGOLIUBOV, Y. MITROPOLSKI. — *Les méthodes asymptotiques dans la théorie des oscillations non linéaires*, Gauthiers-Villars, 1963.

[BOS] J.B. BOST. — *Introduction to compact Riemann surfaces, Jacobians, and Abelians varieties*, From number theory to physics, les Houches, (1989), 64-212.

[BOU1] T. BOUCHE. — *Asymptotique d'une certaine forme quadratique*, Preprint Institut Fourier, (1994), 1-6.

[BOU2] T. BOUCHE. — *Asymptotic results for Hermitian line bundles over complex manifolds: the heat kernel approach*, Prépublication Institut Fourier, **247** (1993), 1-14.

[C-F-K-S] H. CYCON, R. FROESE, W. KIRSCH, B. SIMON. — *Schrödinger operators*, Springer, 1986.

[CV1] Y. COLIN DE VERDIÈRE. — *L'asymptotique de Weyl pour les bouteilles magnétiques*, Comm. Math. Phys., **105** (1986), 327-335.

[CV2] Y. COLIN DE VERDIÈRE. — *L'asymptotique de Weyl pour les bouteilles magnétiques en dimension 2*, Prépublication IF, **33** (1985), 1-8.

[CV3] Y. COLIN DE VERDIÈRE. — *Une introduction aux opérateurs de Toeplitz*, Séminaire de théorie spectrale et géométrie, **13** (1994'1995), 135-142.

[CV4] Y. COLIN DE VERDIÈRE. — *Sur le spectre des opérateurs à bicaractéristiques toutes périodiques*, Commentarii Math. Helv., **54** (1979), 508-522.

[CV5] Y. COLIN DE VERDIÈRE. — *Quasi-modes sur les variétés riemanniennes*, Invent. Math., **43** (1977), 15-52.

[CV6] Y. COLIN DE VERDIÈRE. — *Champs magnétiques classiques et quantiques*, Séminaire de théorie spectrale et géométrie, **13** (1994'1995), 15-22.

[CV-TO] Y. COLIN DE VERDIÈRE, N. TORKI. — *Opérateur de Schrödinger avec champ magnétique* , Séminaire de théorie spectrale et géométrie, **11** (1992'1993), 9-18.

[DY] J.P. DEMAILLY. — *Holomorphic Morse inequalities*, Proc. Symp. Pure Math., **52 (2)** (1991), 93-114.

[E-R-T] G. ESKIN, J. RALSTON, E. TRUBOWITZ. — *On Isospectral Potentials in* $\mathbf{R}^n$, Comm. Pure Appl. Math., **37** (1984), 647-676.

[FA] F. FAURE. — *Mécanique quantique et dégénérescence dans le spectre*, Séminaire de théorie spectrale et géométrie, **11** (1992'1993), 19-63.

[F-K-T1] J. FELDMAN, H. KNÖRRER, E. TRUBOWITZ. — *Perturbatively unstable eigenvalues of a periodic Schrödinger operator*, Comment. Math. Helv., **66** (1991), 557-579.

[F-K-T2] J. FELDMAN, H. KNÖRRER, E. TRUBOWITZ. — *The perturbatively stable spectrum of a periodic Schrödinger operator*, Invent. Math., **100** (1990), 259-300.

[La] J.L. LAGRANGE. — *Mémoire sur le théorie des variations des éléments des planètes*, Mém. Cl. Sci. Math. Phys. Inst. France, (1808), 1-72.

[L-L] LANDAU-LIFCHITZ. — *Mécanique quantique*, Mir (Moscou), 1967.

[L-M] P. LOCHAK ET C. MEUSNIER. — *Multiphase Avreraging for Classical Systems*, Springer, 1988.

[Laz] V. LAZUTKIN. — *KAM Theory and semi-classical Approximations to Eigenfunctions*, Springer, 1993.

[Ma] J. MARSDEN. — *lectures on Mechanics*, London Math. Soc., 1992.

[McK] R. MACKAY. — *Greene's residue criterion*, Nonlinearity, **5** (1992), 161-187.

[No] S.P. NOVIKOV. — *Magnetic Bloch functions and vector bundles. Typical dispersion laws and their quantum numbers*, Sov. Math. Dokl., **23** (1981), 298-303.

[Po1] J. PÖSCHEL. — *Lectures on the Classical KAM theorem*, Internat. center for Theor. Phys (Trieste), (1992), 1-37.

[Po2] J. PÖSCHEL. — *Integrability of Hamiltonian Systems on Cantor Sets*, Comm. Pure and appl. Maths, **35** (1982), 653-695.

[Sk] M. SKRIGANOV. — *Geometric and arithmetic Methods in the Spectral theory of Multidimensional Periodic Operators*, Proc. Steklov Inst. Math, **171** (1987), 1-117.

[S-V] J. SANDERS, F. VERHULST. — *Averaging methods in nonlinear dynamical systems*, Springer, 1985.

[T-K-N2] D. THOULESS, M. KOHMOTO, M. NIGHTINGALE, M. DEN JIS. — *Quantized Hall conductance in a 2-dimensional periodic potential*, Phys. Rev. Lett., **49** (1982), 405-408.

[VO] A. VOROS. — *WKB method in the Bargmann representation*, Phys. Rev. , **A40** (1989), 6800.

[We1] A. WEINSTEIN. — *Lectures on symplectic manifolds*, Reg. Conf. Ser. NSF, (1977), 1-48.

[We2] A. WEINSTEIN. — *Eigenvalues of the Laplacian plus a potential*, Proc. int. Congr. Math., Helsinki, **2** (1978), 803-805.

[We3] A. WEINSTEIN. — *Asymptotics of eigenvalues clusters for the Laplacian plus a potential*, Duke Math. J., **44** (1977), 883-892 .

Institut Fourier
Unité mixte CNRS-Université de Grenoble 1
BP 74,F–38402–Saint Martin d'Hères Cedex
tél:(33) 76 51 49 65
e-mail:ycolver@fourier.ujf-grenoble.fr