Journées Équations aux dérivées partielles

Jean-Yves Chemin

Sur quelques résultats récents de mécanique des fluides

Journées Équations aux dérivées partielles (1994), p. 1-45

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1994____A1_0>

Sur quelques résultats récents de mécanique des fluides

Jean-Yves Chemin
Laboratoire d'Analyse Numérique
Université de Paris 6
URA 189 du CNRS, BP 187
2 Place Jussieu
75 230 PARIS CEDEX 05

Introduction

Ce texte de survol est la rédaction d'une série de quatre conférences. Nous avons cherché à donner un aperçu sur quelques résultats récents démontrés sur l'équation d'Euler incompressible, essentiellement en dimension deux. Nous avons voulu mettre l'accent sur l'importance que peut prendre l'aspect géométrique dans la description précise de la régularité des solutions du système d'Euler.

1 Une définition mathématique d'un fluide parfait

On cherche à décrire l'évolution d'un fluide parfait incompressible entre deux temps t_0 et t_1. Une particule de fluide située au point x à l'instant t_0 sera située au point $\psi_1(x)$ à l'instant t_1. L'incompressibilité du fluide se traduit par le fait que l'application ψ_1, supposée être un difféomorphisme, conserve la mesure, c'est-à-dire que son jacobien est de déterminant 1.

Dans toute la suite, nous supposerons que le fluide est indéfiniment étendu dans tout l'espace à d dimensions, d valant 2 ou 3. Ce choix provient d'une volonté de simplification. En effet, on peut aussi formuler la mécanique des fluides sur un domaine régulier (il faut alors introduire des conditions aux limites) ou encore sur une variété compacte (la formulation est alors un peu plus délicate). Ici, nous devrons simplement, en quelques endroits, prendre garde aux problèmes à l'infini.

Pour modéliser un fluide parfait incompressible, nous considérerons l'espace $\mathcal{L}$ des fonctions continûment différentiables de $[t_0, t_1] \times \mathbf{R}^d$ dans $\mathbf{R}^d$ telles que $\psi(t_0) = \mathrm{Id}$ et $\psi(t_1) = \psi_1$, telles qu'à chaque instant t, la fonction $\psi(t)$ soit un difféomorphisme de $\mathbf{R}^d$ et la fonction $\partial_t \psi(t)$ soit continue de $[t_0, t_1]$ dans L^2. Nous désignerons par $\mathcal{L}_0$ l'espace des fonctions de $\mathcal{L}$ telles qu'à tout instant t, le difféomorphisme $\psi(t)$ préserve la mesure.

Une évolution a priori possible d'un fluide incompressible entre l'état à l'instant t_0 et l'état décrit à l'instant t_1 par le difféomorphisme ψ_1 est modélisée par une fonction ψ de l'espace $\mathcal{L}_0$.

Pour introduire un problème variationnel, il convient de définir une fonctionnelle dont les extrémales seront la clef du problème. Nous allons ici introduire l'action.

Définition 1.1 *On appelera action l'application $\mathcal{A}$ définie de $\mathcal{L}$ dans $\mathbf{R}_+$ par*

$$\mathcal{A}(\psi) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_{\mathbf{R}^d} |\partial_t \psi(t,x)|^2 dx dt.$$

L'action est une forme quadratique. L'espace $\mathcal{L}$ est inclus dans un espace affine. On a

$$D\mathcal{A}_\psi h = \int_{t_0}^{t_1} \int_{\mathbf{R}^d} \partial_t \psi(t,x) \partial_t h(t,x) dt dx. \tag{1}$$

L'idée est de définir un fluide parfait incompressible comme un fluide incompressible évoluant suivant des extrémales de la fonctionnelle action $\mathcal{A}$ restreinte à l'espace $\mathcal{L}_0$. Pour cela, il faut définir la notion d'accroissement infinitésimal sur cet espace $\mathcal{L}_0$. On pose la définition suivante.

Définition 1.2 *On appelera accroissement infinitésimal en un point ψ de l'espace $\mathcal{L}_0$ la dérivée en 0 d'une quelconque fonction Θ continûment différentiable de $[0,1]$ dans $\mathcal{L}_0$ telle que $\Theta(0) = \psi$.*

On peut maintenant proposer une définition mathématique d'un fluide parfait incompressible.

Définition 1.3 *On dit qu'un fluide incompressible est parfait s'il évolue entre le temps t_0 et l'état ψ_1 au temps t_1 suivant un élément ψ de $\mathcal{L}_0$ tel que, pour tout accroissement infinitésimal θ au point ψ, on ait*

$$D\mathcal{A}(\psi) \cdot \theta = 0.$$

Pour donner un contenu à cette définition, décrivons l'ensemble des accroissements infinitésimaux. Désignons par $\mathcal{T}$ l'ensemble des champs de vecteurs τ dont les coefficients sont continûment différentiables sur $[t_0, t_1] \times \mathbf{R}^d$, tels que

$$\tau(t_0) = \tau(t_1) = 0 \quad et \quad \forall\, t \in [t_0, t_1]\,,\ \operatorname{div} \tau(t) = 0.$$

Rappelons que le flot d'un champ de vecteurs v est de jacobien 1 si et seulement si la divergence de ce champ $v = (v^1, \ldots, v^d)$, définie par

$$\operatorname{div} v = \sum_{i=1}^{d} \partial_i v^i,$$

est nulle. Il résulte très facilement de cette propriété que, si θ un accroissement infinitésimal en un point ψ de $\mathcal{L}_0$, il existe un champ de vecteurs τ de l'espace $\mathcal{T}$ tel que

$$\theta(t,x) = \tau(t, \psi(t,x)). \tag{2}$$

Réciproquement, soient α une fonction indéfiniment différentiable à support compact sur l'intervalle $]t_0, t_1[$ et τ un champ de vecteurs de divergence nulle dont les composantes appartiennent à l'espace $\mathcal{S}$. Si

$$\theta(t,x) = \alpha(t)\tau(\psi(t,x)), \tag{3}$$

on montre alors, en résolvant l'équation différentielle autonome

$$\left\{\begin{array}{rcl} \partial_s \Theta(s,t,x) & = & \alpha(t)\tau(t, \Theta(s,t,x)), \\ \Theta(0,t,x) & = & \psi(t,x). \end{array}\right.$$

que θ est un accroissement infinitésimal au point ψ.

Nous venons de décrire l'évolution d'un fluide incompressible par une courbe tracée sur l'espace des difféomorphismes préservant la mesure ; c'est le point de vue lagrangien. Une autre façon de décrire un fluide est d'étudier le champ des vitesses des particules du fluide ; c'est le point de vue eulérien. Lorsque les champs de vecteurs et les difféomorphismes considérés sont assez réguliers, l'équivalence entre les deux points de vue, modulo une perte de régularité en temps, n'est rien d'autre que la théorie élémentaire des équations différentielles ordinaires.

En effet, considérons un élément ψ de $\mathcal{L}$ qui soit une évolution d'un fluide parfait incompressible. On définit alors le champ des vitesses suivant :

$$v(t,x) = \partial_t \psi(t, \psi^{-1}(t,x)). \tag{4}$$

Le fait que chaque difféomorphisme $\psi(t)$ préserve la mesure assure que le champ de vecteurs ainsi défini est de divergence nulle. Réciproquement, si v est un champ de vecteurs suffisamment régulier, le théorème de Cauchy-Lipschitz permet de définir un flot ψ par

$$\begin{cases} \partial_t \psi(t,x) &= v(t,\psi(t,x)) \\ \psi(0,x) &= x. \end{cases} \tag{5}$$

On peut maintenant établir les familières équations d'Euler.

Théorème 1.1 *Soient ψ une évolution d'un fluide parfait incompressible et v le champ de vecteurs associé à ψ par (4). Il existe alors une distribution tempérée p telle que, si l'on pose $v \cdot \nabla = \sum_{i=1}^{d} v^i \partial_i$, on ait*

$$\partial_t v + v \cdot \nabla v = -\nabla p. \tag{6}$$

Supposons que ψ soit une évolution d'un fluide parfait incompressible. On sait que, pour tout $\alpha \in C_0^\infty(]t_0,t_1[)$ et tout champ de vecteurs de divergence nulle $\tau \in C^\infty([t_0,t_1];\mathcal{S}(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}^d))$, la fonction θ définie par (3) est un accroissement infinitésimal. D'où

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{\mathbf{R}^d} \partial_t \psi(t,x) \partial_t(\alpha(t)\tau(t,\psi(t,x)))dtdx = 0.$$

Vu que $\partial_t(v(t,\psi(t,x)) = (\partial_t v + v \cdot \nabla v)(t,\psi(t,x))$, une intégration par parties en t assure

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{\mathbf{R}^d} \partial_t(v(t,\psi(t,x)))\alpha(t)\tau(t,\psi(t,x))dtdx = 0.$$

L'égalité ci-dessus est vraie pour toute $\alpha \in C_0^\infty(]t_0,t_1[)$. Donc, étant donné que $\psi(t)$ est un difféomorphisme préservant la mesure, on a

$$\int_{\mathbf{R}^d} (\partial_t v + v \cdot \nabla v)(t,x)\tau(t,x)dx = 0, \tag{7}$$

et ce pour tout tout champ de vecteurs de divergence nulle τ. La première partie du théorème va maintenant résulter du fait que, si w un champ de vecteurs à coefficients distributions tempérées, l'existence d'une distribution tempérée p telle que $w = \nabla p$ équivaut à la nullité du rotationnel de w, c'est-à-dire aux relations $\partial_j w^i = \partial_i w^j$.

Réciproquement, soit v un champ de vecteurs vérifiant la relation (6) ci-dessus. On considère alors le flot ψ de v définie par (5) et θ un quelconque accroissement infinitésimal en ψ. Alors, on a

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{\mathbf{R}^d}\partial_t\psi(t,x)\partial_t\theta(t,x)dtdx = -\int_{t_0}^{t_1}\int_{\mathbf{R}^d}\partial_t^2\psi(t,x)\theta(t,x)dtdx.$$

D'après (2), il existe un champ de vecteurs de divergence nulle τ tel que $\theta = \tau(t,\psi(t,x))$. Il en résulte que

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{\mathbf{R}^d}\partial_t\psi(t,x)\partial_t\theta(t,x)dtdx = \int_{t_0}^{t_1}\int_{\mathbf{R}^d}(\nabla p)(\psi(t,x))\tau(t,\psi(t,x))dtdx.$$

Pour tout temps t, le difféomorphisme $\psi(t)$ conserve la mesure, ce qui conclut la démonstration du théorème.

Nous allons maintenant donner une formulation faible de l'équation (6). Cette formulation sera équivalente à celle de la relation (6) lorsque le champ de vecteurs solution sera suffisamment régulier. Néanmoins, il sera important d'avoir une formulation dite faible des équations, notamment dans la section 6. Si v est un champ de vecteurs de divergence nulle continûment différentiable, on a $v\cdot\nabla v = \operatorname{div} v\otimes v$ où désigne le champ de vecteurs dont la ième coordonnée est $\sum_{j=1}^d \partial_j(v^iv^j)$. D'où la formulation suivante des équations d'Euler.

$$(E)\left\{\begin{array}{rcl}\partial_t v + \operatorname{div} v\otimes v & = & -\nabla p\\ \operatorname{div} v & = & 0\\ v_{|t=0} & = & v_0.\end{array}\right.$$

Remarquons pour conclure que cette présentation que le système (E) conserve l'énergie, c'est-à-dire que, au moins formellement, on a

$$\frac{d}{dt}\|v(t)\|_{L^2}^2 = 0.$$

Nous avons suivi ici les grandes lignes de la présentation de la mécanique des fluides exposée par V. Arnold dans [3]. Cette approche, reprise par E. Ebin et J. Marsden dans [22], a connu récemment un regain d'intérêt sous l'impulsion des travaux de Y. Brenier et A. Shnirelman. Dans [9], Y. Brenier généralise la notion de solution en relaxant le problème variationnel posé. Dans [33], A. Shnirelman étudie l'aspect "variété riemannienne" du groupe des difféomorphimes préservant la mesure. Bien quelle soit très intéressante, nous ne développerons pas ici cette approche.

2 La pression et le tourbillon ; le cas de la dimension 2.

La pression est une inconnue du système (E). En supposant le champ des vitesses suffisamment régulier, il vient, en dérivant l'équation sur le champ de vecteurs v,

$$-\Delta p = \sum_{j,k=1}^{d} \partial_j \partial_k (v^j v^k). \tag{8}$$

Nous avons choisi de supposer le fluide indéfiniment étendu dans l'espace à d dimensions, c'est-à-dire de travailler avec des fonctions définies sur tout $\mathbf{R}^d$. Ainsi, en imposant des conditions de (dé)croissance à l'infini sur la pression, nous pourrons la déterminer à partir du champ de vecteurs solution des équations d'Euler. Ceci se traduit par les énoncés suivants, dont on trouve la démonstration dans [30] ou [17].

Définition 2.1 *On appelle $C_L^\infty(\mathbf{R}^d)$ ou, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté C_L^∞, l'espace des fonctions u indéfiniment différentiables sur $\mathbf{R}^d$ dont toutes les dérivées d'ordre strictement positif sont bornées et qui de plus vérifient*

$$|u(x)| \leq C(1 + \log < x >).$$

Cet espace est bien évidemment un espace de Fréchet pour les semi-normes

$$N_k(u) = \sup_{x \in \mathbf{R}^d, 0 < |\alpha| \leq k} \left(|\partial^\alpha u(x)|, \frac{u(x)}{1 + \log < x >} \right). \tag{9}$$

La justification de cette définition apparaît clairement dans le théorème suivant :

Théorème 2.1 *Pour tout $(i,j) \in \{1, \ldots, d\}^2$, il existe un opérateur $T_{i,j}$ qui, pour tout couple de réels (r,a), avec $a \in]1, +\infty[$, est continu de C^r dans $C^r + C_L^\infty$ et de $C^r \cap L^a$ dans lui-même. De plus, pour toute distribution w dans C^r, on a*

$$\Delta T_{i,j} w = \partial_i \partial_j w.$$

Enfin, les opérateurs $T_{i,j}$ sont uniques au sens suivant. Soit une famille $(T'_{i,j})_{1 \leq i,j \leq d}$ d'opérateurs vérifiant les propriétés ci-dessus. Il existe alors des formes linéaires $\lambda_{i,j}$ continues sur tous les espaces C^r, nulles sur les espaces $C^r \cap L^a$ et telles que

$$T_{i,j} w - T'_{i,j} w = \lambda_{i,j}(w) \mathbf{1} \quad \textit{avec} \quad \mathbf{1}(x) = 1.$$

Ce théorème implique immédiatement un résultat d'unicité sur la pression dans l'équation d'Euler.

Corollaire 2.1 *On considère un champ de vecteurs de divergence nulle v appartenant à $L^\infty([0,T]\times\mathbf{R}^d;\mathbf{R}^d)$. Soient p et $\widetilde{p}$ deux fonctions appartenant à $L^\infty_{loc}([0,T];C^r+C^\infty_L)$ telles que (v,p) et $(v,\widetilde{p})$ soient solutions du système d'Euler (E). Il existe alors une fonction bornée sur l'intervalle $[0,T]$ telle que*

$$p-\widetilde{p}=f(t)\mathbf{1}.$$

Dorénavant, lorsque nous dirons qu'il existe une unique solution v qui appartient à l'espace $L^\infty([0,T]\times\mathbf{R}^d;\mathbf{R}^d)$, ceci signifiera que l'on considère la pression définie par

$$p=-\sum_{i,j=1}^{d}T_{i,j}(v^iv^j). \tag{10}$$

Nous allons maintenant nous intéresser au champ de gradient de la pression. C'est uniquement au travers de son champ de gradient qu'intervient la pression dans le système (E). Posons la définition suivante :

Définition 2.2 *On appelle π l'opérateur bilinéaire défini par*

$$\begin{aligned}\pi(v,w) &= \pi_1(v,w)+\pi_2(v,w)\quad\text{avec}\\ \pi_1(v,w) &= \sum_{i,j}\nabla\Delta^{-1}(T_{\partial_iw^j}\partial_jv^i+T_{\partial_jv^i}\partial_iw^j)\quad\text{et}\\ \pi_2(v,w) &= \sum_{i,j}\nabla T_{i,j}R(v^i,w^j).\end{aligned}$$

Cet opérateur est défini sur les couples de champs de vecteurs suffisamment réguliers et à valeurs dans les champs de vecteurs. Plus précisément, la manière dont π opère est décrite par le lemme ci-dessous.

Proposition 2.1 *Il existe une constante C telle que, pour tout r strictement supérieur à 1, on ait*

$$\|\pi(v,w)\|_r\leq C^{r+1}(\|v\|_{Lip}\|w\|_r+\|w\|_{Lip}\|v\|_r).$$

De plus, si $r\in]-1,1[$, alors

$$\|\pi(v,w)\|_r\leq C\left(\frac{1}{1+r}+\frac{1}{1-r}\right)\min\{\|v\|_{Lip}\|w\|_r,\|v\|_r\|w\|_{Lip}\}.$$

Enfin, pour tout r strictement supérieur à 1, il existe une constante C telle que

$$\|\operatorname{div}\pi(v,v)-tr(Dv^2)\|_{L^\infty}\leq C\|v\|_r\|\operatorname{div}v\|_{L^\infty}.$$

Le tourbillon est la quantité clef pour comprendre le système d'Euler. Sur le tourbillon, transparaît très vite la différence capitale qu'il y a entre le cas où la dimension d vaut 2 et celui où elle vaut 3.

Définition 2.3 *Le tourbillon d'un champ de vecteurs (vorticity en anglais) est le rotationnel de ce champ de vecteurs.*

Convention *Lorsque la dimension est 2, on identifie les matrices antisymétriques avec les réels. Ainsi, on note*

$$\omega(v) = \partial_1 v^2 - \partial_2 v^1$$

le tourbillon de v. En dimension supérieure, on note

$$\Omega(v) = (\Omega_j^i(v))_{1\leq i,j\leq d} \quad \textit{avec} \quad \Omega_j^i(v) = \partial_j v^i - \partial_i v^j.$$

On omet de noter explicitement (v) en l'absence de toute ambiguïté.

L'importance du tourbillon dans l'étude des solutions du système d'Euler incompressible (E) vient du fait qu'il détermine le champ des vitesses. En effet, on a

$$\partial_j^2 v^i = \partial_j \Omega_j^i + \partial_i \partial_j v^j.$$

Autrement dit,

$$\Delta v^i = \partial_i \operatorname{div} v + \sum_j \partial_j \Omega_j^i. \tag{11}$$

L'égalité ci-dessus entraîne que deux champs de vecteurs à coefficients distributions tempérées ayant même divergence et même rotationnel diffèrent d'un champ de vecteurs dont les coefficients sont des polynômes harmoniques. Dans le cas d'une solution du système (E), si l'on suppose en outre que le champ de vecteurs est nul à l'infini, il est alors exactement déterminé par son tourbillon.

Considérons maintenant un champ de vecteurs v appartenant à l'espace $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$. Désignons par E_d la solution fondamentale du laplacien nulle à l'infini si $d \geq 3$, c'est-à-dire

$$E_d(x) = \frac{c_d}{|x|^{d-2}} \quad \text{avec} \quad c_d = \frac{2\pi^{(d+1/2)}}{\Gamma((d+1)/2)}.$$

Si $d = 2$, $E_d(x)$ désigne la fonction $(2\pi)^{-1} \log |x|$.

On pose alors

$$\widetilde{v}^i = \sum_k \partial_k E_d \star \Omega_k^i(v).$$

On vérifie très facilement que $\operatorname{div} \widetilde{v} = 0$ et que $\Omega(\widetilde{v}) = \Omega(v)$. Donc, on retrouve la fameuse loi dite de Biot-Savart :

$$v^i(x) = c_d \sum_k \int_{\mathbf{R}^d} \frac{x^k - y^k}{|x - y|^d} \Omega_k^i(y) dy. \tag{12}$$

Intéressons-nous maintenant à l'évolution du tourbillon. Pour cela, différentions le système d'Euler (E) et prenons la partie antisymétrique de la matrice ainsi obtenue ; il vient

$$\partial_t \Omega + v \cdot \nabla \Omega + \Omega \cdot \nabla v = 0 \quad \text{avec} \quad (\Omega \cdot \nabla v)_j^i = \sum_{k=1}^{d} \Omega_j^k \partial_k v^i - \Omega_i^k \partial_k v^j. \tag{13}$$

Remarquons que la matrice $\Omega \cdot \nabla v$ n'est rien d'autre que la partie antisymétrique de la matrice $(\nabla v)^2$. Mais, lorsque la dimension d vaut 2, il résulte de (13) que

$$\partial_t \omega + v \cdot \nabla \omega = 0. \tag{14}$$

Cette relation est extrêmement importante. C'est sur cette relation que se distingue la dimension 2 de la dimension 3. Cette relation, associée à la nullité de la divergence du champ de vecteurs v, assurera que toutes les normes L^p sont conservées. Ceci sera la clef de tous les résultats spécifiques à la dimension 2 que nous évoquerons ici.

Aux paragraphe 4 et 6, nous aurons besoin du concept d'énergie cinétique ; c'est-à-dire que nous aurons à estimer des normes L^2 liées au champ de vecteurs solution du système d'Euler (E). Cependant, nous ne pourrons pas supposer que les champs de vecteurs que nous étudions sont d'énergie cinétique finie. Le bon cadre que nous précisons dès maintenant est l'étude de perturbation d'énergie cinétique finie de solutions stationnaires particulières.

Définition 2.4 *On appelle champ de vecteurs stationnaire et on note σ, tout champ de vecteurs de la forme*

$$\sigma = \Big(-\frac{x^2}{r^2} \int_0^r \rho g(\rho) d\rho, \frac{x^1}{r^2} \int_0^r \rho g(\rho) d\rho \Big) \quad \text{où} \quad g \in C_0^\infty(\mathbf{R} \setminus \{0\}).$$

On vérifie facilement que le champ de vecteurs σ est une solution stationnaire de l'équation d'Euler.

Remarque

Supposons que la fonction g soit positive, bornée, à support compact, et non identiquement nulle. Il est alors clair que si $|x|$ est assez grand, on a $|\sigma(x)| \simeq$

$C|x|^{-1}$. En particulier, le champ de vecteurs σ n'appartient pas à l'espace L^2. Nous considérerons des perturbations d'énergie cinétique finie de champ de vecteurs de type σ. Une telle classe de fonctions est suffisamment vaste pour contenir les données initiales aussi peu régulières que celle du type "nappe de tourbillon" (voir le paragraphe 6). Nous allons en effet démontrer le lemme suivant.

Lemme 2.1 *Considérons une mesure bornée μ telle que la mesure $(1+|x|)\mu$ le soit aussi. Si en outre μ appartient à $H^{-1}(\mathbf{R}^2)$, alors il existe un unique champ de vecteurs de divergence nulle v appartenant à $\sigma + L^2(\mathbf{R}^2;\mathbf{R}^2)$ pour un certain champ de vecteurs stationnaire σ et tel que $\omega(\sigma) = \mu$.*

La démonstration de l'unicité, très facile, est laissée au lecteur. L'existence utilise l'hypothèse de décroissance à l'infini faite sur la mesure μ. On considère σ un quelconque champ de vecteurs stationnaire tel que

$$\int_{\mathbf{R}^2} \omega(\sigma) = \int_{\mathbf{R}^2} d\mu.$$

Par hypothèse, $\widehat{\mu}$ est une fonction continûment différentiable dont la différentielle est bornée. L'inégalité des accroissements finis assure que

$$|\widehat{\mu}(\xi) - \widehat{\omega}(\sigma)(\xi)| \leq C|\xi| \int_{\mathbf{R}^2} (1+|x|)d|\mu|(x).$$

La fonction $\bar{\xi}|\xi|^{-2}(\widehat{\mu}(\xi) - \widehat{\omega}(\sigma)(\xi))$ est donc une fonction bornée sur $\mathbf{R}^2$. D'où la définition suivante de v :

$$\begin{aligned} v = \sigma + \mathcal{F}^{-1}\Big(\chi(\xi)\bar{\xi}|\xi|^{-2}(\widehat{\mu}(\xi) - \widehat{\omega}(\sigma)(\xi)) \\ + (\mathrm{Id} - \chi(\xi))\bar{\xi}|\xi|^{-2}(\widehat{\mu}(\xi) - \widehat{\omega}(\sigma)(\xi))\Big). \end{aligned}$$

Le fait que μ appartienne à $H^{-1}(\mathbf{R}^2)$ assure clairement le lemme.

Nous pouvons maintenant présenter la définition suivante.

Définition 2.5 *Soit m un réel. On désignera par E_m l'ensemble des champ de vecteurs de divergence nulle v du plan tel qu'il existe un champ de vecteurs stationnaire σ tel que*

$$\int_{\mathbf{R}^2} \omega(\sigma) = m \quad \text{et} \quad v - \sigma \in L^2.$$

Le lemme 2.1 ci-dessus assure en particulier que $E_0 = L^2$. Il permet de représenter l'espace E_m comme l'espace affine $\sigma + L^2$.

Pour clore cette introduction à la dimension 2, nous allons établir une formulation affaiblie du système (E). Cette formulation, outre son intérêt propre, sera l'une des clefs de la démonstration du théorème 6.1.

Plaçons-nous à nouveau dans le cadre de la dimension 2 et considérons un champ de vecteurs v dans $L^\infty([0,T];E_m)$ solution du système d'Euler (E). Par définition de l'espace E_m, les produits du type v^iv^j appartiennent à L^1+L^2. Donc les distributions $\mathcal{F}_x(v^iv^j)$ appartiennent à l'espace $L^\infty([0,T];L^2+L^\infty)$. Soit p' la fonction définie par

$$p' = -\mathcal{F}_x^{-1} \sum_{1\leq i,j\leq 2} (|\xi|^{-2}\xi_i\xi_j\mathcal{F}_x(v^iv^j)). \tag{15}$$

Comme l'espace L^2+L^∞ ne contient la transformée de Fourier d'aucune distribution tempérée harmonique et non nulle, nous avons démontré que, si (v,p) et (v,p') sont deux solutions du système (E) appartenant à l'espace $L^\infty([0,T];E_m)\times L^\infty([0,T];\mathcal{F}^{-1}(L^2+L^\infty))$, alors $p=p'$ et la pression p se déduit du champ de vecteurs v par (15).

On peut maintenant énoncer le théorème suivant :

Théorème 2.2 *Soient m un réel et v un champ de vecteurs de divergence nulle appartenant à l'espace $L^\infty_{loc}(\mathbf{R};E_m)$. Les deux conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) Il existe $p\in L^\infty_{loc}(\mathbf{R};\mathcal{S}'(\mathbf{R}^2))$ telle que $\mathcal{F}_xp\in L^\infty_{loc}(\mathbf{R};L^2+L^\infty)$ et telle que (v,p) soit solution du système (E).

(ii) Le champ de vecteurs satisfait

$$\partial_t v + A(D)\begin{pmatrix}(v^1)^2-(v^2)^2\\ v^1v^2\end{pmatrix} = 0 \tag{16}$$

en définissant $A(D)$ par

$$A(\xi) = i\begin{pmatrix}\xi_1\xi_2^2|\xi|^{-2} & \xi_2(\xi_2^2-\xi_1^2)|\xi|^{-2}\\ -\xi_1^2\xi_2|\xi|^{-2} & \xi_1(\xi_1^2-\xi_2^2)|\xi|^{-2}\end{pmatrix}.$$

Pour démontrer ce théorème, on utilise bien entendu la relation (15) ci-dessus. Notons par $\widetilde{\Delta}^{-1}$ l'opérateur de multiplication de la transformée de Fourier par $-|\xi|^{-2}$. Cet opérateur définit un inverse à gauche du laplacien, c'est-à-dire que l'on a $\widetilde{\Delta}^{-1}\Delta=\mathrm{Id}$. Il suffit alors de démontrer que, si p est la fonction définie par (15), alors

$$B \overset{\text{déf}}{=} \operatorname{div} v\otimes v + \nabla p = \widetilde{\Delta}^{-1}\begin{pmatrix}\partial_1\partial_2^2 & \partial_2(\partial_2^2-\partial_1^2)\\ -\partial_1^2\partial_2 & \partial_1(\partial_1^2-\partial_2^2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(v^1)^2-(v^2)^2\\ v^1v^2\end{pmatrix}.$$

Par définition de la pression (15), il vient

$$B = \begin{pmatrix} \partial_1(v^1)^2 + \partial_2(v^1v^2) \\ \partial_1(v^1v^2) + \partial_2(v^2)^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sum_{i,j} \widetilde{\Delta}^{-1}\partial_1\partial_i\partial_j(v^iv^j) \\ \sum_{i,j} \widetilde{\Delta}^{-1}\partial_2\partial_i\partial_j(v^iv^j) \end{pmatrix}.$$

Un calcul algébrique simple utilisant que $\widetilde{\Delta}^{-1}\Delta = \mathrm{Id}$ assure que

$$B = \widetilde{\Delta}^{-1} \begin{pmatrix} \partial_1\partial_2^2 & \partial_2(\partial_2^2 - \partial_1^2) \\ -\partial_1^2\partial_2 & \partial_1(\partial_1^2 - \partial_2^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (v^1)^2 - (v^2)^2 \\ v^1v^2 \end{pmatrix} ;$$

d'où le théorème.

Cette formulation faible, spécifique à la dimension deux, a été clairement dégagée par J.-M. Delort dans [20] et est implicitement contenue dans [21] et dans [2].

3 Cas d'une donnée initiale régulière

Dans ce paragraphe, nous allons donner un énoncé d'existence et d'unicité pour des solutions suffisamment régulières. L'énoncé principal est le suivant. La démonstration est très classique. Les détails, omis, se trouvent par exemple dans [17].

Théorème 3.1 *Soient r et a deux réels strictement supérieurs à 1 et v_0 un champ de vecteurs de divergence nulle appartenant à l'espace C^r. Supposons que ∇v_0 appartienne à L^a. Il existe alors un unique temps $T^\star$ maximal et une unique solution (v,p) de (E) dans l'espace $L^\infty_{loc}([0,T^\star[;C^r) \times L^\infty_{loc}([0,T^\star[; C^{r+1} + C^\infty_L)$ et telle que $(\nabla v, \nabla p)$ appartienne à l'espace $L^\infty_{loc}([0,T^\star[;L^a)$.*

De plus, on a

$$T^\star < +\infty \Rightarrow \int_0^{T^\star} \|\Omega(t)\|_{L^\infty} dt = +\infty.$$

Vu la conservation du tourbillon le long des lignes de flot en dimension 2, on en déduit le corollaire suivant :

Corollaire 3.1 *On suppose que $d = 2$. Soient r et a deux réels strictement supérieurs à 1 et v_0 un champ de vecteurs de divergence nulle de classe C^r. Supposons que ∇v_0 appartienne à L^a. Il existe alors une unique solution (v,p) de (E) dans l'espace $L^\infty_{loc}(\mathbf{R}^+;C^r) \times L^\infty_{loc}(\mathbf{R}^+;C^{r+1} + C^\infty_L)$ et telle que $(\nabla v, \nabla p)$ appartienne à l'espace $L^\infty_{loc}(\mathbf{R}^+;L^a)$.*

La démonstration du théorème ci-dessus ce fait de manière très uselle à l'aide du schéma itératif

$$\left\{\begin{array}{rcl} v_1 & = & S_2 v_0 \\ \partial_t v_{n+1} + v_n \cdot \nabla v_{n+1} & = & \pi(v_n, v_n), \\ v_{n+1|t=0} & = & S_{n+2} v_0, \end{array}\right. \tag{17}$$

où π désigne l'opérateur de la définition 2.2.

Nous ne détaillerons par complètement la preuve ici. L'étape essentielle est la démonstration du lemme que voici sur les équations de transport.

Lemme 3.1 *Il existe une constante C vérifiant la propriété suivante. Soit v un champ de vecteurs de classe C^∞ dont les dérivées sont bornées sur $[0,T] \times \mathbf{R}^d$ pour tout T strictement positif. Considérons un réel r strictement positif, ou bien strictement supérieur à -1 si, à tout instant, le champ de vecteurs $v(t)$ est de divergence nulle. On désigne par $V(t)$ une fonction telle que*

$$V(t) \geq \max\left\{\|\nabla v(t)\|_{L^\infty}, \frac{\|\nabla v(t)\|_{r-1}}{r-1}\right\}.$$

Soient (f,g) appartenant à $L^\infty([0,T];C^r) \times L^1([0,T];C^r)$ deux fonctions telles que

$$g = g_1 + g_2 \quad avec \quad \|g_2(t)\|_r \leq C(r)V(t)\|f(t)\|_r.$$

Si l'on a

$$\partial_t f + v \cdot \nabla f = g,$$

on peut écrire l'inégalité suivante :

$$\|f(t)\|_r \leq \|f(0)\|_r e^{\int_0^t C(\tau)V(\tau)d\tau} + \int_0^t \|g_1(\tau)\|_r e^{\int_\tau^t V(\tau')d\tau'} d\tau$$

en posant

$$\begin{array}{rcl} C(r) & = & C^r \quad si \quad r > 1, \\ C(r) & = & C\left(\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{1-r}\right) \quad si \quad 0 < r < 1, \\ C(r) & = & C\left(\dfrac{1}{1+r} + \dfrac{1}{1-r}\right) \quad si \quad -1 < r < 1 \quad et \quad \operatorname{div} v(t) = 0. \end{array}$$

Si l'on se contentait du cas des espaces de Hölder d'indice strictement compris entre 0 et 1, il suffirait de contrôler l'évolution de la norme Lipschitz ou de la norme $\|\cdot\|_r$ du flot d'un champ de vecteurs lipschitzien, ce qui est trivial. Dans le cas où r est strictement supérieur à 1, il suffit de contrôler l'évolution de la régularité hölderienne d'indice r du flot d'un champ de vecteurs de classe C^r, ce qui est élémentaire. Néanmoins, comme nous utiliserons une estimation sur l'évolution de la régularité hölderienne d'indice négatif pour l'étude du problème des poches de tourbillon, nous avons choisi d'exposer ici la méthode qui convient dans tous les cas.

Tout d'abord, remarquons qu'en posant $g = \partial_t f + v\cdot\nabla f$, il vient

$$f(t,x) = f_0(\psi^{-1}(t,x)) + \int_0^t g(s,\psi(s,\psi^{-1}(t,x)))ds. \tag{18}$$

Il en résulte de manière évidente que

$$\|f(t)\|_{L^\infty} \leq \|f_0\|_{L^\infty} + \int_0^t \|g(s)\|_{L^\infty} ds. \tag{19}$$

L'idée consiste à appliquer cette estimation L^∞ tout à fait élémentaire à des "morceaux" de f correspondant à une échelle de fréquences déterminée. Nous utiliserons pour cela une partition de l'unité dyadique. Rappelons la proposition suivante

Proposition 3.1 *Désignons par $\mathcal{C}$ la couronne de centre 0, de petit rayon 3/4 et de grand rayon 8/3. Il existe alors deux fonctions positives radiales χ et φ appartenant respectivement à $C_0^\infty(B(0,4/3))$ et à $C_0^\infty(\mathcal{C})$ telles que :*

$$\chi(\xi) + \sum_{q\geq 0} \varphi(2^{-q}\xi) = 1, \tag{20}$$

$$|p-q| \geq 2 \Rightarrow \text{Supp } \varphi(2^{-q}\cdot) \cap \text{Supp } \varphi(2^{-p}\cdot) = \emptyset, \tag{21}$$

$$q \geq 2 \Rightarrow \text{Supp } \chi \cap \text{Supp } \varphi(2^{-q}\cdot) = \emptyset, \tag{22}$$

si $\widetilde{\mathcal{C}} = B(0,2/3) + \mathcal{C}$, alors $\widetilde{\mathcal{C}}$ est une couronne et l'on a

$$|p-q| \geq 5 \Rightarrow 2^p\widetilde{\mathcal{C}} \cap 2^q\mathcal{C} = \emptyset, \tag{23}$$

Profitons-en pour fixer les notations qui nous serviront dans toute la suite de ce cours. On choisit une fois pour toutes deux fonctions χ et φ satisfaisant les propriétés (20)–(23).

Notations

$$\begin{gathered}
h = \mathcal{F}^{-1}\varphi \quad \text{et} \quad \widetilde{h} = \mathcal{F}^{-1}\chi, \\
\Delta_{-1}u = \chi(D)u = \mathcal{F}^{-1}(\chi(\xi)\widehat{u}(\xi)), \\
\text{si} \;\; q \geq 0, \; \Delta_q u = \varphi(2^{-q}D)u = 2^{qd}\int h(2^q y)u(x-y)dy, \\
\text{si} \;\; q \leq -2, \; \Delta_q u = 0, \\
S_q u = \sum_{p \leq q-1} \Delta_p u = \chi(2^{-q}D)u = \int \widetilde{h}(2^q y)u(x-y)dy.
\end{gathered}$$

La caractérisation suivante des espaces de Hölder à l'aide des opérateurs Δ_q nous sera utile.

Définition 3.1 *Soit r un réel, on désigne par C^r l'ensemble des distributions tempérées qui vérifient*

$$\|u\|_r \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_q 2^{qr}\|\Delta_q u\|_{L^\infty} < \infty.$$

Revenons à la démonstration du lemme 3.1. La fonction $\Delta_q f$ vérifie

$$(ET_q)\left\{\begin{array}{rcl} \partial_t \Delta_q f + v\cdot\nabla\Delta_q f & = & \Delta_q g + [v\cdot\nabla, \Delta_q]f \\ \Delta_q f_{|t=0} & = & \Delta_q f_0. \end{array}\right.$$

Le point important de la démonstration consiste en l'étude précise du commutateur $[v\cdot\nabla, \Delta_q]$. Le calcul paradifférentiel permet d'affirmer que

$$\|[v\cdot\nabla, \Delta_q]f\|_{L^\infty} \leq C(r)2^{-qr}\|f(t)\|_r V(t). \tag{24}$$

Il résulte alors de l'estimation L^∞ (19) ci-dessus, de l'équation (ET_q) et de l'hypothèse faite sur g que

$$\begin{aligned}
\|\Delta_q f(t)\|_{L^\infty} \leq \|\Delta_q f_0\|_{L^\infty} + \int_0^t \|\Delta_q g_1(s)\|_{L^\infty} ds & \\
+ C(r)2^{-qr}\int_0^t V(s)\|f(s)\|_r ds. &
\end{aligned}$$

Par multiplication par 2^{qr} et passage à la borne supérieure, il vient

$$\|f(t)\|_r \leq \|f_0\|_r + \int_0^t \|g_1(s)\|_r ds + C(r)\int_0^t V(s)\|f(s)\|_r ds.$$

Le lemme de Gronwall assure immédiatement le lemme 3.1.

La condition nécessaire à l'apparition de singularités repose essentiellement sur deux inégalités, l'une dynamique, l'autre stationnaire. L'inégalité dynamique se démontre de manière analogue au lemme 3.1. Voici son énoncé.

Lemme 3.2 *Il existe une constante C telle que, si r est un réel strictement positif et v un champ de vecteurs appartenant à l'espace $L^\infty([0,T]; Lip \cap C^r)$ une solution de (EM), alors, pour tout t de l'intervalle $[0,T]$, on a,*

$$\|v(t)\|_r \leq \|v_0\|_r \exp\left(\frac{C^{r+1}}{r}\int_0^t \|v(\tau)\|_{Lip} d\tau\right).$$

L'inégalité stationnaire mérite que l'on s'y arrête car elle est importante. Comme nous le verrons au paragraphe suivant, l'appartenance du tourbillon à l'espace L^∞ n'entraîne pas celle de ∇v à L^∞.

Lemme 3.3 *Il existe une constante C telle que, pour tout ϵ de l'intervalle $]0,1[$, pour tout a supérieur ou égal à 1, on ait :*

$$\|\nabla v\|_{L^\infty} \leq Ca\|\Omega\|_{L^a} + \frac{C}{\epsilon}\|\Omega\|_{L^\infty} \log\left(e + \frac{\|\Omega\|_\epsilon}{\|\Omega\|_{L^\infty}}\right).$$

Le point clef de la démonstration de ce lemme est l'inégalité

$$\|f\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{\epsilon}\|f\|_0 \log\left(e + \frac{\|f\|_\epsilon}{\|f\|_0}\right). \tag{25}$$

Pour la démontrer, on écrit f comme somme des $\Delta_q f$; d'où la majoration suivante :

$$\|f\|_{L^\infty} \leq \sum_{q \leq N-1} \|\Delta_q f\|_{L^\infty} + \sum_{q \geq N} \|\Delta_q f\|_{L^\infty}.$$

En utilisant la définition des normes hölderiennes, il vient, pour tout entier strictement positif N,

$$\|f\|_{L^\infty} \leq (N+1)\|f\|_0 + \frac{2^{-(N-1)\epsilon}}{2^\epsilon - 1}\|f\|_\epsilon.$$

En choisissant

$$N = 1 + \left[\frac{1}{\epsilon}\log_2 \frac{\|f\|_\epsilon}{\|f\|_0}\right],$$

il vient

$$\|f\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{\epsilon}\|f\|_0\left(1 + \log\frac{\|f\|_\epsilon}{\|f\|_0}\right).$$

Maintenant, observons que la loi de Boit-Savart entraîne que ∇v se déduit de Ω par des multiplicateurs de Fourier C^∞ et homogènes de degré 0. Il est facile de démontrer que ces opérateurs envoient continûment C^r dans lui-même. Par souci de simplicité, les basses fréquences, responsables du terme $Ca\|\Omega\|_{L^a}$ dans l'inégalité ci-dessus, sont ignorées. La fonction $x \mapsto x\log(e+\alpha/x)$ étant croissante sur $\mathbf{R}_\star^+$ pour tout $\alpha \geq 0$, ceci conclut la démonstration du lemme.

4 Le théorème de Yudovich

L'objectif de cette section est la démonstration d'un théorème d'existence et d'unicité pour le système d'Euler incompressible lorsque le champ de vecteurs à l'instant initial est à tourbillon borné et supporté dans un compact. Dans ce cas, l'espace où l'on doit inclure la donnée initiale est, d'après le lemme 2.1, un espace du type E_m (voir la définition 2.5). Enonçons maintenant le théorème, démontré par V. Yudovich dans [36].

Théorème 4.1 *Soient m un réel et v_0 un champ de vecteurs de divergence nulle appartenant à l'espace E_m. Supposons en outre que ω_0 appartienne à $L^\infty \cap L^a$ avec $1 < a < +\infty$. Il existe alors une unique solution (v,p) de (E) appartenant à l'espace $C(\mathbf{R}; E_m) \times L^\infty_{loc}(\mathbf{R}; L^2)$ et telle que le tourbillon ω du champ de vecteurs v appartienne à $L^\infty(\mathbf{R}^3) \cap L^\infty(\mathbf{R}; L^a(\mathbf{R}^2))$.*

De plus, ce champ de vecteurs v possède un flot. Plus précisément, il existe une unique application ψ continue de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$ telle que

$$\psi(t,x) = x + \int_0^t v(s,\psi(s,x))ds.$$

En outre, il existe une constante C telle que $\psi(t) - \mathrm{Id} \in C^{\exp(-Ct\|\omega_0\|_{L^\infty \cap L^a})}$. Plus précisément, posons

$$\|v\|_{LL} \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{0<|x-x'|\leq 1} \frac{|v(t,x)-v(t,x')|}{|x-x'|(1-\log|x-x'|)} < \infty.$$

Le flot ψ est tel que, pour tout t, on ait

$$\begin{aligned}|x-y| \leq e^{1-\exp\int_0^t \|v(s)\|_{LL} ds} \Rightarrow |\psi(t,x) - \psi(t,y)| \\ \leq |x-y|^{\exp - \int_0^t \|v(s)\|_{LL} ds} e^{1-\exp - \int_0^t \|v(s)\|_{LL} ds}.\end{aligned}$$

L'existence et l'unicité des solutions vont résulter très facilement du lemme ci-après.

Lemme 4.1 *Etant donné un réel a strictement supérieur à 1, il existe une constante C vérifiant la propriété qui suit.*

Soient (v_1, p_1) et (v_2, p_2) deux solutions du système d'Euler incompressible (E). Supposons qu'elles appartiennent toutes deux à un même espace $L^\infty_{loc}(\mathbf{R}; E_m) \times L^\infty_{loc}(\mathbf{R}; L^2)$ et que ω_i appartienne à $L^\infty \cap L^a$. Posons

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \left(C \max_i \|v_i(0) - \sigma\|_{L^2} e^{t\|\nabla\sigma\|_{L^\infty}} + \max \|\omega_i\|_{L^\infty \cap L^a} + 1\right)^{\frac{2}{a}} \quad \textit{et} \\ \beta(t) &= e \int_0^t \alpha(s) ds. \end{aligned}$$

On a alors la relation suivante :

$$\begin{aligned} &\|v_1(0) - v_2(0)\|^2_{L^2} \leq e^{-a(\exp \beta(t) - 1)} \\ &\qquad \Rightarrow \|v_1(t) - v_2(t)\|^2_{L^2} \leq \|v_1(0) - v_2(0)\|_{L^2}^{2 \exp -\beta(t)} e^{a(1 - \exp -\beta(t))}. \end{aligned}$$

Il s'agit d'estimer la fonction

$$I(t) \stackrel{\text{déf}}{=} \|(v_1 - v_2)(t)\|^2_{L^2}.$$

Pour cela, considérons un réel strictement positif ϵ et étudions la fonction

$$I_\epsilon(t) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\mathbf{R}^2} \chi(\epsilon x) |(v_1 - v_2)(t, x)|^2 dx.$$

Tout d'abord, il convient de remarquer que, pour tout $b \geq a$, $v \cdot \nabla v$ appartient à L^b. Or, on sait que $\partial_i p = -\partial_i \sum_{j,k} \partial_j \Delta^{-1}(v^k \partial_k v^j)$. Il est bien connu que les multiplicateurs de Fourier envoient L^a dans lui-même. Nous utiliserons le résultats précis suivant, démontré par exemple dans [34].

Théorème 4.2 *Il existe une constante C telle que l'on ait la propriété suivante : Pour tout a appartenant à $]1, \infty[$ et pour tout champ de vecteurs de divergence nulle v dont le gradient est L^a, on a*

$$\|\nabla v\|_{L^a} \leq C \frac{a^2}{a-1} \|\Omega(v)\|_{L^a}.$$

Le fait que les (v_i, p_i) soient des solutions du système (E) assure donc que

$$\forall b \geq a \,,\ \partial_t v_i \in L^b.$$

En posant $p = p_1 - p_2$, ceci donne un sens aux calculs qui suivent.

$$\begin{aligned}
I'_\epsilon(t) &= -\sum_j \int_{\mathbf{R}^2} \chi(\epsilon x) v_1^j(t,x) \partial_j |(v_1 - v_2)(t,x)|^2 dx \\
&\quad + \sum_i \int_{\mathbf{R}^2} \chi(\epsilon x)(v_1 - v_2)^i(t,x) \partial_i p(t,x) dx \\
&\quad + 2\sum_{i,j} \int_{\mathbf{R}^2} \chi(\epsilon x)(v_1 - v_2)^i(t,x)(v_1 - v_2)^j(t,x) \partial_j v^i(t,x) dx.
\end{aligned}$$

Les champs de vecteurs v_i étant de divergence nulle, il résulte d'intégrations par parties que

$$\begin{aligned}
I'_\epsilon(t) &= 2\int_{\mathbf{R}^2} \chi(\epsilon x) |(v_1 - v_2)(t,x)|^2 |\nabla v_2(t,x)| dx + R_\epsilon(t) \quad \text{avec} \\
R_\epsilon(t) &= \epsilon \sum_j \int_{\mathbf{R}^2} |(v_1 - v_2)(t,x)|^2 v_1^j(t,x) (\partial_j \chi)(\epsilon x) dx \\
&\quad + 2\epsilon \sum_i \int_{\mathbf{R}^2} (v_1 - v_2)^i(t,x) (\partial_i \chi)(\epsilon x) p(t,x) dx
\end{aligned}$$

Le champ de vecteurs $v_1 - v_2$ appartient à $L^\infty_{loc}(\mathbf{R}; L^2 \cap L^\infty)$ et la pression à $L^\infty_{loc}(\mathbf{R}; L^2)$; il en résulte que

$$R_\epsilon(t) \leq C(t)\epsilon \quad \text{avec} \quad C \in L^\infty_{loc}(\mathbf{R}). \tag{26}$$

L'inégalité de Hölder implique que, pour tout $b \geq a$, on a

$$I'_\epsilon(t) \leq 2\Big(\int_{\mathbf{R}^2} \chi(\epsilon x) |v_1(t,x) - v_2(t,x)|^{\frac{2a}{a-1}} dx\Big)^{1-\frac{1}{a}} \Big(\int_{\mathbf{R}^2} |\nabla v_2(t,x)|^a dx\Big)^{\frac{1}{a}} + R_\epsilon(t).$$

D'où il vient, pour tout $b \geq a$,

$$I'_\epsilon(t) \leq 2\|v_1(t) - v_2(t)\|_{L^\infty}^{\frac{2}{b}} I_\epsilon(t)^{1-\frac{1}{b}} \|\nabla v_2(t)\|_{L^b} + R_\epsilon(t).$$

D'après la loi de Biot-Savart, le théorème 4.2 et la conservation du tourbillon le long des lignes de flot, il vient, pour tout $b \geq a$,

$$\|\nabla v_2(t)\|_{L^b} \leq Ca \|\omega_2(0)\|_{L^a}.$$

De plus, on sait que

$$\begin{aligned} \|v_i\|_{L^\infty} &\le C\|\chi(D)(v_i-\sigma)\|_{L^\infty} + C\|\sigma\|_{L^\infty} + \|(\mathrm{Id}-\chi(D))v_i\|_{L^\infty} \\ &\le C(\|v_i(t)-\sigma\|_{L^2} + \|\sigma\|_{L^\infty} + \|\omega_i(0)\|_{L^\infty}) \\ &\le C(\|v_i(0)-\sigma\|_{L^2} e^{t\|\nabla\sigma\|_{L^\infty}} + \|\sigma\|_{L^\infty} + \|\omega_i(0)\|_{L^\infty}). \end{aligned}$$

Il en résulte que, pour tout b supérieur ou égal à a, on a

$$I'_\epsilon(t) \le \alpha(t) b I_\epsilon(t)^{1-\frac{1}{b}} + R_\epsilon(t). \tag{27}$$

Supposons maintenant que $\|v_1(0)-v_2(0)\|_{L^2}^2 < 1$. Soit η un réel tel que $0<\eta<1-I(0)$. Posons

$$J_{\epsilon,\eta}(t) = \eta + I_\epsilon(t).$$

Toutes les inégalités écrites dans la suite ne seront valables que sous l'hypothèse que $\eta + I(t) \le 1$. Il résulte de l'inégalité (27) que

$$J'_{\epsilon,\eta}(t) \le \alpha(t) J_{\epsilon,\eta}(t)^{1-\frac{1}{b}} + R_\epsilon(t).$$

En prenant $b = a - \log J_{\epsilon,\eta}(t)$, on obtient

$$\begin{aligned} J'_{\epsilon,\eta}(t) &\le \alpha(t)(a-\log J_{\epsilon,\eta}(t)) J_{\epsilon,\eta}(t) \exp \frac{-\log J_{\epsilon,\eta}(t)}{a - \log J_{\epsilon,\eta}(t)} + R_\epsilon(t) \\ &\le e\alpha(t)(a-\log J_{\epsilon,\eta}(t)) J_{\epsilon,\eta}(t) + R_\epsilon(t). \end{aligned}$$

Il est aisé d'observer que, pour toute fonction dérivable f de $\mathbf{R}$ dans l'intervalle $]0,1[$, on a, pour tout $\lambda \in]0,1[$,

$$-\frac{1}{\lambda}\frac{d}{dt}\log(1-\lambda\log f(t)) = \frac{f'(t)}{f(t)(1-\lambda\log f(t))}. \tag{28}$$

On en déduit que

$$-\frac{d}{dt}\log(a-\log J_{\epsilon,\eta}(t)) \le e\alpha(t) + \frac{R_\epsilon(t)}{a\eta}.$$

Posons alors

$$\overline{\beta}_{\epsilon,\eta}(t) = \beta(t) + \int_0^t \frac{R_\epsilon(\tau)}{a\eta} d\tau.$$

Par définition de β, il vient, après intégration,

$$-\log\Big(1-\frac{1}{a}\log J_{\epsilon,\eta}(t)\Big) + \log\Big(1-\frac{1}{a}\log J_\epsilon(0)\Big) \le \overline{\beta}_{\epsilon,\eta}(t).$$

Par passage à l'exponentielle, on en déduit que

$$\log J_{\epsilon,\eta}(t) \leq a(1 - e^{-\overline{\beta}_{\epsilon,\eta}(t)}) + e^{-\overline{\beta}_{\epsilon,\eta}(t)} \log J_{\epsilon,\eta}(t)$$

D'où, à nouveau en passant à l'exponentielle,

$$J_{\epsilon,\eta}(t) \leq e^{a(1-e^{-\overline{\beta}_{\epsilon,\eta}(t)})} J_\epsilon(0)^{\exp -\overline{\beta}_{\epsilon,\eta}(t)}.$$

Par définition de R_ϵ, on a

$$R_\epsilon(t) \leq C(t)\epsilon \quad \text{avec} \quad C \in L^\infty_{loc}.$$

En faisant tendre ϵ vers 0, puis η vers 0 et en passant à la limite, on conclut la démonstration du lemme.

La démonstration du résultat sur le flot ψ se fait par des calculs très analogue à ceux qui nous ont servi à démontrer ce lemme.

Nous allons maintenant exhiber une solution du système d'Euler incompressible montrant le caractère optimal du théorme de Yudovich. Nous allons construire une solution vérifiant les propriétés suivantes :

- le tourbillon ω du champ de vecteurs v solution est, à chaque instant t, borné et nul en dehors d'un ensemble compact,
- à chaque instant t, le flot $\psi(t)$ de v n'appartient pas à la classe de Hölder $C^{\exp -t}$.

Construisons tout d'abord la donnée initiale. Soit ω_0 la fonction sur le plan $\mathbf{R}^2$ nulle en dehors de $[-1,1] \times [-1,1]$, impaire en les deux variables x_1 et x_2 et valant 2π sur $[0,1] \times [0,1]$. On considère le champ de vecteurs v_0 défini par

$$v_0(x_1, x_2) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int \frac{x_2 - y_2}{|x-y|^2} \omega_0(y) dy \\ \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int \frac{x_1 - y_1}{|x-y|^2} \omega_0(y) dy. \end{cases}$$

Nous allons démontrer le théorème ci-dessous, repris de [4].

Théorème 4.3 *Soit v la solution de l'équation d'Euler associée à la donnée initiale v_0 définie ci-dessus. A l'instant t, le flot $\psi(t)$ du champ de vecteurs v n'appartient à C^α pour aucun $\alpha > \exp -t$.*

Il convient d'étudier quelque peu le champ de vecteurs v_0. Ce champ n'est bien sûr pas lipschitzien. Il présente des symétries qui vont nous permettre de le décrire assez bien. En effet, le champ de vecteurs v_0 est symétrique par rapport aux deux axes de coordonnées. Il en résulte que ce champ de vecteurs est tangent à ces deux axes et donc nul à l'origine. Nous allons démontrer l'existence d'une constante C telle que, pour tout x_1 tel que $0 \leq x_1 \leq C$, on ait

$$\exists C \ / \ \forall x \in [0, C], \ v_0^1(x_1, 0) \geq -2x_1 \log x_1. \tag{29}$$

En effet, en posant $\widetilde{\omega}_0(x_1) = 2H(x_1) - 1$ (H désignant la fonction de Heavyside), il vient

$$\begin{aligned} v_0^1(x_1, 0) &= \frac{1}{2\pi} \int \frac{y_2}{|x-y|^2} \omega_0(y) dy \\ &= \int_{-1}^{1} dy_1 \widetilde{\omega}_0(y_1) \int_0^1 \frac{2y_2}{(x_1 - y_1)^2 + y_2^2} dy_2. \end{aligned}$$

Par un calcul immédiat, on en déduit que, si $0 \leq x_1 < 1$, on a

$$v_0^1(x_1, 0) = -4x_1 \log x_1 + f(x_1),$$

où f désigne une fonction impaire indéfiniment différentiable sur $]-1, 1[$. Ceci assure l'assertion (29).

Revenons maintenant à l'équation d'Euler et à sa solution v correspondant à la donnée initiale v_0. D'après le théorème 4.1, le flot du champ de vecteurs v est une fonction continue de la variable (t, x). De plus, on sait qu'à chaque instant, le champ de vecteurs v est symétrique par rapport aux deux axes de coordonnées. Ainsi, ces deux axes sont globalement invariants par le flot. L'origine, qui est leur point d'intersection, est donc stable par le flot ψ du champ de vecteurs v. On a donc, pour tout t,

$$\psi(t, 0) = 0, \ \psi^1(t, 0, x_2) = 0 \quad \text{et} \quad \psi^2(t, x_1, 0) = 0. \tag{30}$$

Soit T un réel strictement positif arbitraire. Le tourbillon est conservé le long des lignes de flot (voir l'égalité (14)). La relation (30) ci-dessus assure donc l'existence d'un voisinage W de l'origine tel que l'on ait, pour tout $t \in [0, T]$,

$$\omega(t)_{|W} = \omega_{0|W}.$$

Le champ de vecteurs de divergence nulle $\widetilde{v}(t) = v(t) - v_0$ est symétrique par rapport aux deux axes de coordonnées. Son tourbillon est identiquement nul sur W. Donc, il existe une constante A telle que l'on ait, pour tout $t \in [0, T]$,

$$|v(t,x) - v_0(x)| \leq A|x|.$$

De l'inégalité (29), il résulte l'existence d'une constante C' telle que, $(t, x_1) \in [0, T] \times [0, C']$, on ait

$$v(t, x_1, 0) \geq -x_1 \log x_1.$$

Soit maintenant $x_1 \in [0, 1[$ tel que, pour tout $t \in [0, T]$, on ait

$$\psi^1(t, x_1, 0) \in [0, C'].$$

Il résulte de l'inégalité ci-dessus que l'on a

$$\psi^1(t, x_1, 0) \geq x_1(t) \quad \text{avec} \quad x_1'(t) = -x_1(t) \log x_1(t).$$

Il en résulte alors que $\psi^1(t, x_1, 0) \geq x_1^{\exp -t}$. Comme on a $\psi(t, 0) = 0$, le théorème 4.3 est démontré.

5 Structures géométriques stables

Le but de ce paragraphe est d'exposer des résultats de persistance de structures géométriques dans les fluides parfaits incompressibles. La motivation initiale de ces questions est le problème des poches de tourbillon. Supposons que le tourbillon soit, à l'instant initial, la fonction caractéristique d'un ouvert borné D_0 dont le bord est de classe de Hölder $C^{k+\epsilon}$ avec k un entier strictement positif et ϵ un réel de l'intervalle $]0, 1[$. Nous nous restreindrons ici au cas où la régularité du bord est $C^{1+\epsilon}$. D'après le théorème 4.1, il existe un unique champ de vecteurs solution des équations d'Euler sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^2$, dont le tourbillon appartient à $L^\infty(\mathbf{R}^3)$. Cette solution est alors quasi-lipschitzienne. Un tel champ de vecteurs possède un flot ψ à régularité exponentiellement décroissante en fonction du temps, c'est-à-dire que $\psi(t)$ est un homéomorphisme de classe de Hölder $C^{\exp(-\alpha t)}$. D'après la relation (14), le tourbillon à l'instant t est alors la fonction caractéristique d'un ouvert borné D_t dont la topologie reste inchangée. Par contre, le bord de cet ouvert n'est plus a priori que de classe $C^{\exp(-\alpha t)}$. Deux questions très naturelles se posent alors : le bord de l'ouvert reste-t-il régulier à temps petit? si oui, que se passe-t-il pour les temps grands?

Dans le cas où le tourbillon à l'instant initial est la fonction caractéristique de l'intérieur d'une courbe du plan, fermée, simple et de classe $C^{1+\epsilon}$, on peut être tenté de suivre la démarche suivante. Soit γ_0 un plongement du cercle $\mathbf{S}^1$ de classe $C^{1+\epsilon}$ dont l'image est le bord de l'ouvert D_t. Le champ de vecteurs solution est alors complètement déterminé par le bord de l'ouvert. Cherchons alors un paramétrage de ce bord par la fonction γ définie par

$$\partial_t \gamma(t,s) = v(t, \gamma(t,s)). \tag{31}$$

Or, d'après la loi de Biot-Savart, le champ de vecteurs solution est défini par $v(t) = \nabla^{\perp} f(t)$ avec

$$f(t,x) = \frac{1}{2\pi} \int_{D_t} \log|x-y| dy.$$

En admettant que $\gamma(t,\cdot)$ soit un plongement de classe $C^{1+\epsilon}$ du cercle, il vient, par une formule de Green,

$$v(t,x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|x - \gamma(t,\sigma)|\, \partial_\sigma \gamma(t,\sigma) d\sigma.$$

D'après (31), il s'agit de résoudre, dans l'ensemble des plongements de classe $C^{1+\epsilon}$, l'équation suivante :

$$\partial_t \gamma(t,s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|\gamma(t,s) - \gamma(t,\sigma)|\, \partial_\sigma \gamma(t,\sigma) d\sigma. \tag{32}$$

On a le théorème suivant.

Théorème 5.1 *Soient ϵ appartenant à l'intervalle $]0,1[$ et γ_0 une fonction de l'espace $C^{1+\epsilon}(\mathbf{S}^1;\mathbf{R}^2)$ injective et dont la différentielle ne s'annule pas. Il existe alors une unique solution $\gamma(t,s)$ de l'équation (32) appartenant à l'espace $L^\infty_{loc}(\mathbf{R}; C^{1+\epsilon}(\mathbf{S}^1;\mathbf{R}^2))$ et qui est, pour tout temps, un plongement du cercle.*

Nous allons démontrer un théorème général de persistance des structures géométriques non singulières pour le système d'Euler incompressible. Ce théorème contiendra bien sûr le théorème ci-dessus. Le concept important sera celui de régularité tangentielle par rapport à une famille substantielle X de champs de vecteurs de classe C^ϵ. Voici ce dont il s'agit.

Il nous faut trouver une condition suffisante pour que, si une fonction u est bornée, les fonctions $\partial_i \partial_j \Delta^{-1} u$ le soient aussi. En termes de mécanique des fluides, ceci revient à trouver comment majorer les dérivées du champ des vitesses des particules à partir de la norme L^∞ du tourbillon. Il est apparu qu'une réelle compréhension du problème passe par la réponse à la question suivante : si l'on régularise la fonction caractéristique d'un domaine borné régulier, a-t-on des estimations uniformes (par rapport au paramètre de régularisation) sur le champ de vecteurs de divergence nulle associé au tourbillon régularisé? L'exemple de la fonction caractéristique d'un carré montre que certains fermés du plan peuvent être des points singuliers.

Ceci nous amène à introduire les définitions suivantes. Dans toute la suite de cette section, on désignera par ϵ un réel de l'intervalle $]0,1[$ et par Σ un quelconque fermé du plan (éventuellement vide).

Définition 5.1 *Soit* $X = (X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *une famille de champs de vecteurs de classe* C^ϵ *ainsi que leur divergence. Une telle famille est dite substancielle en dehors de* Σ *si et seulement si l'on a*

$$I(\Sigma, X) = \inf_{x\notin\Sigma} \sup_{\lambda\in\Lambda} |X_\lambda(x)| > 0.$$

Définissons maintenant la notion de régularité tangentielle par rapport à une famille substantielle de champs de vecteurs.

$$\begin{aligned}
N_\epsilon(\Sigma, X) &= \frac{1}{\epsilon} \sup_{\lambda\in\Lambda} \frac{\|X_\lambda\|_\epsilon + \|\operatorname{div} X_\lambda\|_\epsilon}{I(\Sigma, X)}, \\
\|u\|^{\epsilon,0}_{\Sigma,X} &= N_\epsilon(\Sigma, X)\|u\|_0 + \sup_{\lambda\in\Lambda} \frac{\|X_\lambda(x,D)u\|_{\epsilon-1}}{I(\Sigma, X)} \quad \text{et} \\
\|u\|^{\epsilon}_{\Sigma,X} &= N_\epsilon(\Sigma, X)\|u\|_{L^\infty} + \sup_{\lambda\in\Lambda} \frac{\|X_\lambda(x,D)u\|_{\epsilon-1}}{I(\Sigma, X)}.
\end{aligned}$$

Dans le cas des poches de tourbillon à bord régulier, l'ensemble Σ est vide. On peut alors l'oublier et poser

$$\begin{aligned}
I(X) &= \inf_{x\in\mathbf{R}^2} \sup_{\lambda\in\Lambda} |X_\lambda(x)| \quad (>0), \\
N_\epsilon(X) &= \frac{1}{\epsilon} \sup_{\lambda\in\Lambda} \frac{\|X_\lambda\|_\epsilon + \|\operatorname{div} X_\lambda\|_\epsilon}{I(X)}, \\
\|u\|_{\epsilon,X} &= N_\epsilon(X)\|u\|_{L^\infty} + \sup_{\lambda\in\Lambda} \frac{\|X_\lambda(x,D)u\|_{\epsilon-1}}{I(X)}.
\end{aligned}$$

Définition 5.2 *Soit* X *une famille substantielle de champs de vecteurs de classe* C^ϵ *ainsi que leur divergence (on suppose* $\Sigma = \emptyset$*). On désigne par*

$C^\epsilon(\Sigma, X)$ *l'ensemble des distributions* u *appartenant à* L^∞ *telles que, pour tout* λ, *on ait*

$$X_\lambda(x,D)u \stackrel{\text{déf}}{=} \operatorname{div}(uX_\lambda) - u \operatorname{div} X_\lambda \in C^{\epsilon-1}.$$

Ce type de régularité a été utilisé tout d'abord dans des problèmes de propagation de singularités dans les équations strictement hyperboliques fortement non linéaires (voir [1] et [10]–[13]). Introduit tout d'abord dans [14] pour étudier le système d'Euler, ce type de régularité a permis de démontrer dans [15] et [16] le théorème de persistance ci-dessous.

Théorème 5.2 *Soient* ϵ *un réel de l'intervalle* $]0,1[$, a *un réel supérieur à 1 et* $X_0 = (X_{0,\lambda})_{\lambda\in\Lambda}$ *une famille substantielle de classe* C^ϵ *sur le plan. On considère un champ de vecteurs* v_0 *sur* $\mathbf{R}^2$ *appartenant à* $C^1_\star$ *et dont le gradient est dans* L^a. *Si* ω_0 *appartient à* $C^\epsilon(X_0)$, *alors, il existe une unique solution* v *de (E) telle que*

$$v \in L^\infty_{loc}(\mathbf{R}; Lip) \quad \textit{et} \quad \nabla v \in L^a.$$

De plus, si ψ *désigne le flot de* v, *alors, pour tout* λ,

$$X_{0,\lambda}(x,D)\psi \in L^\infty_{loc}(\mathbf{R}; C^\epsilon).$$

Enfin, si $X_{t,\lambda} = \psi(t)^\star X_{0,\lambda}$, *alors, la famille* $X_t = (X_{t,\lambda})_{\lambda\in\Lambda}$ *est substantielle et l'on a*

$$N_\epsilon(X_t) \in L^\infty_{loc}(\mathbf{R}) \quad \textit{et} \quad \|\omega(t)\|_{\epsilon,X_t} \in L^\infty_{loc}(\mathbf{R}).$$

Postérieurement, A. Bertozzi et P. Constantin ont redémontré dans [8] le cas particulier du théorème 5.1. De plus, P. Serfati a donné dans [31] une nouvelle démonstration du théorème 5.2. Enfin, une version en dimension trois et à temps petit de ce théorème a été démontré par P. Gamblin et X. Saint-Raymond dans [24].

Vérifier que ce théorème entraîne bien le théorème 5.1 est un exercice que nous laissons au lecteur.

La démarche suivie ici est la même que celle qui inspire la preuve du théorème 4.1. Régularisons la donnée initiale. On pose

$$v_{0,n} = S_n v_0 \quad \text{et} \quad \omega_{0,n} = S_n\omega_0. \tag{33}$$

Le théorème 3.1 d'existence globale de solutions régulières affirme l'existence d'une solution globale v_n du système (E). Le point important de la présente preuve consiste à démontrer une estimation a priori sur la norme Lipschitz d'une solution régulière du système (E), puis de passer à la limite. Pour cela, on utilise l'estimation stationnaire suivante.

Théorème 5.3 *Il existe une constante C telle que, pour tout réel ϵ de l'intervalle $]0,1[$, pour tout a supérieur ou égal à 1 et pour tout fermé Σ du plan, on ait la propriété suivante :*

Soit X une quelconque famille de champs de vecteurs de classe C^ϵ ainsi que leur divergence ; on suppose que X est substantielle en dehors de Σ. On considère alors une fonction ω appartenant à $C^\epsilon(\Sigma, X) \cap L^a$. Si v est un champ de vecteurs de gradient $L^{a+\epsilon}$ et de tourbillon ω, alors le gradient de v est borné et l'on a

$$\|\nabla v\|_{L^\infty(\Sigma^c)} \leq Ca\|\omega\|_{L^a} + \frac{C}{\epsilon}\|\omega\|_{L^\infty} \log\left(e + \frac{\|\omega\|^\epsilon_{\Sigma,X}}{\|\omega\|_{L^\infty}}\right). \tag{34}$$

Il est un cas particulier où la démonstration de ce théorème est particulièrement simple. Supposons que la famille substantielle X soit réduite au seul champ de vecteurs ∂_1 et accessoirement, que le support de la transformée de Fourier de ω ne rencontre pas l'origine. Il est évident que $\Sigma = \emptyset$ et que $\|X\|_\epsilon = I(\Sigma, X) = 1$.

D'après l'inégalité (25), il est clair que l'on a, pour j valant 1 ou 2,

$$\|\partial_1\partial_j\Delta^{-1}\omega\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{\epsilon}\|\partial_1\partial_j\Delta^{-1}\omega\|_0 \log\left(e + \frac{\|\partial_1\partial_j\Delta^{-1}\omega\|_\epsilon}{\|\partial_1\partial_j\Delta^{-1}\omega\|_0}\right).$$

Comme les multiplicateurs de Fourier opèrent dans les espaces de Hölder, on a

$$\|\partial_1\partial_j\Delta^{-1}\omega\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{\epsilon}\|\omega\|_0 \log\left(e + \frac{\|\partial_1\omega\|_{\epsilon-1}}{\|\omega\|_0}\right). \tag{35}$$

Il reste maintenant à estimer $\|\partial_2^2\Delta^{-1}\omega\|_{L^\infty}$. Le fait que $\partial_2^2 = \Delta - \partial_1^2$ assure que

$$\|\partial_i\partial_j\Delta^{-1}\omega\|_{L^\infty} \leq \|\omega\|_{L^\infty} + \frac{C}{\epsilon}\|\omega\|_0 \log\left(e + \frac{\|\partial_1\omega\|_{\epsilon-1}}{\|\omega\|_0}\right).$$

D'où le théorème dans ce cas très particulier.

Pour passer au cas général, une difficulté sérieuse se présente. Elle provient de la faible régularité des champs de vecteurs X_λ et de leur éventuelle tendance à s'annuler. L'un des points cruciaux est que toutes ces tendances à perturber l'inégalité n'apparaissent qu'atténuées par un logarithme.

Supposons pour simplifier que la transformée de Fourier de ω est identiquement nulle dans un voisinage de l'origine. La première étape consiste à majorer, pour un quelconque champ de vecteurs Y de classe C^ϵ, la quantité $\|Y(x,D)v\|_{L^\infty}$. Pour cela, nous utiliserons une généralisation, dûe à P. Gérard, de l'inégalité (25) (voir [25]). Ceci permet d'écrire

$$\|Y(x,D)v\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{\epsilon}\|Y\|_{L^\infty}\|\omega\|_0 \log\left(e + \frac{\|Y\|_\epsilon}{\|Y\|_{L^\infty}} + \frac{\|Y(x,D)v\|_\epsilon}{\|Y\|_{L^\infty}\|\omega\|_0}\right)\cdot \quad (36)$$

Ceci est l'analogue de l'inégalité (35). L'analogue de l'évidente relation $\partial_2^2 = \Delta - \partial_1^2$ est

$$\begin{aligned}
|Y(x)|\partial_1^2 &= \frac{Y^1(x)Y(x,D)\partial_1 - Y^2(x)Y(x,D)\partial_2 + (Y^2(x))^2\Delta}{|Y(x)|},\\
|Y(x)|\partial_2^2 &= \frac{Y^2(x)Y(x,D)\partial_2 - Y^1(x)Y(x,D)\partial_1 + (Y^1(x))^2\Delta}{|Y(x)|},\\
|Y(x)|\partial_1\partial_2 &= \frac{Y^1(x)Y(x,D)\partial_2 + Y^1(x)Y(x,D)\partial_2 - Y^1(x)Y^2(x)\Delta}{|Y(x)|}.
\end{aligned}$$

Comme $|Y^i(x)| \leq |Y(x)|$, il vient, pour tout point x du plan,

$$|Y(x)|\times|\nabla v(x)| \leq \frac{C}{\epsilon}\|Y\|_{L^\infty}\|\omega\|_{L^\infty} \log\left(e + \frac{\|Y\|_\epsilon}{\|Y\|_{L^\infty}} + \frac{\|Y(x,D)v\|_\epsilon}{\|Y\|_{L^\infty}\|\omega\|_{L^\infty}}\right)\cdot \quad (37)$$

Nous allons maintenant appliquer l'inégalité ci-dessus à des champs de vecteurs Y_λ construits à partir des champs de vecteurs X_λ. Soient

$$U_\lambda = \{x \in \mathbf{R}^2 \,/ 2|X_\lambda(x)| > I(\Sigma, X)\} \quad \text{et} \quad \delta = \left(\frac{I(\Sigma,X)}{4\|\widetilde{X}_\lambda\|_\epsilon}\right)^{\frac{1}{\epsilon}}\cdot$$

Considérons alors ρ une fonction positive d'intégrale 1, indéfiniment différentiable et nulle en dehors de $B(0,1)$. On pose alors

$$\theta_\lambda = \delta^{-2}\rho(\delta^{-1}\cdot) \star \mathbf{1}_{U_\lambda} \quad \text{et} \quad Y_\lambda = \frac{\theta_\lambda}{|X_\lambda|}X_\lambda.$$

En appliquant l'inégalité (37) (avec $\epsilon/2$) au champ de vecteurs Y_λ, il vient, pour tout x du plan tel que $\theta_\lambda(x) = 1$,

$$|\nabla v(x)| \leq \frac{C}{\epsilon}\|\omega\|_{L^\infty} \log\left(e + \|Y_\lambda\|_\epsilon + \frac{\|Y_\lambda(x,D)v\|_{\epsilon/2}}{\|\omega\|_{L^\infty}}\right)\cdot \quad (38)$$

Il est très facile de démontrer que

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\{x\;/\;\theta_\lambda(x)=1\}=\Sigma^c.$$

De plus, un tout petit peu de calcul paradifférentiel assure que

$$\|Y_\lambda(x,D)v\|_{\epsilon/2}\leq\frac{\|X_\lambda(x,D)\|_{\epsilon/2}}{I(\Sigma,X)}+C\|\omega\|_0\|X_\lambda\|_\epsilon N_\epsilon(\Sigma,X)^3.$$

D'après la majoration (38), il ressort que l'on a l'inégalité suivante :

$$\|\nabla v\|_{L^\infty(V_\lambda)}\leq\frac{C}{\epsilon}\|\omega\|_0\log\left(e+N_\epsilon(\Sigma,X)+\frac{\|X_\lambda(x,D)v\|_{\epsilon/2}}{I(\Sigma,X)\|\omega\|_0}\right).\tag{39}$$

Un peu de calcul paradifférentiel permet de démontrer que

$$\|X_\lambda(x,D)v\|_{\epsilon/2}\leq\|\omega\|^\epsilon_{\Sigma,X},$$

d'où le théorème, le cas des basses fréquences étant trivial.

Remarque L'exemple dont les propriétés sont décrites par le théorème 4.3 montre que le logarithme est optimal.

L'étude du comportement dynamique est basé sur le même principe que l'étude du cas régulier, (i.e. le cas où la régularité est C^r avec $r>1$). Il s'agit de contrôler la norme Lipschitz du champ de vecteurs solution. Pour cela, nous allons démontrer que, pour tout temps t, on a

$$\begin{aligned}\|\nabla v(t)\|_{L^\infty}&\leq\widetilde{N}(X_0,\epsilon,\omega_0)\exp\frac{Ct\|\omega_0\|_{L^\infty}}{\epsilon^2}\quad\text{avec}\\ \widetilde{N}(X_0,\epsilon,\omega_0)&=Ca\|\omega_0\|_{L^a}+\frac{C}{\epsilon}\|\omega_0\|_{L^\infty}\log\frac{\|\omega_0\|_{\epsilon,X_0}}{\|\omega_0\|_{L^\infty}}.\end{aligned}\tag{40}$$

C'est ici qu'intervient la dynamique. L'idée est très simple ; on transporte les données géométriques, c'est-à-dire la famille substantielle par le flot du champ de vecteurs v et l'on applique l'inégalité du théorème 5.3 à chaque instant.

Définissons donc la famille $X_t=(X_{t,\lambda})_\lambda\in\Lambda$ par

$$X_{t,\lambda}(x)=\psi_\star(t)X_{0,\lambda}(x)=\Big(X_{0,\lambda}(x,D)\psi(t)\Big)(\psi^{-1}(t,x)).\tag{41}$$

Le point décisif de la démonstration est la majoration de $\|\omega(t)\|_{\epsilon,X_t}$. En utilisant le calcul paradifférentiel, le lemme 3.1 et les relations qui suivent,

$$\left\{\begin{array}{rcl}\partial_t X_{0,\lambda}(x,D)\psi(t,x) & = & \nabla v(t,\psi(t,x))X_{0,\lambda}(x,D)\psi(t,x)\\ X_{0,\lambda}(x,D)\psi(0,x) & = & X_{0,\lambda}(x),\end{array}\right.$$

$$\partial_t X_{t,\lambda} + v\cdot\nabla X_{t,\lambda} = X_{t,\lambda}(x,D)v,$$

$$\partial_t \operatorname{div} X_{t,\lambda} + v\cdot\nabla \operatorname{div} X_{t,\lambda} = X_{t,\lambda}(x,D)\operatorname{div} v,$$

on démontre que

$$\frac{\|\omega(t)\|_{\epsilon,X_t}}{\|\omega(t)\|_{L^\infty}} \leq C\frac{\|\omega_0\|_{\epsilon,X_0}}{\|\omega_0\|_{L^\infty}}\exp\left(\frac{C}{\epsilon}\int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty}d\tau\right).$$

Appliquons alors le théorème 5.3. On peut dès lors affirmer, grâce à la nullité de la divergence du champ de vecteurs v, que

$$\begin{aligned}\|\nabla v(t)\|_{L^\infty} \leq Ca\|\omega_0\|_{L^a} &+ \frac{C}{\epsilon}\|\omega_0\|_{L^\infty}\\ &\times\log\left(e+\frac{\|\omega_0\|_{\epsilon,X_0}}{\|\omega_0\|_{L^\infty}}\exp\left(\frac{C}{\epsilon}\int_0^t\|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty}d\tau\right)\right).\end{aligned}$$

Comme le quotient

$$\frac{\|\omega_0\|_{\epsilon,X_0}}{\|\omega_0\|_{L^\infty}}$$

est supérieur à 1, il est légitime d'écrire

$$\begin{aligned}\|\nabla v(t)\|_{L^\infty} \leq Ca\|\omega_0\|_{L^a} &+ \frac{C}{\epsilon}\|\omega_0\|_{L^\infty}\log\frac{\|\omega_0\|_{\epsilon,X_0}}{\|\omega_0\|_{L^\infty}}\\ &+\frac{C}{\epsilon^2}\|\omega_0\|_{L^\infty}\int_0^t\|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty}d\tau.\end{aligned}$$

Le lemme de Gronwall assure alors l'estimation (40).

Pour conclure cette section, nous voudrions faire remarquer que le caractère local de l'inégalité (34) n'est pas gratuit. En effet, il permet de démontrer un théorème de persistance des structures géométriques dégénérées (i.e. lorsque la famille $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ peut, en certains poins x du plan, être telle que $X_\lambda(x)=0$ pour tout $\lambda\in\Lambda$). L'énoncé d'un analogue du théorème 5.2 est possible. Nous nous contenterons d'énoncer ici un analogue du théorème 5.1. Nous renvoyons le lecteur à [18] pour de plus amples détails.

Théorème 5.4 *Soit D_0 un domaine borné du plan dont le bord est une courbe de classe $C^{1+\epsilon}$ en dehors d'un fermé Σ_0. Considérons la solution de Yudovich associé au champ de vecteurs v_0 de l'espace E_m (voir la définition 2.5) tel que $\omega(v_0) = \mathbf{1}_{D_0}$. A l'instant t, le domaine $D(t) = \psi(t, D_0)$ a un bord $\gamma(t)$ qui est de classe $C^{1+\epsilon}$ en dehors du fermé $\Sigma(t) = \psi(t, \Sigma_0)$.*

6 Le problème des nappes de tourbillon

Le problème des nappes de tourbillon consiste à chercher une solution du système d'Euler incompressible (E) en dimension deux lorsque le tourbillon à l'instant initial est la mesure de longueur d'une courbe compacte de classe C^1. Ce problème est l'analogue du problème des poches de tourbillon avec un "cran" de singularité en plus.

Démontrer l'analogue du résultat sur les poches de tourbillon (à supposer qu'il soit vrai) semble hors de portée. En effet, cela impliquerait que le tourbillon à l'instant t soit la mesure de longueur d'une courbe compacte régulière.

La voie que nous allons emprunter est la suivante. Tout d'abord, trouver une classe large et stable de données initiales contenant les champs de vecteurs de divergence nulle dont le tourbillon est la mesure de longueur d'une courbe compacte régulière. Ensuite, régulariser une donnée initiale prise dans cette classe. Le théorème 3.1 assure l'existence de solutions globales associées aux données régularisées. Enfin, les estimations a priori d'énergie et de conservation du tourbillon nous permettront de passer à la limite et ainsi de construire une solution.

Le résultat de cette démarche est le théorème suivant, démontré par J.-M. Delort dans [20].

Théorème 6.1 *Soient m un réel et v_0 un champ de vecteurs de divergence nulle appartenant à l'espace E_m. Supposons que ω_0, son tourbillon à l'instant initial, soit une mesure bornée de partie singulière positive. Il existe alors un couple (v, p) solution du système d'Euler (E) tel que v appartienne à l'espace $L^\infty_{loc}(\mathbf{R}; E_m)$ et p à l'espace $L^\infty_{loc}(\mathbf{R}; \mathcal{F}^{-1}(L^2 + L^\infty))$.*

De plus, à chaque instant t, le tourbillon ω_t est une mesure bornée de partie singulière positive et de masse totale inférieure ou égale à celle de ω_0.

Signalons que, dans [29], A. Majda redémontre ce théorème dans le cas où ω_0 est positif.

Il est très facile de vérifier que les données initiales du type "nappes de tourbillon", satisfont les hypothèses de ce théorème. Nous suivons la démarche annoncée. Soit ρ une fonction de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^2)$ positive et d'intégrale 1. Posons

$$v_{0,n} = \rho_n \star v_0 \quad \text{avec} \quad \rho_n(x) = n^d \rho\Big(\frac{x}{n}\Big) \tag{42}$$

et notons $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite des solutions associées. Lorsque l'on regarde le système d'Euler incompressible tel qu'il est formulé dans l'équation (16), on ne peut s'empêcher de remarquer que, si l'on veut obtenir une solution, il suffit, non pas de passer à la limite sur tous les termes non linéaires $v^i v^j$, mais seulement sur les termes $v^1 v^2$ et $(v^1)^2 - (v^2)^2$. Remarquons qu'un changement d'axe permet de se ramener à un seul cas, par exemple celui du terme $v^1 v^2$.

Les informations additionnelles dont nous disposons portent sur le tourbillon. Aussi, est-il naturel de chercher à exprimer la quantité $v_n^1 v_n^2$ à partir du tourbillon de v. Le tourbillon ω_n appartient à $L^\infty \cap L^1$. D'après la loi de Biot-Savart telle qu'elle apparaît dans (12), il vient, pour toute fonction g indéfiniment différentiable à support compact, définie sur $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^2$,

$$\begin{aligned}\Delta(g, v_n) &\overset{\text{déf}}{=} < v_n^1 v_n^2, g > \\ &= -\frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbf{R}^7} \frac{z_2 - y_2}{|z-y|^2}\frac{z_1 - x_1}{|z-x|^2}\omega_n(t,x)\omega_n(t,y)g(t,z)dtdxdydz.\end{aligned}$$

Le théorème de Fubini permet de reformuler les relations ci-dessus ainsi :

$$\Delta(g, v_n) = \int_{\mathbf{R}^5} G(t,x,y)d\mu_n(t,x,y) \quad \text{avec}$$

$$G(t,x,y) = -\frac{1}{4\pi^2}\int \frac{z_2 - y_2}{|z-y|^2}\frac{z_1 - x_1}{|z-x|^2}g(t,z)dz \quad \text{et} \tag{43}$$

$$d\mu_n(t,x,y) = \omega_n(t,x)\omega_n(t,y)dtdxdy.$$

D'après la conservation du tourbillon (14), la suite $(\mu_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite bornée de mesures bornées. On peut donc, quitte à extraire, supposer que la suite $(\mu_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge faiblement vers une mesure bornée μ.[1]

On est ainsi ramené à passer à la limite dans une intégrale. Si la fonction G était une fonction continue, bornée et nulle à l'infini, il n'y aurait aucun problème. L'étude de cette fonction G, que nous allons mener maintenant, éclaire bien la nécessité de se restreindre à certaines non-linéarités. Voici ses propriétés.

[1]Dans toute la suite de cette section, nous omettrons systématiquement de noter les extractions.

Théorème 6.2 *La fonction G définie par l'équation (43) est bornée, nulle à l'infini et continue sur* $\mathbf{R}\times(\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2\setminus\mathbf{D})$, $\mathbf{D}$ *désignant la diagonale de* $\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2$.

Démontrer que G est nulle à l'infini et continue en dehors de la diagonale est laissé au lecteur. Remarquons que la forme particulière de la non-linéarité n'est pas utilisée pour cela, mais joue un rôle crucial pour démontrer que la fonction G est bornée. Posons

$$\widetilde{G}(t,y,w)=-\frac{1}{4\pi^2}G(t,y,w).$$

Par le changement de variable $z'=z-y$, il est immédiat que

$$\widetilde{G}(t,y,w)=\int\frac{z_2}{|z|^2}\frac{z_1+w_1}{|z+w|^2}g(t,y-z)dz.$$

Le fait que G, donc $\widetilde{G}$, soit nulle à l'infini permet de supposer que (t,y,w) est dans un compact fixe K de $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}^2$. D'après la formule de Taylor avec reste intégral, il existe une fonction r indéfiniment différentiable à dérivées bornées vérifiant, pour tout $(t,y,w)\in K$,

$$g(t,y-z)=g(t,y)+r(t,y,z)\ \text{et}\ r(t,y,0)=0. \tag{44}$$

Soit maintenant B une boule contenant la somme de la projection sur $\mathbf{R}^2$ de K et de la projection sur $\mathbf{R}^2$du support de g, soit θ une fonction indéfiniment différentiable à support compact, radiale, et valant 1 près de B. De la relation (44) ci-dessus, il vient

$$\begin{aligned}\widetilde{G}&=\Theta(w)g(t,y)+\int\frac{z_2}{|z|^2}\frac{z_1+w_1}{|z+w|^2}\theta(z)r(t,y,z)dz\quad\text{avec}\\ \Theta(w)&=\int_{\mathbf{R}^2}\frac{z_2}{|z|^2}\frac{z_1+w_1}{|z+w|^2}\theta(z)dz.\end{aligned}$$

D'après (44), pour tout (t,y,w) dans K, on a $r(t,y,z)\leq C|z|$. Il en résulte que, pour tout (t,y,w) dans K,

$$|\widetilde{G}(t,y,w)-g(t,y)\Theta(w)|\leq C. \tag{45}$$

On est donc ramené à démontrer que la fonction Θ est bornée. C'est ici, et seulement ici, que l'on va utiliser la forme particulière de la non-linéarité.

Soient w un élément du cercle et σ un réel de l'intervalle $]0,1]$. Par le changement de variable $z'=\sigma z$, on a

$$\Theta(\sigma w)=\int\frac{z_2}{|z|^2}\frac{z_1+w_1}{|z+w|^2}\theta(\sigma z)dz.$$

La fonction θ est radiale et vaut 1 sur une boule. La fonction

$$\frac{z_1 z_2}{|z|^4}$$

est d'intégrale nulle sur tout cercle centré à l'origine. Donc, il existe deux réels strictement positifs c et C tels que

$$\Theta(\sigma w) - \Theta(w) = \int_{c \leq |z| \leq C/\sigma} \frac{z_2}{|z|^2} \left(\frac{z_1 + w_1}{|z+w|^2} - \frac{z_1}{|z|^2} \right) \Big(\theta(\sigma z) - \theta(z)\Big) dz.$$

Il existe une constante C_1 telle que, pour tout w appartenant à $\mathbf{S}^1$ et pour tout z tel que $|z| \geq 2$,

$$\left| \frac{z_1 + w_1}{|z+w|^2} - \frac{z_1}{|z|^2} \right| \leq C_1 \frac{1}{|z|^2}.$$

Donc, il existe une constante C telle que, pour tout réel σ de l'intervalle $]0,1]$ et tout point w du cercle, on ait

$$|\Theta(\sigma w) - \Theta(w)| \leq C.$$

D'après l'inégalité (45), on en déduit que la fonction G est bornée. Ceci conclut la démonstration du théorème 6.2. Pour passer à la limite, nous utiliserons la théorème suivant.

Théorème 6.3 *Soient m un réel et $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite bornée de $L^\infty_{loc}(\mathbf{R}; E_m)$ convergeant faiblement vers v. Supposons que la suite $(\omega_n)_{n \in \mathbf{N}}$ soit une suite bornée de $L^\infty(\mathbf{R}; L^1(\mathbf{R}^2))$ faiblement convergente vers ω.*

S'il existe une mesure diffuse ω^+ telle que $(|\omega_n|)_{n \in \mathbf{N}}$ converge faiblement vers ω^+, alors, on a, dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^3)$,

$$\lim_{n \to \infty} v_n^1 v_n^2 = v^1 v^2.$$

Ensuite, pour démontrer le théorème 6.1, il suffira de vérifier que la suite de champs de vecteurs de divergence nulle, définie par la relation (42), satisfait aux hypothèses du théorème 6.3 ci-dessus.

La démonstration du théorème 6.3 que nous venons d'énoncer repose sur deux lemmes de théorie de la mesure, dont nous omettrons la preuve.

Lemme 6.1 *Soit X un espace métrique localement compact dénombrable à l'infini. On considère une suite bornée de mesures bornées $(\mu_n)_{n \in \mathbf{N}}$ convergeant faiblement vers μ.*

Lemme 6.2 *Soit μ une mesure bornée sur $\mathbf{R}^2$ appartenant à $H^{-1}(\mathbf{R}^2)$. La mesure μ est alors diffuse.*

Concluons la démonstration du théorème 6.3. En utilisant la relation (43), il vient

$$< v_n^1 v_n^2, g >= \int_{\mathbf{R}^5} G(t,x,y) d\mu_n(t,x,y).$$

Comme $d\mu_n = \omega_n(t) \otimes \omega_n(t) \otimes dt$, on a $d|\mu_n| = |\omega_n(t)| \otimes |\omega_n(t)| \otimes dt$. Vu les hypothèses faites ici, il est clair que $d|\mu_n|$ tend faiblement vers

$$\nu = \omega_t^+ \otimes \omega_t^+ \otimes dt.$$

Pour démontrer le théorème, il suffit de vérifier que $\mathbf{D}$ est un ensemble ν-négligeable. Pour cela, observons que

$$\int_{\mathbf{D}} d\nu = \int_{\mathbf{R}\times\mathbf{R}^2} \Big(\int_{\{x\}} d\omega_t^+(y) \Big) d\omega_t^+(x) dt.$$

Le fait que ω^+ soit diffuse assure, d'après le lemme 6.1, que

$$\lim_{n\to\infty} < v_n^1 v_n^2, g >= \int G(t,x,y) d\omega_t(x) d\omega_t(y) dt. \tag{46}$$

Reste à démontrer que le terme de droite de l'équation ci-dessus est égal à $< v^1 v^2, g >$. On régularise v par convolution par une fonction indéfiniment différentiable à support compact positive. On obtient ainsi une suite $(\widetilde{v}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ qui converge fortement dans E_m.

Comme la mesure $|\omega|$ est majorée par une mesure diffuse ω^+, il en est de même des régularisées. D'où

$$\lim_{n\to\infty} < \widetilde{v}_n^1 \widetilde{v}_n^2, g >= \int G(t,x,y) d\omega_t(x) d\omega_t(y) dt.$$

La convergence forte de la suite $(\widetilde{v}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dans E_m assure la convergence des suites $(\widetilde{v}_n^i \widetilde{v}_n^j)_{n\in\mathbf{N}}$ dans $L^1 + L^2$. Donc, d'après (46), le théorème 6.3 est démontré.

La seule chose restant à faire pour démontrer le théorème 6.1 est de démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifie les hypothèses du théorème 6.3.

Les hypothèses du théorème 6.1 assurent que

$$\omega_0 = f_0^+ - f_0^- + \omega_0^s \quad \text{où} \quad f_0^\pm \in L^1, \ f_0^\pm \geq 0 \text{ et } \omega_0^s \geq 0.$$

D'après (14) et (42), on a

$$
\begin{aligned}
\omega_n(t,x) &= f_n^+(t,x) - f_n^-(t,x) + \omega_n^s(t,x) \\
\text{avec} \quad f_n^\pm(t,x) &= (\rho_n \star f_0^\pm)(\psi_n^{-1}(t,x)) \\
\text{et} \quad \omega_n^s(t,x) &= (\rho_n \star \omega_0^s)(\psi_n^{-1}(t,x)).
\end{aligned} \tag{47}
$$

Quitte à extraire, on peut supposer que la suite $(\omega_n^s)_{n\in\mathbf{N}}$ converge faiblement vers une mesure notée ω^s et que les suites $(f_n^\pm)_{n\in\mathbf{N}}$ convergent faiblement vers les mesures bornées $\mu^\pm$. Le point important est l'existence de fonctions $f^\pm$ de L^1 telles que

Etant donné un ϵ strictement positif, on cherche un α strictement positif tel que l'on ait

$$
\forall \varphi \in C_0^0(\mathbf{R}^3;\mathbf{R}^+) \ \int \varphi dtdx \leq \alpha \Rightarrow \int \varphi d\mu^\pm \leq \epsilon. \tag{48}
$$

Les flots $\psi_n(t)$ conservant la mesure, on a

$$
\int \varphi dtdx = \int \varphi(t,\psi_n(t,x))dtdx.
$$

Pour démontrer l'assertion (48), il suffit d'établir que, pour toute fonction φ de $C_0^0(\mathbf{R}^3;\mathbf{R}^+)$, on a

$$
\lim_{n\to\infty} \int f_0^\pm(x)\varphi(t,\psi_n(t,x))dtdx = \lim_{n\to\infty} \int \varphi d\mu_n^\pm.
$$

Par définition, on sait que $f_n^\pm(t,x) = (\rho_n \star f_0^\pm)(\psi_n^{-1}(t,x))$. Il en résulte que

$$
\begin{aligned}
\int \varphi d\mu_n^\pm = \int & f_0^\pm(\psi_n^{-1}(t,x))\varphi(t,x)dtdx \\
& + \int (\rho_n \star f_0^\pm - f_0^\pm)(\psi_n^{-1}(t,x))\varphi(t,x)dtdx.
\end{aligned}
$$

A nouveau d'après la conservation de la mesure, on a, pour toute fonction φ de $C_0^0(\mathbf{R}^3;\mathbf{R}^+)$,

$$
\left|\int \varphi d\mu_n^\pm - \int f_0^\pm(x)\varphi(t,\psi_n(t,x))dtdx\right| \leq \|\varphi\|_{L^\infty}\|\rho_n \star f^\pm - f_0^\pm\|_{L^1}.
$$

Le prédicat (48) est ainsi démontré. D'après le théorème de Lebesgue-Nikodym, on peut affirmer l'existence de deux fonctions $f^\pm$ appartenant à $L^\infty(\mathbf{R};L^1(\mathbf{R}^2))$ telles que $f^\pm dxdt = d\mu^\pm$.

Soit $(\omega_n^+)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par

$$\omega_n^+ = f_n^+ + f_n^- + \omega_n^s.$$

Comme par hypothèse, ω_n^s est positive, il est clair que $|\omega_n| \leq \omega_n^+$. D'après les relations (47) et (48), on a, au sens de la convergence faible,

$$\lim_{n\to\infty} \omega_n^+ = f^+ + f^- + \omega^s.$$

Les hypothèses du théorème 6.3 de passage à la limite sont satisfaites. La démonstration du théorème 6.1 est ainsi terminée.

7 Régularité de type analytique

Nous allons décrire ici quelques propriétés relatives au régularité d'ordre élevé dans l'équation d'Euler. Les deux théorèmes principaux que nous allons y démontrer sont relatifs à la régularité en temps du flot d'une solution du système d'Euler (E). Voilà ce dont il s'agit.

Théorème 7.1 *Soit r un réel strictement supérieur à 1. Il existe alors une constante C telle que l'on ait, pour toute solution v du système (E) appartenant à $L^\infty_{loc}([0,T^\star[;C^r)$, les propriétés suivantes.*

Pour tout entier k, la fonction $(\partial_t + v\cdot\nabla)^k v$ appartient à $L^\infty_{loc}([0,T^\star[;C^r)$ et l'on a, pour tout $T < T^\star$,

$$\|(\partial_t + v\cdot\nabla)^k v\|_{L^\infty([0,T];C^r)} \leq C^k k! (\|v\|_{L^\infty([0,T];C^r)})^{k+1}. \tag{49}$$

La fonction $t \mapsto \psi(t)$ est une fonction analytique de $[0,T^\star[$ dans l'espace $\mathrm{Id} + C^r$.

Ce théorème a été démontré par P. Serfati dans [30]. La méthode employée par P. Serfati, basée sur une approche lagrangienne, permet d'obtenir l'analyticité en temps du flot dans des cas particuliers de régularité tangentielle par rapport à des familles de surfaces ou de courbes. Ces résultats sont annoncés dans [32] et des détails sont exposés dans [30]. Signalons que P. Serfati a aussi démontré, dans [30], l'analyticité en temps petit du flot dans le cas de poches de tourbillon qui sont de petites perturbations d'un cercle.

Enfin, nous n'avons pas abordé le problème de la propagation de l'analyticité en espace. Pour des résultats à ce sujet, nous renvoyons le lecteur aux travaux pionniers de S. Baouendi et C. Goulaouic (voir [5]), à ceux de

C. Bardos et S. Benachour (voir [6] et [7]) et à celui plus récent de J.-M. Delort [19].

P. Gamblin a, dans [23], redémontré le théorème 7.1 ci-dessus par une méthode lui permettant de prouver le thèorème suivant.

Théorème 7.2 *Il existe une constante C vérifiant les assertions suivantes. Soit v une solution du système d'Euler (E) appartenant à l'espace des fonctions continues de $\mathbf{R}$ dans l'espace E_m et dont le tourbillon appartient $L^\infty(\mathbf{R}; L^a(\mathbf{R}^2)) \cap L^\infty(\mathbf{R}^3)$. On sait alors que, pour tout ϵ strictement positif et pour tout entier k, la fonction $(\partial_t + v\cdot\nabla)^k v$ appartient à $L^\infty_{loc}([0,T^\star[; C^{1-\epsilon})$ et l'on a, pour tout réel $T < T^\star$,*

$$\|(\partial_t + v\cdot\nabla)^k v\|_{L^\infty([0,T];C^{1-\epsilon})} \leq \left(\frac{C}{\epsilon}\right)^{2k} (k!)^3 (\|v\|_{L^\infty([0,T];C^1_\star)})^{k+1}. \quad (50)$$

Pour tout ϵ strictement positif, la fonction $t \mapsto \psi(t)$ est une fonction de classe Gevrey 3 de $[0,T^\star[$ dans l'espace $\mathrm{Id} + C^r$.

Nous allons maintenant énoncer deux résultats relatifs à l'ellipticité microlocale pour le système d'Euler incompressible. Ces énoncés découlent, sinon des deux théorèmes ci-dessus, du moins de certaines étapes de leur démonstration.

Corollaire 7.1 *Soit r un réel strictement supérieur à 1 et v une solution du système (E) appartenant à $L^\infty_{loc}([0,T^\star[;C^r)$. Alors, on a*

$$WF_a(v) \subset \{(t,x;\tau,\xi)\,/\,\tau + (v(t,x)|\xi) = 0)\}.$$

De même, dans le cadre des solutions de Yudovich, on a le

Corollaire 7.2 *Soit v une solution du système d'Euler (E) appartenant à l'espace des fonctions continues de $\mathbf{R}$ dans l'espace E_m et dont le tourbillon appartient $L^\infty(\mathbf{R}; L^a(\mathbf{R}^2)) \cap L^\infty(\mathbf{R}^3)$. Dans ce cas, on a*

$$WF_{G^3}(v) \subset \{(t,x;\tau,\xi)\,/\,\tau + (v(t,x)|\xi) = 0)\}.$$

La démonstration de ces résultats repose sur l'étude de l'action répétée de l'opérateur $\mathcal{V} \stackrel{\text{déf}}{=} \partial_t + v\cdot\nabla$ sur l'opérateur de gradient de pression. Il est assez facile de démontrer que

$$\partial_k p(x) = \sum_{i,j} \int_{\mathbf{R}^d} (\partial_i\partial_j\partial_k E_d)(x-y)(v^i(x) - v^i(y))(v^j(x) - v^j(y))dy. \quad (51)$$

Cette action se décrit en termes d'opérateurs multilinéaires définis ci-dessus. On commence par définir la classe de leur "noyau".

Définition 7.1 *On désigne par* $\mathcal{S}_0^m(\mathbf{R}^d\setminus\{0\})$ *l'ensemble des fonctions* g *localement bornées sur* $\mathbf{R}^d\setminus\{0\}$ *telles que*

$$\mathcal{N}_0^m(g) \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{x\in\mathbf{R}^d\setminus\{0\}} |z|^m|g(z)|.$$

On désigne par $\mathcal{S}^m(\mathbf{R}^d\setminus\{0\})$ *l'ensemble des fonctions* g *indéfiniment différentiables sur* $\mathbf{R}^d\setminus\{0\}$ *telles que, pour tout entier* k*, on ait*

$$\mathcal{N}_k^m(g) \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{|\alpha|\leq k}\ \sup_{x\in\mathbf{R}^d\setminus\{0\}} |z|^{m+|\alpha|}|\partial^\alpha g(z)|.$$

On convient de la notation suivante :

$$\text{soient } r\in(\mathbf{R}_\star^+)^p \text{ et } u\in\prod_{\ell=1}^p C^{r_q}(\mathbf{R}^d), \text{ on pose } \|u\|_r^{(p)} = \prod_{\ell=1}^p \|u^\ell\|_{r_\ell}.$$

On peut maintenant définir les opérateurs multilinéaires qui nous seront utiles.

Définition 7.2 *Soient* p *un entier strictement positif,* g *une fonction de* $\mathcal{S}_0^{-d-p+1}(\mathbf{R}^d\setminus\{0\})$ *et* $u\in C^r(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}^p)$*. On définit l'opérateur* p*-linéaire* $g\underset{p}{\star}u$ *par*

$$(g\underset{p}{\star}u)(x) = \int_{\mathbf{R}^d} g(z)\prod_{\ell=1}^p(u^\ell(x)-u^\ell(x-z))dz.$$

L'action de ces opérateurs sur les espaces $C^r(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}^p)$ est décrite par le théorème suivant, admis (voir [23]).

Théorème 7.3 *Il existe une constante* C *telle que, pour tout entier* p *strictement positif, pour toute suite* $(\epsilon_m)_{1\leq m\leq p}$ *de* $]0,1[^p$ *telle que*

$$\epsilon = \sum_{\ell=1}^p \epsilon_\ell \leq \frac{1}{2},$$

on ait

$$\|g\underset{p}{\star}u\|_{1-\epsilon} \leq \left(\prod_{\ell=1}^p \frac{C}{\epsilon_\ell}\right)\left(1+\sum_{\ell=1}^p\frac{\epsilon_\ell}{\epsilon-\epsilon_\ell}\right)\mathcal{N}_0^m(g)\|u\|_{(\epsilon_m)}^{(p)}. \tag{52}$$

Si de plus, pour tout α *appartenant à* $\mathbf{N}^d$ *et de longueur* $p-1$*, on a*

$$\int_{\mathbf{S}^{d-1}} x^\alpha g(x)d\sigma(x) = 0, \tag{53}$$

alors, on peut affirmer l'existence, pour tout $r > 1$, d'une constante C_r telle que, pour tout ϵ strictement positif, on ait

$$\|g \underset{p}{\star} u\|_r \leq \frac{C_r}{\epsilon} \mathcal{N}_1^{-d-p+1}(g) \max_{\substack{1 \leq \ell, m \leq p \\ \ell \neq m}} \left\{ \|u^\ell\|_r \|u^m\|_{1+\epsilon} \prod_{\substack{n=1 \\ n \neq \ell, n \neq m}}^{p} \|u^n\|_{Lip} \right\}. \quad (54)$$

Voici comment l'on exprime $\mathcal{V}^k v$ à l'aide de ces opérateurs. Le champ de vecteurs v étant de divergence nulle, on démontre facilement que

$$V_p \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{V}(g \underset{p}{\star} a) = \sum_{q=1}^{p} g \underset{p}{\star} (a^1, \cdots, a^{q-1}, \mathcal{V}a^q, a^{q+1}, \cdots, a^p)$$
$$+ \sum_{\lambda=1}^{d} (\partial_\lambda g) \underset{p+1}{\star} (a, v^\lambda).$$

Un peu de soin est ensuite nécessaire pour en déduire que

$$\mathcal{V}^k(\nabla p(v,v)) = \sum_{(p,\alpha) \in J(k)} A^k_{(p,\alpha)} \sum_{\nu \in \{1,\cdots,d\}^{p+2}} \partial_{(\nu)} \nabla E_d \underset{p+2}{\star} (\mathcal{V}^{(\mu)} \cdot v^{(\nu)})$$

$$\text{avec} \quad 0 \leq A^k_{(p,\mu)} \leq \frac{k!}{\mu! p!},$$

$$\mathcal{V}^{(\mu)} \cdot v^{(\nu)} = \prod_{q=-1}^{p} \mathcal{V}^{\mu_q} v^{\nu_q}$$

$$\text{et} \quad J(k) = \{(p,\alpha) \,/\, \mu \in \mathbf{N}^{p+2}, \; |\alpha| + p = k\}.$$

Une récurrence permet alors de prouver les inégalités (49) et (50).

La démonstration des corollaires 7.1 et 7.2 est en partie basée sur le théorème ci-dessous, démontré par P. Gamblin dans [23].

Théorème 7.4 *Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^d$ et $z(x,\xi) = -i \sum z^j(x)\xi_j$. On note $\mathcal{Z}$ l'opérateur défini par*

$$\mathcal{Z} = \sum z^j(x) \partial_j.$$

On considère une fonction u, continue sur Ω. On suppose qu'il existe une suite $(z_n(x,\xi)_{n \in \mathbf{N}})$ de champs de vecteurs indéfiniment différentiables convergeant vers z dans l'espace $L^\infty_{loc}(\Omega)$ et une suite de fonctions $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de fonctions indéfiniment différentiables convergeant vers u dans $L^\infty_{loc}(\Omega)$ et vérifiant les propriétés ci-après.

Il existe un réel s supérieur ou égal à 1, tel que, pour tout compact K de ω, il existe une constante C telte que, pour tout couple d'entiers (k,n), on ait

$$\begin{aligned} \|\mathcal{Z}_n^k z_n^j\|_{L^\infty(K)} &\leq C^{k+1}(k!)^s, \\ \|\mathcal{Z}_n^k \operatorname{div} z_n\|_{L^\infty(K)} &\leq C^{k+1}(k!)^s, \\ \|\mathcal{Z}_n^k u_n\|_{L^\infty(K)} &\leq C^{k+1}(k!)^s. \end{aligned}$$

Sous ces hypothèses, on a

$$WF_{G^s}(u) = \{(x,\xi) \in \Omega \times (\mathbf{R}^d \setminus \{0\}) \,/\, z(x,\xi) = 0\}.$$

Pour démontrer ce théorème, nous allons établir les inégalités assurant la localisation du front d'onde Gevrey uniformément en n. Soit (x_0,ξ_0) tel que $z(x_0,\xi_0) \neq 0$. Il existe un voisinage compact K de x_0 et un voisinage conique Γ de ξ_0 et une constnate C tel que, pour tout (x,ξ) appartenant à $K \times \Gamma$, on ait

$$|z_n(x,\xi)| \geq C|\xi|. \tag{55}$$

On sait qu'il existe une suite $(\chi_k)_{k\in\mathbf{N}}$ de fonctions indéfiniment différentiables, valant 1 près de K, et vérifiant

$$\forall j \leq k \quad \sup_{|\alpha|=j} \|\partial^\alpha \chi_j\|_{L^\infty} \leq C(Ck)^j.$$

Posons $u_{k,n} = \chi_k u_n$. La formule d'inversion de Fourier nous assure que

$$\widehat{u}_{k,n}(\xi) = \int_{\mathbf{R}^d} e^{-i(x|\xi)} u_{k,n}(x)dx.$$

Observons que

$$-\mathcal{Z}(e^{-i(\cdot|\xi)}) = z(\cdot,\xi)e^{-i(\cdot|\xi)}.$$

En posant

$$R_{n,\xi}w = \mathcal{Z}\left(\frac{w}{z_n(\cdot,\xi)}\right) + i \operatorname{div} z_n \frac{w}{z_n(\cdot,\xi)}, \tag{56}$$

on démontre à l'aide d'intégrations par parties successives que

$$\widehat{u}_{k,n}(\xi) = \int_{\mathbf{R}^d} e^{-i(x|\xi)} R_{n,\xi}^k(u_{k,n})(x)dx. \tag{57}$$

L'opérateur différentiel $R_{n,\xi}$ est homogène de degré -1 en ξ ; il fait donc gagner des puissances de ξ. Des calculs dont nous faisons grâce au lecteur permettent de démontrer qu'il existe une constante C telle que, pour tout couple d'entiers (k,n), on ait

$$\|R^k_{n,\xi}(u_{k,n})\|_{L^\infty} \leq C^k(k!)^s|\xi|^{-k}. \tag{58}$$

Comme la fonction $R^k_{n,\xi}(\chi_k u_n)$ est à support dans le compact K, on a, pour tout couple d'entiers (k,n) et pour tout ξ appartenant à Γ,

$$|\widehat{u}_{k,n}(\xi)| \leq C^k(k!)^s|\xi|^{-k}.$$

Par hypothèse, on a

$$\lim_{n\to\infty} u_{k,n} = \chi_k u$$

dans L^∞, donc dans L^1. Par passage à la limite, il en résulte que

$$|\widehat{\chi}_k u(\xi)| \leq C^k(k!)^s|\xi|^{-k},$$

ce qui, vu la suite $(\chi_k)_{k\in\mathbf{N}}$, conclut la démonstration du théorème.

References

[1] S. Alinhac, Interaction d'ondes simples pour des équations complètement non linéaires, *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*, **21**, 1988, pages 91–133.

[2] S. Alinhac, Un problème de concentration évanescente pour les flots non stationnaires et incompressibles en dimension deux, *Communication in Mathematical Physics*, **127**, 1990, pages 585–596.

[3] V. Arnold, Sur la géométrie différentiable des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits, *Annales de l'Institut Fourier*, **16**, 1966, pages 319–361.

[4] H. Bahouri et J.-Y. Chemin, Equations de transport relatives à des champs de vecteurs non-lipschitziens et mécanique des fluides, *Prépublication de l'Ecole Polytechnique n⁰ 1059*, 1993, à paraître dans Archiv for Rationnal Mechanics and Analysis.

[5] S. Baouendi et C. Goulaouic, Problème de Cauchy pseudo-différentiels analytiques, *Exposé 13 du Séminaire Goulaouic-Schwartz, Ecole Polytechnique*, 1975–1976.

[6] C. Bardos et S. Benachour, Domaine d'analyticité des solutions de l'équation d'Euler dans un ouvert de $\mathbf{R}^n$, *Annali della scuola normale superiore di Pisa*, **4**(04), 1977, pages 647–687.

[7] S. Benachour, Analyticité des solutions des équations d'Euler, *Archiv for Rationnal Mechanics and Analysis*, **71**(3), 1979, pages 271–299.

[8] A. Bertozzi et P. Constantin, Global regularity for vortex patches, *Communication in Mathematical Physics*, **152**(1), 1993, pages 19–28.

[9] Y. Brenier, The least action principle and the related concept of generalized flow for incompressible perfect fluids, *Journal of the American Mathematical Society*, **2**(2), 1989, pages 225–255.

[10] J.-Y. Chemin, Calcul paradifférentiel précisé et application à des équations aux dérivées partielles non linéaires, *Duke Mathematical Journal*, **56**(1), 1988, pages 431–469.

[11] J.-Y. Chemin, Régularité de la solution d'un problème de Cauchy non linéaire à données singulières en un point, *Annales de l'Institut Fourier*, **39**(1), 1989, pages 101–122.

[12] J.-Y. Chemin, Evolution d'une singularité ponctuelle dans des équations strictement hyperboliques non linéaires, *American Journal of Mathematics*, **112**, 1990, pages 805–860.

[13] J.-Y. Chemin, Evolution d'une singularité ponctuelle dans un écoulement compressible, *Communication in Partial Differential Equations*, **15**(9), 1990, pages 1237–1263.

[14] J.-Y. Chemin, Sur le mouvement des particules d'un fluide parfait, incompressible, bidimensionnel, *Inventiones Mathematicae*, **103**, 1991, pages 599–629.

[15] J.-Y. Chemin, Persistance des structures géométriques liées aux poches de tourbillon, *Séminaire Equations aux Dérivées Partielles de l'Ecole Polytechnique*, 1990-1991.

[16] J.-Y. Chemin, Persistance de structures géométriques dans les fluides incompressibles bidimensionnels, *Annales de l'Ecole Normale Supérieure*, **26**(4), 1993, pages 1–26.

[17] J.-Y. Chemin, Une facette mathématique de la mécanique des fluides I, *Prépublication de l'Ecole Polytechnique n^0 1055*, 1993.

[18] J.-Y. Chemin, Sur quelques problèmes mathématiques posés par les équations relatives à un fluide parfait incompressible, *en préparation.*

[19] J.-M. Delort, Estimations fines pour des opérateurs pseudo-differentiels analytiques sur un ouvert à bord de $\mathbf{R}^n$. Application aux équations d'Euler, *Communications in Partial Differential Equations*, **10**(12), 1985, pages 1465–1525.

[20] J.-M. Delort, Existence de nappes de tourbillon en dimension deux, *Journal of the American Mathematical Society*, **4**(3), 1991, pages 553–586.

[21] R. Di Perna et A. Majda, Concentrations in regularizations for 2-D incompressible flows, *Communication in Pure and Applied Mathematics*, **40**, 1987, pages 301–345.

[22] D. Ebin et J. Marsden, Group of diffeomorphism and the motion of an incompressible fluid, *Annals of Mathematics*, **92**(2), 1970, pages 102–163.

[23] P. Gamblin, Système d'Euler incompressible et régularité microlocale analytique, à paraître aux Annales de l'Institut Fourier.

[24] P. Gamblin et X. Saint-Raymond, On three-dimensionnal vortex patches, *Prépublication de l'Université d'Orsay*, 1993.

[25] P. Gérard, Résultats récents sur les fluides parfaits incompressibles bidimensionnels (d'après J.-Y. Chemin et J.-M. Delort), *Séminaire Bourbaki*, **757**, 1992.

[26] N. Hanges et F. Trêves, On the analyticity of solutions of first order non linear partial differential equations, *Prépublication 1991.*

[27] J. Leray, Etude de diverses équations intégrales non linéaires et quelques problèmes que pose l'hydrodynamique, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **9**(12),1933, pages 1–82.

[28] L. Lichtenstein, Über einige Existenzprobleme der Hydrodynamik homogenerunzusammendrückbarer, reibungsloser Flüßigkeiten und die Helmoltzochen Wirbelsatze, *Mathematische Zeitschrift*, **23**, 1925, pages

89–154 ; **26**, 1927, pages 196–323 ; **28**, 1928, pages 387–415 et **32**, 1930, pages 608–725.

[29] A. Majda, Remaks on weak solutions for vortex sheets with a distinguished sign, *Indiana University Mathematics Journal*, **42**(3), 1993, pages 921–939.

[30] P. Serfati, Etude mathématique de flammes infiniment minces en combustion. Résultats de structure et de régularité pour l'équation d'Euler incompressible, *Thèse de l'Université de Paris VI*, 1992.

[31] P. Serfati, Une preuve directe d'existence globale des vortex patches 2D, *Notes aux Comptes-Rendus de l'Académine des Sciences de Paris*, **318**, Série I, 1993, pages 515–518.

[32] P. Serfati, Régularité stratifiée et équation d'Euler à temps grand *Notes aux Comptes-Rendus de l'Académine des Sciences de Paris*, **318**, Série I, 1993, pages 925–928.

[33] A.I. Shnirelman, On the geometry of the group of diffeomorphisms and the dynamics of an ideal incompressible fluid, *Mat. USSR Sbornik* **56**(1), pages 79–105.

[34] A. Torchinsky, *Real variable methods in harmonic analysis*, Pure and Applied Mathematics, **123**, Academic Press, New York.

[35] W. Wolibner, Un théorème d'existence du mouvement plan d'un fluide parfait, homogène, incompressible, pendant un temps infiniment long, *Mathematische Zeitschrift*, **37**, 1933, pages 698–726.

[36] V. Yudovich, Non stationnary flows of an ideal incompressible fluid, *Zh. Vych. Math.* **3**, 1963, pages 1032–1066.