JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

ANTOINE BOMMIER

Prolongement méromorphe de la matrice de diffusion pour les problèmes à N corps à longue portée

Journées Équations aux dérivées partielles (1993), p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1993____A13_0>

Prolongement méromorphe de la matrice de diffusion pour les problèmes à N corps à longue portée

Antoine Bommier
Centre de Mathématiques de l'Ecole Polytechnique,
91128 Palaiseau Cedex, France.
Unité associée au C.N.R.S. n^0 169.

1 Introduction

On définit généralement les résonances des opérateurs de Schrödinger comme étant les pôles du prolongement méromorphe de la résolvante, alors que les physiciens préfèrent associer les résonances quantiques qu'ils observent expérimentalement aux pôles du prolongement méromorphe de la matrice de diffusion. L'étude de la correspondance entre ces deux types de définitions a naturellement fait l'objet de nombreux travaux. Elle a été établie pour les problèmes à deux corps pour une large classe de potentiels incluant les potentiels à longue portée ([B1], [B2], [G-M]). En revanche, pour les problèmes à N corps, les résultats ne sont que très partiels et le fait que la matrice de diffusion admette un prolongement méromorphe n'était connu jusque là que pour des potentiels analytiquement dilatables à courte portée et à des énergies inférieures au seuil des décompositions à trois amas [B3].

Nous montrons dans notre travail que pour les problèmes à N corps à longue portée les matrices de diffusion 2 amas-k amas, $(2 \leq k \leq N)$, ont un prolongement méromorphe en énergie dont les pôles sont des pôles de la résolvante. Nous démontrons en plus que le noyau de la matrice de diffusion est analytique dans les variables angulaires (en dehors de la diagonale pour les collisions élastiques).

Notre approche se base sur la construction stationnaire des opérateurs d'onde de Isozaki-Kitada [I-K1] qui, tout en coïncidant avec la définition de Dollard, présente de sérieux avantages techniques, permettant entre autre d'écrire la matrice de diffusion à l'aide d'une formule de représentation stationnaire. Cette construction était d'ailleurs déjà à l'origine des progrès les plus récents dans le domaine ([I-K2], [G-M], [Sk], [Bo]).

2 La construction d'Isozaki-Kitada pour les problèmes à deux corps

Notons $H_0 = -\Delta$ et considérons le Hamiltonien $H = H_0 + V(x)$, où le potentiel est tel que :

$$(H1)\begin{cases} V \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \\ \exists \rho > 0 \ \text{ tel que } \forall x \in \mathbb{R}^n \ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \ \ |\partial_x^\alpha V(x)| \leq C_\alpha \langle x\rangle^{-|\alpha|-\rho} \end{cases}$$

La démarche de Isozaki et Kitada est la suivante : ils construisent deux solutions, $\phi^\pm(x,\xi)$ de l'équation eikonale :

$$\Big(\nabla_x \phi^\pm(x,\xi)\Big)^2 + V(x) = \xi^2 \tag{1}$$

supportée chacune dans des régions du type :

$$\{|x| > R, |\xi| > d, \pm\cos(x,\xi) \geq \pm\sigma^\pm\}$$

et satisfaisant les estimations :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n \ \ |\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta (\phi(x,\xi) - x.\xi)| \leq C_{\alpha\beta}\langle x\rangle^{1-\rho-|\alpha|} \tag{2}$$

En posant :

$$\phi(x,\xi) = \chi\Big(\cos(x,\xi) \leq \sigma^-\Big)\phi^-(x,\xi) + \chi\Big(\cos(x,\xi) \geq \sigma^+\Big)\phi^+(x,\xi)$$

ils définissent le modificateur J par :

$$Jf(x) = (2\pi)^{-n}\int\int e^{i(\phi(x,\xi)-y.\xi)} f(y)dyd\xi$$

et les opérateurs d'onde par :

$$W^\pm = s - \lim_{t\to\pm\infty} e^{itH} J e^{-itH_0} E_\Delta(H_0) \tag{3}$$

($E_\Delta(H_0)$ n' étant ici qu'une troncature en énergie.)

Remarque : Dans le cas des potentiels à courte portée ($\rho > 1$) si l'on choisit judicieusement les fonctions de phase $\phi^\pm(x,\xi)$, on retrouve la définition habituelle des opérateurs d'onde obtenue pour $J = 1$ (voir [W]), et nos résultats couvriront donc aussi le cas des potentiels à courte portée.

3 Le problème à N corps

3.1 Quelques notations

Considérons maintenant le Hamiltonien :

$$H = -\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2m_i}\Delta_{x_i} + \sum_{1\leq i\leq N} V_{ij}(x_i - x_j) \quad ; \quad x_i \in I\!R^n \tag{4}$$

où les potentiels V_{ij} sont supposés vérifier les hypothèses $(H1)$.

Les états de diffusion correspondent à plusieurs "fragments" ou "amas" ("clusters" en anglais) qui sont chacun dans des états liés et qui s'éloignent à l'infini. Introduisons ici les notations habituelles qui permettent une description simple de ces idées géométriques.

Nous appellerons décomposition en k amas toute partition $(A_1, \cdots A_k)$ de $\{1, \cdots, N\}$. A chaque décomposition a nous faisons correspondre deux sous-espaces X_a et X^a définis par :

$$X_a = \{x \in X \mid x_i = x_j \text{ si } (i,j) \subset a\}$$

$$X^a = \{x \in X \mid \sum_{i\in A_j} m_i x_i = 0\}$$

Le sous-espace X^a représente l'espace des variables internes aux amas, alors que X_a représente l'espace des variables externes, variables décrivant la position relative des centres de masse de chacun des amas.

Nous noterons S_a la sphère unité de X_a.

Pour toute décomposition a on note :

$$I_a(x) = \sum_{(i,j)\not\subset a} V_{ij}(x) \ , \ V^a(x^a) = \sum_{(i,j)\subset a} V_{ij}(x) \text{ et } H_a = H - I_a \ .$$

On a :

$$H_a = I_{|X^a} \otimes (-\Delta_{|X_a}) + (-\Delta_{|X^a} + V^a(x^a)) \otimes I_{|X_a}$$

ce que l'on notera plus couramment $H_a = -\Delta_{|X_a} + H^a$, H^a étant le Hamiltonien interne $-\Delta_{|X^a} + V^a(x^a)$ opérant sur $L^2(X^a)$.

On appelle canal de réaction $\alpha = (a, \psi_\alpha, \epsilon_\alpha)$ la donnée d'une décomposition a, et d'un vecteur propre, ψ_α, de H^a, de valeur propre ϵ_α.

Pour un intervalle d' énergie Δ et un canal de réaction donnés nous noterons p_α l'application définie par :

$$p_\alpha \ : \ \left\{ \begin{array}{rcl} L^2(X_a) & \rightarrow & L^2(X) \\ \phi & \rightarrow & E_\Delta(H_a)\phi \otimes \psi_\alpha \end{array} \right.$$

qui comporte donc à la fois une troncature en énergie et une projection sur le vecteur ψ_α.

Si l'on étudie la diffusion pour un canal de réaction à plus de deux amas, il apparaît naturellement des directions particulières dans l'espace des moments, correspondant aux directions où deux des k amas considérés ont une vitesse d'éloignement nulle. Nous n'étudierons pas la diffusion au voisinage de ces directions, et pour cela nous posons :

$$Z_a = X_a \setminus \cup_{b \not\subset a} X_b \quad \text{et} \quad \tilde{S}_a = S_a \cap Z_a$$

$\tilde{S}_a$ étant donc la sphère unité de X_a à laquelle on a enlevé ces directions.

3.2 Définition des opérateurs d'onde

La première idée physique qui vient à l'esprit quand on cherche à donner une approximation de l'évolution asymptotique de tels états consiste à dire que les amas s'éloignant les uns des autres, aux temps grands, chacun des amas voit approximativement les autres comme des particules ponctuelles. Formulé mathématiquement, cela revient à dire que $I_a(x) \simeq I_a(x_a)$ le long de l'évolution, lorsque $t \to \pm\infty$.

Lorsque a est une décomposition en deux amas, $I_a(x_a)$ n'est alors rien de plus qu'un potentiel à deux corps et l'on peut reprendre la construction de la fonction de phase d'Isozaki-Kitada sans modification. En revanche, lorsque a est une décomposition en k amas, $(k > 2)$, $I_a(x_a)$ est un potentiel à k corps et cela pourrait poser une difficulté. Cependant, si l'on se limite à la diffusion dans les directions appartenant à $\tilde{S}_a$, il est clair que l'on évite en quelque sorte la structure de potentiel à k corps de $I_a(x_a)$. Pour être rigoureux, pour tout compact K_a inclus dans $\tilde{S}_a$ nous posons $\tilde{I}_a(x) = I_a(x)\chi_{K_a}(\frac{x_a}{|x_a|})$ où χ_{K_a} est une fonction de troncature valant 1 sur K_a et 0 sur $S_a \setminus \tilde{S}_a$. Le potentiel $\tilde{I}_a(x_a)$ a alors la structure d'un potentiel à deux corps et vérifie les hypothèses $(H1)$. On peut donc reprendre là aussi la démarche d'Isozaki-Kitada, définissant des fonctions $\phi_a(x_a, \xi_a)$ et des modificateurs J_a. On définit alors les opérateurs d'onde correspondant au canal de réaction α par :

$$W_\alpha^\pm := W_{\alpha,K_a}^\pm = s - \lim_{t \to \pm\infty} e^{itH} J_a e^{-itH_a} \mathbf{1}_{K_a}\left(\frac{D_{x_a}}{|D_{x_a}|}\right) p_\alpha \tag{5}$$

dont on peut se convaincre aisément qu'ils ne dépendent pas du choix de la fonction χ_{K_a}.

3.3 La matrice de diffusion

L'opérateur de diffusion d'un canal de réaction α vers un canal de réaction β se définit par :

$$p_\beta^* S_{\alpha,\beta} p_\alpha := (W_\beta^+)^*(W_\alpha^-) \tag{6}$$

Définissons pour chaque canal de réaction α une transformée de Fourier associée, $\mathcal{F}_\alpha$, par

$$(\mathcal{F}_\alpha(\lambda)f)(\omega) = (2(\lambda-\epsilon_\alpha))^{(n-2)/4}(\mathcal{F}f(\sqrt{2(\lambda-\epsilon_\alpha)}\omega)$$

où $\mathcal{F}f$ est la transformée de Fourier usuelle de f.

Du fait de la conservation de l'énergie on peut encore écrire l'opérateur de diffusion sous forme diagonale à l'aide de $\mathcal{F}_\alpha$ et $\mathcal{F}_\beta$, les transformées de Fourier associées aux canaux de réaction α et β, comme suit :

$$S_{\alpha,\beta} = \int_{sup(\epsilon_\alpha,\epsilon_\beta)}^{+\infty} \mathcal{F}_\beta(\lambda)^* \mathcal{S}_{\alpha,\beta}(\lambda)\mathcal{F}_\alpha(\lambda)d\lambda \tag{7}$$

Nous appellerons matrice de diffusion l'opérateur $\mathcal{S}_{\alpha,\beta}(\lambda)$ et nous noterons $S_{\alpha,\beta}(\lambda,\omega_a,\theta_b)$ son noyau, ω_a et θ_b variant dans les sphères unités S_a et S_b.

4 Résultats

Considérons le Hamiltonien :

$$H = -\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2m_i}\Delta_{x_i} + \sum_{1\leq i\leq N} V_{ij}(x_i - x_j) \quad ; \quad x_i \in I\!R^n \tag{8}$$

et supposons maintenant que :

$$(H2)\begin{cases} \text{Les potentiels } V_{ij} \text{ se prolongent holomorphiquement dans une région :} \\ \qquad D_\epsilon = \{x \in \mathbb{C}^n \;||Im(x)| \leq \epsilon\langle Re(x)\rangle\} \\ \text{avec } \epsilon > 0 \text{ et vérifient la condition de décroissance suivante :} \\ \qquad V_{ij}(x) = O(\langle x\rangle^{-\rho}) \quad \text{dans } D_\epsilon. \end{cases}$$

(Ce qui entraîne entre autre que les hypothèses (H1) sont satisfaites.)

Supposons en outre que les canaux de réactions considérés α et β soient tels que :

- a est une décomposition en deux amas.
- ϵ_α et ϵ_β sont des valeurs propres, respectivement de H^a et H^b simples et isolées.
Notons $\tau(H) = \bigcup_{\#a \geq 2} \sigma_d(H^a) \cup \{0\}$ l'ensemble des seuils du Hamiltonien H et considérons un intervalle d'énergie $[d, M]$ tel que :
- $[d, M] \subset] \sup(\epsilon_\alpha, \epsilon_\beta), +\infty[$
- $[d, M] \cap \tau(H) = \emptyset$
- $]\epsilon_\beta, d] \cap \tau(H) = \emptyset$ si b n'est pas une décomposition à deux ou N amas.

Nous avons alors les résultats suivants :

Théorème 1 - *Pour tout compact $K_b \subset \tilde{S}_b$, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ complexe de $[d, M]$ tel que :*

(1a) *Si $\alpha = \beta$ et si $0 < \rho < 1$, $\mathcal{S}_{\alpha\beta}(\lambda)$ se prolonge méromorphiquement sur $\mathcal{V}$ en un opérateur de $G^s(S_a)$ dans $G^s(S_b)$ et de $G^s(S_a)'$ dans $G^s(S_b)'$ pour tout $s \in]1, (1-\rho)^{-1}[$. (G^s dénote ici l'ensemble des fonctions Gevrey s.)*
(1b) *Si $\alpha = \beta$ et si $\rho \geq 1$, $\mathcal{S}_{\alpha\beta}(\lambda)$ se prolonge méromorphiquement sur $\mathcal{V}$, en un opérateur de $C^\infty(S_a)$ dans $C^\infty(S_b)$ et de $D'(S_a)$ dans $D'(S_b)$.*

(2) *Si $\alpha \neq \beta$ le noyau de la matrice de diffusion $S_{\alpha\beta}(\lambda, \omega_a, \theta_b)$ se prolonge méromorphiquement sur $\mathcal{V}$ en une fonction $G^s(S_a \times \overset{\circ}{K}_b)$, pour tout $s > 1$.*

(3) *Les pôles de ces prolongements, dans le cas $\alpha = \beta$ comme dans le cas $\alpha \neq \beta$, sont des résonances du hamiltonien H (définies comme étant les pôles du prolongement méromorphe de la résolvante).*

Théorème 2 - *Considérons $\mathcal{V}$ le voisinage complexe de $[d, M]$ introduit dans le théorème précédent. Alors :*
(1) *Pour tout $\lambda \in \mathcal{V}$ qui n'est pas une résonance du Hamiltonien, le noyau $S_{\alpha\beta}(\lambda, \omega_a, \theta_b)$ de la matrice de diffusion est analytique en (ω_a, θ_b) sur :*
- *$S_a \times S_a \cap \{\omega_a \neq \theta_b\}$ si $\alpha = \beta$.*
- *$S_a \times \overset{\circ}{K}_b$ si $\alpha \neq \beta$.*

(2) *Les résidus de $\mathcal{S}_{\alpha\beta}(\lambda)$ en un pôle λ_0 ont des noyaux analytiques sur $S_a \times \overset{\circ}{K}_b$.*

5 Les principales étapes de la démonstration

Nous faisons ici un rapide survol, qui n'a rien de rigoureux, des principales étapes qui permettent d'obtenir les résultats énoncés.

- Une nouvelle construction des opérateurs d'onde.

Si l'on regarde l'équation (5) définissant les opérateurs d'onde, on peut se convaincre aisément que l'on peut ajouter au modificateur J_a un terme $\tilde{J}_a$ sans que cela change la valeur des opérateurs d'onde. C'est notamment le cas dès que $\tilde{J}_a = O(\langle x_a \rangle^{-\epsilon})$ dans les directions où il y a propagation. Le problème va donc va donc être celui-ci : comment choisir de façon optimale cet opérateur $\tilde{J}_a$ sans changer la valeur des opérateurs d'onde ? En particulier il y a-t-il des choix qui donnent entre autre une convergence plus rapide des opérateurs d'onde ou, en d'autres termes, qui minimisent :

$$\tilde{T}_a := H(J_a + \tilde{J}_a) - (J_a + \tilde{J}_a)H_a p_\alpha$$

Si l'on prend $\tilde{J}_a = 0$, ou tout autre opérateur n'agissant que dans les variables externes, on ne peut espérer obtenir mieux que $\tilde{T}_a = O(\langle x_a \rangle^{-1-\rho})$, à cause du terme $I_a(x) - I_a(x_a)$ qui fait intervenir directement la dynamique interne des amas considérés. Il nous faut donc définitivement prendre en compte cette dernière si l'on veut espérer quelque amélioration, le problème s'avérant sensiblement différent de celui de la diffusion pour des problèmes à deux corps.

Nous avons cherché à écrire $\tilde{J}_a$ sous la forme d'un opérateur Fourier-intégral :

$$\tilde{J}_a f(x_a, x^a) = (2\pi)^{-n} \int\int e^{i(\phi_a(x_a,\xi_a) - y_a \cdot \xi_a)} m_a(x_a, \xi_a) f(y_a, x^a) dy_a d\xi_a$$

où les symboles $m_a(x_a, \xi_a)$ sont à valeurs opérateurs (à valeurs dans $B(L^2(X^a))$), afin d'obtenir :

$$\tilde{T}_a = O(e^{-\epsilon\langle x_a \rangle})$$

dans des régions sortantes et entrantes. Nous avons en plus exigé de ces symboles, ainsi que des fonctions de phases que nous utilisions, qu'ils soient analytiques en $|x_a|$ et $|\xi_a|$ afin de pouvoir faire par la suite une distorsion analytique.

La construction de ces modificateurs $\tilde{J}_a$ constitue la principale difficulté de ce travail.

- Une formule de représentation stationnaire pour la matrice de diffusion.

Suivant principalement la démarche de [I-K2] nous généralisons la formule de représentation qu'ils obtenaient pour le problème à N corps et qui s'écrit ici :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\alpha,\beta}(\lambda) = \; & p_\alpha^* \delta_{\alpha,\beta} p_\alpha + 2i\pi \mathcal{F}_\beta(\lambda) p_\beta^* \tilde{T}_b^* R(\lambda + i0) \tilde{T}_a p_\alpha \mathcal{F}_\alpha(\lambda)^* \\ & -2i\pi \mathcal{F}_\beta(\lambda) p_\beta^* (J_b + \tilde{J}_b)^* \tilde{T}_a p_\alpha \mathcal{F}_\alpha(\lambda)^* \end{aligned} \tag{9}$$

Le dernier terme de cette formule est holomorphe en λ, mais a un noyau singulier sur la diagonale lorsque $\alpha = \beta$. C'est pour cela que nous sommes amenés a faire intervenir les espaces de Gevrey dans ce cas particulier (Cf théorème 1, 1.a)

Le deuxième terme a quant à lui un noyau tout à fait régulier, mais son prolongement méromorphe pose quelques difficultés du fait du terme $R(\lambda + i0)$. Pour éviter la coupure due au spectre essentiel de H nous effectuons des distorsions analytiques correspondant au générateur $A = \frac{1}{2}(x.D_x + D_x.x) - k\langle x\rangle$. Cela est rendu possible grâce aux propriétés d'analyticité et de décroissance des symboles des opérateurs $\tilde{T}_a$ et $\tilde{T}_b$.

- Le théorème de Bang

Pour démontrer le théorème 2 nous constatons qu'au vu de (9) le noyau de la matrice de diffusion n'est a priori pas analytique dans les variables angulaires, ne serait-ce que par la présence de fonctions de troncature qui interviennent dans la construction de Isozaki-Kitada. Cependant la valeur des opérateurs d'onde, et par conséquent de la matrice de diffusion, ne dépend pas du choix de ces fonctions de troncatures. En particulier on s'attend assez naturellement à ce qu'en prenant des fonctions de troncatures de plus en plus régulières on puisse montrer que le noyau de la matrice de diffusion est de plus en plus régulier, et analytique pour finir. En pratique, pour aboutir à l'analyticité du noyau, nous choisissons nos fonctions de troncature dans les classes de fonctions non quasi-analytiques et nous utilisons le théorème de Bang qui affirme que toute fonction appartenant à toutes les classes de fonctions non quasi-analytiques est analytique [Bg].

References

[B1] E. Baslev : *Analytic Scattering Theory for Two-Body Scrödinger operators*, J. Fun. Anal. 29, 375-395 (1978)

[B2] E. Baslev : *Local Spectral Deformation Techniques for Scrödinger operators*, J. Fun. Anal. 58, 79-105 (1984)

[B3] E. Baslev : *Analytic Scattering Theory for Many-Body Systems Below the Smallest three-Body Threshold*, Com. Math. Phys. 77, 173-210 (1980)

[Bo] A. Bommier : *Propriétes de la matrice de diffusion 2amas -2 amas, pour les problèmes à N corps à longue portée*, à paraitre dans Ann. I.H.P.

[Bg] T. Bang *Om Quasi-analytische Funktionen*, Thèse, Univ. de Copenhague (1946).

[G-M] C.Gérard A.Martinez : *Prolongement méromorphe de la matrice de scattering pour des problèmes à deux corps à longue portée*, Ann. I.H.P. vol 51 n^o 1, 81-110 (1989).

[I-K 1] H.Isozaki-H.Kitada : *Scattering Matrices for Two-Body Schrödinger Operators*, Scientific Papers of the College of Arts and Sciences, Tokyo University, 35, 81-107 (1985).

[I-K 2] H.Isozaki-H.Kitada : *Micro-Local Resolvent Estimates for 2-Body Schrödinger Operators*, J. Funct. Anal. 57, 270-300 (1984)

[Sk] E.Skibsted : *Smoothness of N-body scattering amplitudes*, preprint (1992).

[W] X.P.Wang : *Time-delay operators in semiclassical limit. II. Short-range potentials*, Trans.Am.Math.Soc. 322-1, 395-414 (1990).