Journées Équations aux dérivées partielles

THIERRY RAMOND

Équation de Hill à potentiel méromorphe

Journées Équations aux dérivées partielles (1992), p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1992____A9_0>

Exposé au Colloque
Equations aux Dérivées Partielles,
Saint-Jean-de-Monts, Juin 92.

EQUATION DE HILL
À POTENTIEL MÉROMORPHE

PAR

THIERRY RAMOND(*)

Ce travail porte sur l'équation de Hill:

$$-u'' + V(x)u = Eu \tag{1}$$

où $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction π-périodique suffisamment régulière et E un paramètre réel. On reconnaît dans (1) l'équation aux valeurs propres pour un opérateur de Schrödinger périodique en dimension 1, et il est bien connu que le spectre de ce type d'opérateur est constitué de bandes qui ne peuvent se recouvrir qu'en leurs extrémités. Les intervalles qui séparent ces bandes sont appelés intervalles d'instabilité, gaps ou encore lacunes. L'objet de cette étude est d'obtenir une estimation de la largeur γ_n de la n-ième lacune afin en particulier de déterminer si leur nombre est fini ou non.

Les résultats connus sur ce sujet sont peu nombreux et portent essentiellement sur l'équation de Mathieu (où $V(x) = 2\lambda\cos(2x)$). Il existe une preuve très simple, due à Ince (1920) du fait que tous les gaps sont ouverts. Beaucoup plus récemment (1980) J.Avron et B.Simon ont obtenu l'asymptotique de la largeur des intervalles d'instabilité pour cette équation: $\gamma_n = 8(\lambda/4)^n[(n-1)!]^{-2}(1+O(n^{-2}))$ (voir [Av-Si]). Signalons également l'étude faite par A.Grigis du cas des potentiels polynômes trigonométriques (voir [Gr]).

Par contre il est bien connu que la taille des gaps est liée à la régularité du potentiel: si V est $\mathcal{C}^\infty$, on a $\gamma_n = O(n^{-\infty})$, alors que dans le cas réel-analytique on obtient pour n assez grand et pour tout $\varepsilon > 0$, $\gamma_n \le \exp(-2(A-\varepsilon)n)$, où $2A$ est la largeur

(*) Dépt. Mathématiques, Institut Galilée,
Université Paris-Nord, 93430 Villetaneuse
e-mail: ramond@math.univ-paris13.fr

de la plus grande bande du plan complexe centrée sur l'axe réel dans laquelle V s'étend holomorphiquement.

Nous nous sommes intéressés aux potentiels réels-analytiques qui ne sont pas des fonctions entières et dont les pôles les plus proches de l'axe réel sont simples, comme par exemple $V(x) = 1/(a - \cos(2x))$, où $a > 1$. En reproduisant la démonstration de Ince pour l'équation de Mathieu, on peut montrer dans ce cas particulier que tous les gaps sont ouverts. Dans le cas géneral, notre résultat sur l'asymptotique des γ_n pour n grand montre qu'il y a une infinité de gaps ouverts pour cette classe de potentiels:

RÉSULTAT:

Soit V une fonction π-périodique, réelle-analytique qui s'étend dans la bande $\mathcal{B} = \mathbb{R} + i[-(A+\eta); (A+\eta)], (\eta > 0)$ en une fonction méromorphe dont les seules singularités sont des pôles simples en $x = \pm iA + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), et soit ν le résidu de $V(x)$ en chacun de ses pôles de la demi-bande supérieure.

Pour ν non-nul, il existe deux symboles analytiques classiques α_1, α_2 de symbole principal 1 (voir [Ra]), un réel $\varepsilon > 0$ et un entier N tel que, pour tout $n > N$ on a:

$$\boxed{\gamma_n = 4 \mid \nu \mid \alpha_1(\frac{1}{n}) \exp\{-2An - \mathrm{Im}\nu \frac{\log n}{n} \alpha_2(\frac{1}{n})\} + O(e^{-(2A+\varepsilon)n})} \tag{2}$$

La preuve de ce résultat repose sur la conjugaison de deux types de techniques. Il s'agit d'une part de la méthode WKB complexe exacte qui permet de construire des solutions dont on connait le développement asymptotique dans certains domaines de la bande $\mathcal{B}$, et dont l'introduction dans ce contexte est due à A.Grigis (cf [Gr]) ; d'autre part nous utilisons des méthodes qui relèvent de l'analyse microlocale semi-classique développée par B.Helffer et J.Sjöstrand (cf [Sj],[He-Sj]), qui nous permettent d'obtenir des renseignements très précis sur le comportement des solutions au voisinage des pôles. Nous commençons par rappeler comment le calcul de la taille des gaps se ramène à l'étude de la matrice d'un certain opérateur de translation.

1.Gaps et matrice de translation

Supposons que l'on connaisse une solution $w(x, E)$ de l'équation de Hill (1). Puisque V est réel sur le réel, $w^*(x, E)$, définie par $w^*(x, E) = \overline{w(\bar{x}, E)}$, est aussi solution. Lorsqu'elles sont indépendantes w et w^* forment une base de l'espace $\mathcal{S}(E)$ des solutions de (1). Puisque V est π-périodique, on peut définir sur $\mathcal{S}(E)$

l'opérateur de translation τ : $\tau w(x,E) = w(x+\pi,E)$, et la matrice $T(E)$ de cet opérateur dans la base (w,w^*) est de la forme:

$$T(E) = \begin{pmatrix} a(E) & b(E) \\ \bar{b}(E) & \bar{a}(E) \end{pmatrix} \tag{3}$$

En utilisant le fait que les bornes E_n^-, E_n^+ des intervalles d'instabilité sont exactement les valeurs du paramètre E pour lesquelles il existe des solutions périodiques ou antipériodiques pour la période π, on montre la

PROPOSITION 1. — *Soit $S(E)$ l'argument de $a(E)$. E est une des bornes d'un intervalle d'instabilité ssi*

$$S(E) = \pm \arcsin \frac{\mid b(E) \mid}{\sqrt{1+\mid b(E)\mid^2}} \tag{4}$$

Nous montrerons dans la suite que $S(E) \approx -\pi\sqrt{E}$ et que $b(E) = O(E^{-\infty})$. Avec ces renseignements et la proposition précedente nous obtiendrons:

$$\gamma_n \approx \frac{2 \mid b(E_n) \mid}{S'(E_n)}$$

où E_n est une valeur quelconque de $[E_n^-, E_n^+]$.

2.Solutions WKB

Parce que nous allons utiliser des techniques d'analyse semiclassique, nous posons pour toute la suite $E = 1/h^2$; l'équation de Hill s'écrit alors

$$(h^2D^2 - 1)u(x,h) + h^2V(x)u(x,h) = 0 \tag{5}$$

On veut effectuer le changement de variable complexe

$$z(x,h) = \int_0^x (1-h^2V(t))^{1/2}dt \tag{6}$$

Pour ce faire, il nous faut nous placer dans un domaine simplement connexe Ω de la bande $\mathcal{B}$ dont l'adhérence ne contient ni pôle de V ni point tournant de l'équation (ie les zéros de $(V(x) - 1/h^2)$). Dans ce domaine nous avons la

PROPOSITION 2. —

On peut construire des solutions de l'équation (5) de la forme

$$w_\pm(x,h,x_\pm) = (1-h^2V(x))^{-1/4}e^{\pm iz(x,h)/h}f^\pm(z(x,h),h,z(x_\pm,h)) \tag{7}$$

où $w_\pm(.,h,x_\pm)$ est la solution de (5) qui vérifie les conditions de Cauchy:

$$(8)\qquad \begin{cases} w_\pm(x_\pm,h,x_\pm) = (1-h^2V(x_\pm))^{-1/4}e^{\pm iz(x_\pm,h)/h} \\ \dfrac{\partial}{\partial x}w_\pm(x_\pm,h,x_\pm) = \pm\dfrac{i}{h}(1-h^2V(x_\pm))^{1/4}e^{\pm iz(x_\pm,h)/h} \end{cases}$$

De plus, si l'on note Ω^+ (resp. Ω^-) le plus grand ouvert du domaine Ω pour tout x duquel il existe un chemin joignant x_+ (resp. x_-) à x sur lequel $t \mapsto \mathrm{Im}(z(t,h))$ est strictement décroissante (resp. strictement croissante), alors on connait le développement asymptotique de $w_+(x,h,x_+)$ (resp. $w_-(x,h,x_-)$) pour tout x de Ω^+ (resp. Ω^-).

En calculant des wronskiens à partir des solutions $w_+, w_-, \tau w_+$ et τw_- en des points où l'on connait leur développement asymptotique, on obtient le premier résultat suivant:

PROPOSITION 3. —

i) Il existe un symbole analytique classique α de symbole principal 1 tel que $a(h) = e^{-i\pi/h}\alpha(h)$.

ii) Pour tout $\varepsilon > 0$, on a $b(h) = O(e^{-2(A-\varepsilon)/h})$.

Le fait que l'on n'obtienne qu'une majoration pour les coefficients non-diagonaux de la matrice $T(h)$ est directement lié à notre ignorance du développement asymptotique des solutions dans un voisinage des pôles. La suite de ce travail va consister à retrouver ces développements asymptotiques en menant une étude microlocale près des pôles. On commence par une première réduction qui nous ramène à l'étude près de $x_0 = 0$ de l'équation:

$$(9)\qquad (h^2D^2-1)u(x,h) + h^2V_0(x)u(x,h) = 0$$

où $V_0(x) = V(x+iA) = \nu/x(1+O(x))$ près de 0 (ν étant le résidu de V en iA). A partir des solutions $w_\pm$ de (5), on obtient des solutions $w^0_\pm = \tau_{-iA}w_\pm$ de (9) dont on connait le développement asymptotique dans certains ouverts $\Omega^0_\pm$. Dans ces mêmes ouverts, on connait également le développement asymptotique des solutions $u^0_\pm = e^{\pm A/h}w^0_\pm$ (il suffit pour s'en convaincre de remarquer que $z(x,h) = x+O(h^2)$ (voir (6))). Dans la base (u^0_+, u^0_-) la matrice $T_0(h)$ de l'opérateur de translation τ devient

$$(10)\qquad T_0(h) = \begin{pmatrix} a(h) & e^{2A/h}b(h) \\ e^{-2A/h}\bar{b}(h) & \bar{a}(h) \end{pmatrix}$$

Sur cette dernière expression on comprend l'intérêt de l'étude de l'équation (9) puisque le terme non-diagonal $b(h)$ s'y retrouve multiplié par un facteur $e^{2A/h}$, ce qui, compte tenu de la PROPOSITION 3, permet de penser que l'on pourra accéder à ce terme.

3.Etude microlocale

Nous étudions maintenant l'équation (9) dans un voisinage de l'origine, sous la forme:

$$
(11)\qquad \begin{cases} Qu + h^2 u = 0 \\ \text{où } Q(x,hD) = \frac{x}{\nu\Psi(x)}(h^2D^2-1), \quad \Psi(x) = 1 + O(x) \end{cases}
$$

Les caractéristiques de l'opérateur Q sont $\{x = 0\} \cup \{\xi = 1\} \cup \{\xi = -1\}$ et sont simples en dehors de $(0,1)$ et $(0,-1)$ qui sont des points de branchements. Nous utilisons alors un théorème dû à Helffer et Sjöstrand pour nous ramener microlocalement à l'étude de l'opérateur de branchement $Q_0(x,hD) = xhD$. Nous commençons par rappeler quelques notions d'analyse microlocale semiclassique.

DÉFINITION 1. — Soit Z un ouvert de $\mathbb{C}$ et Φ une fonction continue à valeurs réelles, définie sur Z. $H_\Phi^{loc}(Z)$ est l'ensemble des fonctions $f(z,h)$, définies dans $Z\times]0,h_0]$ qui sont analytiques dans Z pour tout h de $]0,h_0]$ et telles que: $\forall K \subset\subset Z, \forall\varepsilon > 0, \exists C > 0, \forall(z,h) \in K\times]0,h_0], |f(z,h)| \le Ce^{(\Phi(z)+\varepsilon)/h}$.

DÉFINITION 2. — Soit $f \in H_\Phi^{loc}(Z)$, et $\tilde{Z}$ un ouvert de Z. On dit que f est nulle dans $H_\Phi^{loc}(\tilde{Z})$, si: $\forall K \subset \tilde{Z}, \exists C > 0, \exists\varepsilon > 0, \forall z \in K, |f(z,h)| \le Ce^{(\Phi(z)-\varepsilon)/h}$. On notera $MS(f)$ le complémentaire du plus grand ouvert $\tilde{Z}$ de Z pour lequel $f \equiv 0$ dans $H_\Phi^{loc}(\tilde{Z})$.

DÉFINITION 3. — Soit $\Phi_0(z) = (\mathrm{Im}(z))^2/2$. On appelle transformation de Fourier-Bros-Iagolnitzer (FBI) globale (ou transformation de Bargmann) l'opérateur qui à $u \in L^2(\mathbb{R})$ associe la fontion (analytique en z) de $L^2(\mathbb{C}, e^{-2\Phi_0(z)/h}L(dz))$, donnée par

$$
(12)\qquad \mathcal{T}u(z,h) = Ch^{-3/4}\int e^{-(z-y)^2/2h}u(y)dy
$$

où C est la constante qui rend cet opérateur unitaire.

Si Y est un voisinage réel d'un point y_o de $\mathbb{R}$, on peut également faire agir cette transformation sur des familles de distributions (u_h) de $\mathcal{D}'(Y)$ dépendant de h à condition que certaines normes de Sobolev de ces distributions aient une croissance sous-exponentielle quand $h \to 0$. On obtient alors des éléments de $H_{\Phi_0}^{loc}(Z)$ où $Z = Y \times \mathbb{R}$, dont les éléments seront appelés distributions définies microlocalement près de y_0. On dira que $(y,\eta) \in \mathbb{R}^2$ appartient au microsupport de (u_h) et l'on notera encore $(y,\eta) \in MS(u_h)$ si $y - i\eta$ appartient au microsupport de la distribution définie microlocalement $\mathcal{T}u_h$.

Nous énonçons maintenant le théorème de réduction (cf [He-Sj], appendice d):

PROPOSITION 4. —

Il existe deux opérateurs intégraux de Fourier U^+ et U^-, deux symboles analytiques classiques F^+ et F^- tels que:

u est une solution définie microlocalement près de $(0,0)$ de l'équation $Q_0 u = \mu u$ (ie $MS(Q_0 u - \mu u) \cap \mathcal{V}_{(0,0)} = \emptyset$, où $\mathcal{V}_{(0,0)}$ est un petit voisinage de $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^2$)

si et seulement si

$U^+ u$ (resp. $U^- u$) est une solution définie microlocalement près de $(0,1)$ (resp. $(0,-1)$) de l'équation $Qu = -h^2 u$, avec $\mu = F^+(-h^2, h) = \nu h^2/2 + O(h^3)$ (resp. $\mu = F^-(-h^2, h) = -\nu h^2/2 + O(h^3)$).

L'étape suivante consiste bien sûr en l'étude du modèle de branchement. Nous cherchons des solutions de l'équation $Q_0 u = \mu u$ pour $\mu \neq 0, |\mu| \ll 1$. On trouve aisément les solutions u_+ et u_- données par $u_\pm = |x|^{i\mu/h} H(\pm x)$ où $H(x)$ est la fonction de Heaviside. En utilisant la symétrie de Q_0 en x et D, on trouve deux autres solutions v_+ et v_- qui forment tout comme (u_+, u_-) une base de l'espace des solutions distributions. La matrice de passage de la base (v_+, v_-) dans la base (u_+, u_-) est appelée matrice de branchement et est donnée par:

$$B_\mu(h) = \frac{h^{-1-i\mu/h}}{2\pi} \Gamma(-i\mu/h) \begin{pmatrix} e^{\mu\pi/2h} & e^{-\mu\pi/2h} \\ e^{-\mu\pi/2h} & e^{\mu\pi/2h} \end{pmatrix} \tag{13}$$

A partir de ces quatre solutions du modèle, la PROPOSITION 4 fourni huit solutions de notre équation, les unes définies microlocalement près de $(0,1)$ les autres près de $(0,-1)$ et dont les microsupports sont parfaitement connus.

4.Recollements

La dernière étape de notre raisonnement consiste à microlocaliser nos solutions WKB exactes, puis à les identifier à des combinaisons linéaires des huit solutions données par le théorème de réduction, ce qui permettra de déterminer la matrice T_0 (modulo des erreurs exponentiellement petites) à partir de la matrice de branchement $B_\mu(h)$.

Il est aisé de voir que les solutions de l'équation (11) qui nous intéressent peuvent s'étendre en des solutions analytiques dans le demi-plan inférieur. Nous définissons alors quatre distributions solutions à partir des solutions $u_0^+, u_0^-, \tau u_0^+$ et τu_0^-, en prenant la valeur au bord de leur prolongement analytique. Après action de la transformation de FBI globale, nous considérons $u_0^+, u_0^-, \tau u_0^+$ et τu_0^- comme solutions microlocales de l'équation.

Pour identifier ces solutions à celles construites à partir du modèle de branchement, nous utilisons des renseignements précis sur leur microsupport. En particulier, leur définition comme valeur au bord de fonctions analytiques dans le demi-plan inférieur vérifiant certaines conditions de croissance entraine l'absence de microsupport dans $\{(x,\eta) \in \mathbb{R}^2, \eta > 1\}$. Enfin, après quelques calculs purement algébriques, nous obtenons la

PROPOSITION 5. —

Il existe un réel $\varepsilon > 0$ et deux symboles analytiques classiques α et β de symbole principal 1 tels que, pour h assez petit:

$$b(h) = e^{-2A/h} h^{-i\nu h\alpha(h)/2} \nu h\pi\beta(h)(1 + O(e^{-\varepsilon/h})) \tag{14}$$

Notre résultat est alors une conséquence simple des propositions 1, 3 et 5.

Références

[Av-Si] J.Avron, B.Simon: *The Asymptotics of the gap in the Mathieu Equation* Annals of Physics 134, p.76–84, 1981

[Ge-Gr] C.Gérard, A.Grigis: *Precise Estimates of Tunneling and Eingenvalues near a Potential Barrier* J. Differential Equations 72, 1988, p.149–177

[Gr] A.Grigis: *Estimations Asymptotiques des Intervalles d'Instabilité pour l'Equation de Hill* Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 4$^{\text{ième}}$ série, t.20, 1987, p.641–672

[He-Sj] B.Helffer, J.Sjöstrand: *Semiclassical Analysis for Harper's Equation, III* Mémoire n°39, Bull. Soc. Math. France

[Mz] C.März: *Spectral Asymptotics near the Potential Maximum for Hill's Equation* Asymptotic Analysis vol.5, 1992, p.221–267

[Ra] T.Ramond: *Intervalles d'Instabilité pour une Equation de Hill à Potentiel Méromorphe* à paraître au Bull. Soc. Math. France

[Sj] J.Sjöstrand: *Singularités Analytiques Microlocales* Astérisque n° 95, 1982