JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

GERD GRUBB

Le problème d'Atiyah-Patodi-Singer pour les variétés à bord générales (non cylindriques)

Journées Équations aux dérivées partielles (1991), p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1991____A8_0>

Le problème d'Atiyah-Patodi-Singer pour les variétés à bord générales (non cylindriques)

GERD GRUBB

Département de Mathématiques, Université de Copenhague
Universitetsparken 5, DK-2100 Copenhague, Danemark

1. INTRODUCTION

Dans l'article fondamental [APS], Atiyah, Patodi et Singer ont étudié l'indice de certains opérateurs aux dérivées partielles $P: C^\infty(E) \to C^\infty(F)$ de premier ordre, où E et F sont des fibrés vectoriels C^∞ hermitiens de dimension N sur une variété C^∞ compacte X de dimension n et de bord Y, avec des conditions au bord pseudodifférentiels; sous l'hypothèse que la variété, les fibrés et P ont une structure cylindrique au voisinage de Y (sont constants dans la direction normale).

Nous étendons cet étude au cas général non cylindrique et montrons comment cela donne lieu à un terme supplémentaire dans la formule de l'indice, et nous montrons des nouvelles développements asymptotiques des traces des opérateurs "de chaleur" associés aux problèmes aux limites, jusqu'au terme constant.

On trouvera des démonstrations détaillées dans Grubb [G2].

Plus précisément, il est supposé dans [APS] que sur un voisinage X_c de Y de la forme $X_c = Y \times [0, c[$ (de points notés $x = (x', x_n)$), les fibrés E et F sont des pull-back de $E|_Y$ resp. $F|_Y$ (notés E_Y resp. F_Y), P est de la forme

$$P = \sigma_0(\partial_{x_n} + A) \quad \text{sur } X_c, \tag{1.1}$$

où A est un opérator autoadjoint elliptique dans $L_2(E_Y)$ (par rapport à une densité dx' sur Y), et σ_0 est un morphisme unitaire de E_Y sur F_Y. (Pour un exemple simple, prendre $X = \mathbf{T}^3 \times [0,1]$ où $\mathbf{T}^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$ (donc $Y = (\mathbf{T}^3 \times \{0\}) \cup (\mathbf{T}^3 \times \{1\})$), et

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \partial_4 + \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \partial_1 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \partial_2 + \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \partial_3 = I\partial_4 + A, \tag{1.2}$$

relié à l'opérateur de Dirac classique.) Désignant par Π^+ la projection orthogonale sur l'espace propre non-négatif de A, on considère la réalisation P_{Π^+} du problème aux limites

$$Pu = f \text{ sur } X, \quad \Pi^+\gamma_0 u = 0 \quad (\text{avec } \gamma_0 u = u|_Y). \tag{1.3}$$

L'opérateur P_{Π^+} est un opérateur de Fredholm (voir Seeley [S3, Ch. VI]). Alors [APS] montrent que l'indice est déterminé par la formule

$$\operatorname{index} P_{\Pi^+} = a_0 - \tfrac{1}{2}\eta_A, \text{ avec } \eta_A = \eta(0) + \dim\ker A, \tag{1.4}$$

où $\eta(s)$ est la fonction èta, défini par extension analytique en s du formule $\eta(s) = \sum_{\lambda_j \neq 0} \lambda_j |\lambda_j|^{-s-1}$ (les λ_j étant les valeurs propres de A), et où a_0 est l'intégral sur X,

$$a_0 = \int_X \alpha_0 \, dx, \tag{1.5}$$

d'une certaine fonction α_0 définie des symboles de P et P^* sur X. Dans le cas particulier d'un opérateur de Dirac tordu sur une variété riemannienne de dimension paire, $\alpha_0\,dx$ est représenté par une n-forme définie à partir des courbures associées à X et les fibrés (comme dans la formule d'indice locale, voir Atiyah-Bott-Patodi [ABP] et par exemple Getzler [Ge], Roe [R]).

Nous considérons le cas où (1.1) est supposé d'avoir lieu seulement pour la partie principale de P et seulement sur Y, donc

$$P = \sigma_0(\partial_{x_n} + A + x_n P_1 + \psi) \quad \text{sur } X_c, \tag{1.6}$$

où P_1 est un opérateur d'ordre 1 dans E et ψ est un morphisme dans E; en même temps, X est muni d'une densité dx non nécessairement égal au produit $dx'dx_n$ sur X_c, et E et F ne sont pas nécessairement des pull-backs de E_Y et F_Y. Nous appellons P *cylindrique* dans le cas où les hypothèses de [APS] sont satisfaites. (Pour les variétés riemanniennes on prend pour x_n la coordonnée géodésique normale, et ∂_{x_n} est défini à l'aide d'une connexion dans E.)

La réalisation P_{Π^+} est encore définie comme l'opérateur allant de $L_2(E)$ dans $L_2(F)$, de domaine

$$D(P_{\Pi^+}) = \{\, u \in H^1(E) \mid \Pi^+\gamma_0 u = 0 \,\}, \tag{1.7}$$

pour un choix fixé de A (bien que la présence de ψ dans (1.6) permettrait d'autres choix). On note par $H^s(X,E)$ ou $H^s(E)$ l'espace de Sobolev d'ordre s. L'opérateur P_{Π^+} est encore à indice, et nous avons d'abord un résultat assez naturel:

THÉORÈME 1.1. *L'indice de P_{Π^+} est stable sous les perturbations suivantes: Le domaine (1.7) est fixé, mais P est remplacé par $P + P' + \varrho$, où P' est un opérateur continu de $H^1(E)$ dans $L_2(F)$ de norme petit, et ϱ est un opérateur quelconque continu de $L_2(E)$ dans $L_2(F)$.*

En particulier, l'indice est stable sous de petites perturbations du symbol principal de P, fixé sur Y, et donc

$$\operatorname{index} P_{\Pi^+} = c_0 - \tfrac{1}{2}\eta_A, \tag{1.8}$$

où c_0 est égal à $a_0(P_\varepsilon)$ pour une perturbation convenable P_ε de P, telle que P_ε est cylindrique dans un petit voisinage X_ε de Y.

Cette observation permet en principe de trouver la valeur de la constante c_0, mais elle ne dit pas assez sur la structure détaillée de c_0. On peut associer à P et P^* une fonction α_0 analogue à celle mentionné dans (1.5) plus haut; alors si on définit a_0 par (1.5), on a

$$c_0 = a_0 + b_0, \tag{1.9}$$

où b_0 est un nouveau terme "de frontière," qu'il reste à déterminer.

La stratégie générale pour trouver b_0 sera d'étendre l'analyse de [APS] à l'aide de certains techniques pseudodifférentiels; nous expliquerons cela dans la Section 2, où nous montrons des nouvelles formules de traces pour les deux opérateurs de chaleur associés au problème, $\exp(-t(P_{\Pi^+})^*P_{\Pi^+})$ et $\exp(-tP_{\Pi^+}(P_{\Pi^+})^*)$. On montre un développement asymptotique pour $t \to 0$ pour chacun des deux traces (et non seulement pour leur différence, la "supertrace"), et on obtient comme corollaire que

$$b_0 = \int_Y \beta_0 \, dx', \tag{1.10}$$

où β_0 est une fonction derivée des symboles de P, P^* et A au voisinage de Y.

Dans la Section 3 nous étudions b_0 en plus de détail. On trouve en général que b_0 est non-nul. Dans le cas particulier des opérateurs de Dirac tordus, où on a une jolie formule pour α_0, on peut utiliser une autre stratégie (fondé sur le Th. 1.1), qui est d'analyser la limite pour $\varepsilon \to 0$ de $b_0 = a_0(P_\varepsilon) - a_0(P)$ de manière précise. On montre (pour une grande classe contenant les opérateurs de Dirac) comment $\beta_0 \, dx'$ s'interprète comme une $(n-1)$-forme sur Y contenant la deuxième forme fondamentale de Y dans X. Pour ces opérateurs, b_0 est nul si $n = 2$, et est généralement non-nul pour $n \geq 4$.

Les généralisations antérieures de [APS] ont surtout traité des cas oú la partie cylindrique de la variété est remplacé par une partie conique, voir e.g. Cheeger [C], Brüning et Seeley [BS]. [BS] traitent un cas conique à coefficients variables (appellé "asymptotically cone-like"), où la perturbation ne donne pas lieu à un terme local supplémentaire dans la formule d'indice, comme ici.

Nous remercions Peter B. Gilkey pour une correspondance stimulante sur les généralisations du problème APS en l'automne 1990. Nous remercions également Lars Hörmander pour des conversations utiles, et en particulier pour nous avoir donné accès aux notes très instructives de son cours à Lund 1990 sur les variétés riemanniennes et les opérateurs aux dérivées partielles associés. Quand nous l'avons consulté sur ces problèmes, il a fait une esquisse du calcul de b_0 pour les opérateurs de Dirac tordus, que nous avons élaboré dans [G2], voir aussi la Section 3 ici.

2. La stratégie générale.

Rappellons la méthode de [APS]. Le point de départ est la formule d'Atiyah, Bott et Patodi [ABP]

$$\begin{gathered} \operatorname{index} P_{\Pi^+} = \operatorname{Tr}_{L_2(E)} \exp(-t\mathcal{D}_1) - \operatorname{Tr}_{L_2(F)} \exp(-t\mathcal{D}_2), \\ \text{où } \mathcal{D}_1 = (P_{\Pi^+})^* P_{\Pi^+}, \quad \mathcal{D}_2 = P_{\Pi^+}(P_{\Pi^+})^*; \end{gathered} \tag{2.1}$$

ici $(P_{\Pi^+})^*$ est la réalisation du problème adjoint à (1.3) (avec $\Pi^- = I - \Pi^+$):

$$P^* v = g \text{ sur } X, \quad \Pi^- \sigma_0^* \gamma_0 v = 0 \text{ sur } Y \tag{2.2}$$

(donc $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont des réalisations de P^*P resp. PP^* définies par des conditions aux limites pseudodifférentiels); et $\exp(-t\mathcal{D}_1)$ et $\exp(-t\mathcal{D}_2)$ sont les "opérateurs de chaleur" associés. Les deux traces dans (2.1) ne sont pas calculées séparément; on utilise au lieu que leur différence est proche à l'expression analogue, où P et P^* sont remplacés par $P^0 = \partial_{x_n} + A$ resp. $P^{0\prime} = -\partial_{x_n} + A$ sur $Y \times \mathbf{R}_+$, définissant $\Delta_1 = P^{0\prime}{}_{\Pi^-} P^0_{\Pi^+}$, $\Delta_2 = P^0_{\Pi^+} P^{0\prime}{}_{\Pi^-}$,

$$\begin{gathered} Z(t) = \exp(-t\Delta_1) - \exp(-t\Delta_2), \\ K(t) = \operatorname{Tr}_{L_2(Y \times \mathbf{R}_+, E^0)} Z(t) \end{gathered} \tag{2.3}$$

(E^0 = pull-back de E_Y). En effet, $Z(t)$ est dominante au voisinage de Y, et plus loin de Y, $\exp(-t\mathcal{D}_1)$ et $\exp(-t\mathcal{D}_2)$ se comportent comme $\exp(-t\widetilde{P^*P})$ resp. $\exp(-t\widetilde{PP^*})$, où $\widetilde{P^*P}$ et $\widetilde{PP^*}$ sont des extensions de P^*P resp. PP^*, définies dans $\widetilde{E}$ resp. $\widetilde{F}$ (extensions de E et F à une variété compacte $\widetilde{X}$ de dimension n sans bord, dans laquelle X est sous-ensemble C^∞).

En utilisant le fait (plus élémentaire que l'étude de $\operatorname{Tr}_{L_2(E)}\exp(-t\mathcal{D}_i)$) qu'on a des développements asymptotiques complèts des traces des opérateurs sur $\widetilde{X}$,

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Tr}_{L_2(\widetilde{E})}\exp(-t\widetilde{P^*P}) \sim \sum_{j\in\mathbf{N}} \tilde{a}_{1,j-n}t^{(j-n)/2} \text{ pour } t\to 0, \quad \tilde{a}_{1,j-n} = \int_{\widetilde{X}} a_{1,j-n}(x)dx,\\
&\operatorname{Tr}_{L_2(\widetilde{F})}\exp(-t\widetilde{PP^*}) \sim \sum_{j\in\mathbf{N}} \tilde{a}_{2,j-n}t^{(j-n)/2} \text{ pour } t\to 0, \quad \tilde{a}_{2,j-n} = \int_{\widetilde{X}} a_{2,j-n}(x)dx,
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

(voir Minakshisundaram et Pleijel [MP], Seeley [S1, Sect. 2], [S2], Greiner [Gre]), [APS] montrent que $K(t)$ a le comportement asymptotique

$$
K(t) \sim \sum_{j=0}^{\infty} a^0_{j-n}t^{(j-n)/2} \quad \text{pour } t\to 0, \text{ avec } a^0_0 = -\tfrac{1}{2}\eta_A. \tag{2.5}
$$

De ce fait en combinaison avec (2.1) et (2.4) et des estimations des noyaux ils tirent (1.4), (1.5), avec $\alpha_0(x) = a_{1,j-n}(x) - a_{2,j-n}(x)$ (égal à 0 près de Y).

Pour traiter le cas général dépendant de x_n nous allons déterminer les deux traces dans (2.1) *séparément*. Pour les réalisations des problèmes aux limites, des développements comme (2.4) sont bien connus dans le cas *différentiel*; voir [Gre] et [S2], et des développements en un nombre fini de termes ont été obtenus pour une classe de problèmes pseudodifférentiels de type plus régulier que $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ dans Grubb [G1]. Mais les conditions aux limites qui définissent $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont pseudodifférentiels d'une manière irrégulière qui exige un développement ultérieur.

Nous commençons par analyser les opérateurs $\exp(-t\Delta_1)$ et $\exp(-t\Delta_2)$ sur le cylindre $Y\times\mathbf{R}_+$. On construit d'abord les résolvantes $R^0_{1,\lambda} = (\Delta_1-\lambda)^{-1}$ et $R^0_{2,\lambda} = (\Delta_2-\lambda)^{-1}$ pour $\lambda\in\mathbf{C}\setminus\overline{\mathbf{R}}_+$; ensuite les fonctions exponentielles sont définies par un intégral de Cauchy

$$
\exp(-t\Delta_i) = \tfrac{i}{2\pi}\int_{\mathcal{C}} e^{-t\lambda}R^0_{i,\lambda}\,d\lambda, \tag{2.6}
$$

où $\mathcal{C}$ est une courbe convenable dans $\mathbf{C}$, e.g. de la forme (avec $r_0>0$, $\theta_0\in]0,\pi/2[$):

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C} = \{\,\lambda = re^{i\theta_0} \mid \infty > r \geq r_0\,\} \cup \{\,\lambda = r_0e^{i\theta} \mid \theta_0\leq\theta\leq 2\pi-\theta_0\,\}\\
\cup\{\,\lambda = re^{i(2\pi-\theta_0)} \mid r_0\leq r<\infty\,\},
\end{aligned}
$$

entourant le spectre de Δ_i dans la direction positive; et les traces sont évalués par des formules analogues pour les symboles.

En considérant Δ_1 et Δ_2 commes des réalisations de problèmes aux limites elliptiques en une variable, à valeurs dans $L_2(E_Y)$, où les fonctions de A sont définis par la théorie spectrale, on montre:

THÉORÈME 2.1. *Posons*

$$A_\lambda = (A^2-\lambda)^{\frac12}, \quad A' = A + \Pi^0, \quad \Pi^0 = \textit{proj. orthog. sur } \ker A,$$

$$G_{e,\lambda}u(x',x_n) = \int_0^\infty e^{-(x_n+y_n)A_\lambda} \frac{-|A|}{2(|A|+A_\lambda)A_\lambda} u(x',y_n)\,dy_n, \tag{2.7}$$

$$G_{o,\lambda}u(x',x_n) = \int_0^\infty e^{-(x_n+y_n)A_\lambda} \frac{-A'}{2(|A|+A_\lambda)|A'|} u(x',y_n)\,dy_n.$$

Alors les résolvantes de Δ_1 *et* Δ_2 *sur* $Y \times \mathbf{R}_+$ *sont de la forme*

$$R^0_{i,\lambda} = Q^0_{\lambda,+} + G^0_{i,\lambda}, \text{ avec } Q^0_{\lambda,+} = r^+(D^2_{x_n} + A^2 - \lambda)^{-1}e^+, \tag{2.8}$$
$$G^0_{1,\lambda} = G_{e,\lambda} + G_{o,\lambda}, \text{ et } G^0_{2,\lambda} = G_{e,\lambda} - G_{o,\lambda}.$$

Dans (2.8), r^+ désigne la restriction à $\{x_n > 0\}$ et e^+ désigne l'extension par 0. Ici, $Q^0_{\lambda,+}$ est un o.p.d. dépendant d'une manière régulière de (ξ,λ), tandis que les opérateurs de Green singuliers $G_{e,\lambda}$ et $G_{o,\lambda}$ ont peu de régularité. Dans la terminologie de [G1], $G_{e,\lambda}$ est ***de régularité*** 1 et $G_{o,\lambda}$ est ***de régularité*** 0 (un o.g.s. est de régularité ν essentiellement quand le terme no. j dans le symbole est Höldérien de degré $\nu - j$ en ξ' près de 0; on permet ici des valeurs de $\nu - j$ négatives). De plus, le symbole principal de $G_{e,\lambda}$ est ***pair*** en ξ', et celui de $G_{o,\lambda}$ est ***impair*** en ξ'.

Dans la construction des vraies résolvantes, ce résultat entraîne en premier lieu que

$$R_{1,\lambda} = (\mathcal{D}_1 - \lambda)^{-1} = Q_{1,\lambda,+} + G_{1,\lambda} \text{ dans } L_2(E), \tag{2.9}$$
$$R_{2,\lambda} = (\mathcal{D}_2 - \lambda)^{-1} = Q_{2,\lambda,+} + G_{2,\lambda} \text{ dans } L_2(F),$$

où $Q_{i,\lambda,+} = r^+Q_{i,\lambda}e^+$ (de régularité $+\infty$) avec

$$Q_{1,\lambda} = (\widetilde{P^*P} - \lambda)^{-1} \text{ dans } L_2(\widetilde{X},\widetilde{E}), \tag{2.10}$$
$$Q_{2,\lambda} = (\widetilde{PP^*} - \lambda)^{-1} \text{ dans } L_2(\widetilde{X},\widetilde{F});$$

et $G_{1,\lambda}$ et $G_{2,\lambda}$ sont des opérateurs de Green singuliers dépendant de λ, ***de régularité*** 0, comme o.g.s. paramétrisés, d'ordre -2. Nous définissons alors

$$\exp(-t\mathcal{D}_i) = V_{i,+}(t) + W_i(t) = \tfrac{i}{2\pi}\int_{\mathcal{C}} e^{-t\lambda}Q_{i,\lambda,+}\,d\lambda + \tfrac{i}{2\pi}\int_{\mathcal{C}} e^{-t\lambda}G_{i,\lambda}\,d\lambda, \quad i = 1,2. \tag{2.11}$$

Rappellons de [G1, 4.2] l'importance de la régularité ν. Si G_λ est une famille d'opérateurs d'ordre -2 et régularité ν (entier), et $W(t) = \frac{i}{2\pi}\int_{\mathcal{C}} e^{-\lambda t}G_\lambda\,d\lambda$, alors la trace de $W(t)$ a un développement en $n+\nu$ termes exactes; en particulier,

$$\text{(i)} \quad \operatorname{Tr} W(t) = c_{-n}t^{-n/2} + \cdots + c_{-1}t^{-1/2} + O(t^{-1/8}), \text{ si } \nu = 0, \tag{2.12}$$
$$\text{(ii)} \quad \operatorname{Tr} W(t) = c_{-n}t^{-n/2} + \cdots + c_{-1}t^{-1/2} + c_0 + O(t^{3/8}), \text{ si } \nu = 1.$$

(Il s'agit de l'intégrabilité des termes du symbole au voisinage de $\xi' = 0$.)

Les opérateurs $V_{i,+}(t)$ sont de régularité $+\infty$ et ont des développements complets comme dans (2.4). Le fait que $G_{1,\lambda}$ et $G_{2,\lambda}$ sont de régularité 0 entraîne que les $W_i(t)$ satisfont à (2.12 i), et cela ne suffit pas encore pour déterminer l'indice, voir (2.1). Mais il est en effet possible de faire une analyse plus fine en les comparant avec les $G^0_{i,\lambda}$. Soit $\chi \in C^\infty([0,\infty[)$ tel que

$$\chi(x_n) \in [0,1], \quad \chi(x_n) = 1 \text{ pour } x_n \le \tfrac13, \quad \chi(x_n) = 0 \text{ pour } x_n \ge \tfrac23, \tag{2.13}$$

et soit $\chi_c = \chi(x_n/c)$, prolongé par 0 hors de $Y \times [0,c]$.

THÉORÈME 2.2. *Les termes de Green singulier dans les résolvantes vérifient:*

$$
\begin{aligned}
&G_{1,\lambda} = \chi_c G^0_{1,\lambda}\chi_c + G^{(1)}_{1,\lambda}, \\
&G_{2,\lambda} = \chi_c\sigma_0 G^0_{2,\lambda}\sigma_0^*\chi_c + G^{(1)}_{2,\lambda},
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

où les $G^{(1)}_{i,\lambda}$ sont d'ordre -3 et de régularité 0, donc de régularité 1 quand on les considère comme opérateurs d'ordre -2.

En appliquant des formules comme (2.11) à (2.14), on obtient en vue de (2.8):

$$
\begin{aligned}
&W_1(t) = \chi_c W_e(t)\chi_c + \chi_c W_o(t)\chi_c + W_1^{(1)}(t), \\
&W_2(t) = \chi_c\sigma_0 W_e(t)\sigma_0^*\chi_c - \chi_c\sigma_0 W_o(t)\sigma_0^*\chi_c + W_2^{(1)}(t),
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

où les traces des termes $W_i^{(1)}(t)$ et des termes avec $W_e(t)$ ont le bon comportement comme dans (2.12 ii). D'autre part, nous avons pour les "mauvais" termes avec $W_o(t)$, en vue de (2.3), (2.5), (2.8):

$$
\begin{aligned}
&Z(t) = (W_e(t) + W_o(t)) - (W_e(t) - W_o(t)) = 2W_o(t); \text{ donc} \\
&\operatorname{Tr} W_o(t) = \tfrac12 K(t) \sim \sum_{j=0}^{\infty} \tfrac12 a^0_{j-n} t^{(j-n)/2} \quad \text{pour } t \to 0, \text{ avec } \tfrac12 a^0_0 = -\tfrac14 \eta_A.
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

On montre sans difficulté que

$$
\operatorname{Tr}(W_o(t) - \chi_c W_o(t)\chi_c) = O(t^N) \quad \text{pour } t \to 0, \text{ tout } N.
\tag{2.17}
$$

Alors on peut conclure:

THÉORÈME 2.3. *Les traces de* $\exp(-t\mathcal{D}_1)$ *et* $\exp(-t\mathcal{D}_2)$ *ont les développements asymptotiques pour $t \to 0$:*

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Tr}_{L_2(E)} \exp(-t\mathcal{D}_1) = c_{1,-n}t^{-n/2} + \dots + c_{1,-1}t^{-1/2} + c_{1,0} - \tfrac14\eta_A + O(t^{3/8}), \\
&\operatorname{Tr}_{L_2(F)} \exp(-t\mathcal{D}_2) = c_{2,-n}t^{-n/2} + \dots + c_{2,-1}t^{-1/2} + c_{2,0} + \tfrac14\eta_A + O(t^{3/8}).
\end{aligned}
\tag{2.18}
$$

Les coefficients $c_{i,j-n}$ sont déterminés de la manière habituelle par calcul symbolique dans des coordonnées locales. Plus précisément on a

$$
c_{i,j-n} = a_{i,j-n} + b_{i,j-n}, \text{ pour } i = 1,2, \text{ et } j = 0,\dots,n,
\tag{2.19}
$$

où chaque $a_{i,j-n}$ est l'integrale sur X d'une function $\alpha_{i,j-n}(x)$ determinée par les dérivées des symboles de P et P^* jusqu'à l'ordre j (et $a_{i,j-n} = 0$ pour j impair); et chaque $b_{i,j-n}$ est l'integrale sur Y d'une function $\beta_{i,j-n}(x')$ determinée par les dérivées jusqu'à l'ordre $j-1$ des symboles de P, P^* et A sur Y (avec $\beta_{i,-n} = 0$).

REMARQUE 2.4: L'estimation $O(t^{3/8})$ vient de la théorie générale de [G1]. Pour le cas particulier étudié ici, il paraît qu'on peut obtenir $O(t^{1/2})$ en utilisant les formules explicites.

On a en particulier, grâce à (2.1):

COROLLAIRE 2.5. *Les coefficients introduits ci-dessus vérifient* $c_{1,j-n} = c_{2,j-n}$ *pour* $j < n$, *et*

$$\begin{aligned} &\operatorname{index} P_{\Pi^+} = a_0 + b_0 - \tfrac{1}{2}\eta_A; \text{ avec} \\ a_0 &= a_{1,0} - a_{2,0} = \int_X \alpha_0(x)\,dx, \quad \alpha_0(x) = \alpha_{1,0}(x) - \alpha_{2,0}(x), \\ b_0 &= b_{1,0} - b_{2,0} = \int_Y \beta_0(x')\,dx', \quad \beta_0(x') = \beta_{1,0}(x') - \beta_{2,0}(x'). \end{aligned} \tag{2.20}$$

Dans le cas traité dans [APS], $\beta_{1,0}(x') = \beta_{2,0}(x')$ parce qu'ils sont dérivées du même terme $W_e(t)$ ($W_i^{(1)}(t) = O(t^N)$ dans ce cas), voir (2.8), (2.15).

Soulignons la conséquence de l'étude ci-dessus: *Le "mauvais" terme $W_o(t)$ de régularité 0 dans* $\exp(-t\mathcal{D}_1)$ *est précisement la moitié du terme $Z(t)$ dans l'étude cylindrique, qui donne la contribution èta à l'indice.*

Les résultats sur les résolvantes permettent d'étudier encore d'autres fonctions de P_{Π^+}, par exemple $P_{\Pi^+}\exp(-\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_1)^z$; on voit en utilisant [G1, Sect. 4.4] que $\operatorname{Tr}(\mathcal{D}_1)^z$ est méromorphe pour $\operatorname{Re} z < 3/8$ ($\operatorname{Re} z < 1/2$ en vue de la Remarque 2.4).

3. CALCULATIONS DE b_0.

Il est maintenant interessant d'essayer de calculer le nouveau terme b_0 dans la formule de l'indice, et en particulier de montrer qu'il peut être non-nul.

Nous signalons que, bien que l'indice ne dépend que de P, les valeurs de a_0 et b_0 dépendent du choix de P^* (dans sa dépendence du choix de normes dans $L_2(E)$ et $L_2(F)$); c'est seulement la valeur de $a_0 + b_0$ qui est fixée quand on fixe A et la norme dans $L_2(E_Y)$.

EXEMPLE 3.1: Considérons le cas où

$$P = \partial_{x_n} + A + x_n C, \text{ ou bien} \tag{3.1}$$

$$P = (1 + x_n)\partial_{x_n} + A, \tag{3.2}$$

sur $X_c = Y \times [0, c[$, muni de la densité $dx = dx'dx_n$, et $E = F$ est le pull-back de E_Y sur X_c, C étant un opérateur d'ordre 1 sur Y. Dans le cas $n = 2$, b_0 est déterminé par les symboles d'ordre -3 de $G_{1,\lambda}$ et $G_{2,\lambda}$ près de Y. Alors on trouve par un calcul détaillé, en utilisant la parité resp. imparité de $G_{o,\lambda}$ resp. $G_{e,\lambda}$: Dans le cas (3.1) avec $n = 2$, $b_0 = 0$ si C est autoadjoint, mais autrement, b_0 peut être non nul, par exemple si

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\partial_1 \\ \partial_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \partial_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{sur } Y = S^1.$$

Dans le cas (3.2) avec $n = 2$, $b_0 \neq 0$. (Là, si on remplace la densité dx_1dx_2 par la densité $(1+x_2)^{-1}dx_1dx_2$ sur X_c, le terme b_0 disparaît et toute la contribution locale des opérateurs est contenue dans a_0.)

L'exemple montre que b_0 est non nul en général.

Dans l'étude des opérateurs de Dirac (ou Dirac tordus) sur des variétés riemanniennes, le choix de densité (et de norme hilbertien) est plus étroitement lié à la structure des opérateurs.

Décrirons ces opérateurs très rapidement (pour des exposés détaillés, voir e.g. Atiyah-Bott-Patodi [ABP] et Roe [R]): On suppose que X est une variété riemannienne de dimension paire ($n = 2k$), orientée et muni d'une structure de spin définie par un Spin($2k$)-fibré principal $\widetilde{P}$. On suppose en plus que F_1 est un fibré vectoriel hermitien sur X. Alors le produit tensoriel $E_1 = S(\widetilde{P}) \otimes F_1$ est un fibré de Clifford où $\mathrm{Cl}(X)$ opère sur le premier facteur; et $E_1 = E_+ \oplus E_-$, où $E_\pm = S_\pm(\widetilde{P}) \otimes F_1$. Soit ∇^{F_1} une connexion unitaire sur F_1, et notons par ∇^{E_1} la connexion sur E_1 définie de la connexion de Levi-Civita ∇ sur $S(\widetilde{P})$ et ∇^{F_1} sur F_1 (par la formule $\nabla^{E_1}(u \otimes v) = (\nabla u) \otimes v + u \otimes (\nabla^{F_1} v)$); c'est une connexion de Clifford. En composant ∇^{E_1} avec la multiplication de Clifford, on obtient l'opérateur de Dirac tordu D_{F_1} dans $C^\infty(X, E_1) = C^\infty(X, E_+) \oplus C^\infty(X, E_-)$; il échange les sections de $E_\pm$,

$$(3.1) \qquad D_{F_1} = \begin{pmatrix} 0 & D_{F_1}^- \\ D_{F_1}^+ & 0 \end{pmatrix}, \text{ où } D_{F_1}^\pm : C^\infty(X, E_\pm) \to C^\infty(X, E_\mp),\ D_{F_1}^- = D_{F_1}^{+\,*}.$$

Le cas où F_1 est le fibré trivial de dimension 1, donc $E_\pm = S_\pm(\widetilde{P})$, donne les opèrateurs de Dirac.

Puisque $D_{F_1}^+$ est principalement, au bord Y, de la même forme que les opérateurs etudiés dans [APS, Sect. 4], la théorie précedente s'applique à $P = D_{F_1}^+$, avec $E = E_+$ et $F = E_-$.

Pour le cas cylindrique (où la métrique riemannienne g est un produit, F_1 est le pull-back de F_Y, et la connexion ∇^{F_1} est constante dans la direction normale, sur un voisinage $X_c = Y \times [0, c[\,)$, Atiyah, Patodi et Singer ont montré dans [APS, (4.3)] la formule suivante pour $a_0(D_{F_1}^+)$ (voir (2.20)):

$$(3.4) \qquad a_0(D_{F_1}^+) = \int_X \widehat{A}\, \mathrm{Ch}\, F_1;$$

ici $\widehat{A}$ et $\mathrm{Ch}\, F_1$ (la caractère de Chern) sont certains polynômes dans les formes de courbure de g resp. de ∇^{F_1}. On a la formule compacte pour $\widehat{A}$ (voir [ABP], Getzler [Ge], [R]):

$$(3.5) \qquad \widehat{A} = \sqrt{\det \frac{(\Omega/4\pi i)}{\sinh(\Omega/4\pi i)}},$$

où Ω est la matrice de courbure riemannienne $\Omega^m{}_l = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1,\dots,n} R^m{}_{ijl} dx^i \wedge dx^j$, les $R^m{}_{ijl}$ étant les éléments du tenseur de courbure riemannienne. (3.5) doit être lu comme un développement en séries de Taylor, c'est en effet un polynôme en les élements de Ω (les puissances d'ordre $> n/2$ sont nuls). Par exemple,

$$(3.6) \qquad \widehat{A} = \begin{cases} 1, & \text{pour } n = 2, \\ 1 + \frac{1}{12} \mathrm{Tr}[(\Omega/4\pi)^2], & \text{pour } n = 4. \end{cases}$$

Seulement les formes de dégré n dans $\widehat{A}\, \mathrm{Ch}\, F_1$ entrent dans l'intégrale (3.4).

Grâce à ces formules on peut fonder l'analyse de b_0 sur le Théorème 1.1.

Nous considérons le cas où la métrique g n'est pas constante en la coordonnée normale géodésique x^n. Dans X_c on peut l'écrire sous la forme

$$(3.7) \qquad g = (dx^n)^2 + g_Y^{x^n},$$

où $g_Y^{x^n}$ est une métrique riemannienne sur Y pour chaque x^n. Nous allons comparer cette métrique avec la métrique suivante, pour $\varepsilon \leq c$,

$$g^{(\varepsilon)} = \chi_\varepsilon((dx^n)^2 + g_Y^0) + (1 - \chi_\varepsilon)g \tag{3.8}$$

(voir (2.13) ff. pour χ_ε), qui est de la forme étudiée dans [APS]. Notre calcul est fondé sur une esquisse de L. Hörmander.

Soit $P = D_{F_1}^+$ un opérator de Dirac tordu sur X avec la métrique g, et soit P_ε la variante obtenue en remplaçant g par $g^{(\varepsilon)}$. Sur $X_c = Y \times [0, c[$ *nous identifions* F_1 *avec le pull-back de* $F_1|_Y$*, y compris la métrique hermitienne, et nous prenons la connexion* ∇^{F_1} *constante en* $x^n \in [0, c[$; cette hypothèse est la même pour P et P_ε. (Elle est vérifiée en particulier par les opérateurs de Dirac.)

Soit $\widehat{A}_\varepsilon$ l'expression (3.5) pour $g^{(\varepsilon)}$. Puisque le symbole de P_ε converge vers celui de P pour $\varepsilon \to 0$, on a, grâce au Théorème 1.1,

$$\operatorname{index}(P_{\Pi^+}) = \int_X \widehat{A}_\varepsilon \operatorname{Ch} F_1 - \tfrac{1}{2}\eta_A, \tag{3.9}$$

pour ε suffisamment petit. Donc, par (2.20),

$$\int_X \widehat{A}_\varepsilon \operatorname{Ch} F_1 = a_0 + b_0, \tag{3.10}$$

d'où il résulte, quand on définit a_0 par (3.4),

$$b_0 = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_X \widehat{A}_\varepsilon \operatorname{Ch} F_1 - \int_X \widehat{A} \operatorname{Ch} F_1. \tag{3.11}$$

On peut calculer cette limite en considérant le développement de Taylor de $g_Y^{x^n}$ en x^n. Soit $x' = (x^1, \ldots, x^{n-1})$ un système de coordonnées geodésiques dans Y (au voisinage d'un point y représenté par 0), et soit x^n comme ci-dessus, alors la métrique s'écrit $g = \sum_{j,k \leq n} g_{jk}(x', x^n) dx^j dx^k$ avec $g_{jn} = g_{nj} = 0$ pour $j < n$, $g_{nn} = 1$, et $g_{jk}(x', 0) = \delta_{jk} + O(|x'|^2)$, pour $|x'|$ et $x^n \leq c$. La deuxième forme fondamentale $h = \sum_{j,k \leq n-1} h_{jk}(x') dx^j dx^k$ s'identifie à $-\frac{1}{2} \sum_{j,k \leq n-1} \partial_n g_{jk}(x', 0) dx^j dx^k$. Alors

$$g_Y^{x^n} = \sum_{j,k \leq n-1} g_{jk}(x', x^n) dx^j dx^k = g_Y^0 - 2x^n h + O((x^n)^2); \tag{3.12}$$

nous écrivons $O(a)$ pour indiquer une forme à coefficients $\leq C|a|$ pour $|x'|$ et $x^n \leq c$, avec C indépendante de x et de ε. Par conséquent, en vue de (3.7) et (3.8),

$$\begin{aligned} g^{(\varepsilon)} - g &= \chi(\tfrac{x^n}{\varepsilon})(2hx^n + O((x^n)^2)) \\ &= \varepsilon\varphi(\tfrac{x^n}{\varepsilon})(2h + O(x^n)) = 1_\varepsilon O(\varepsilon), \end{aligned} \tag{3.13}$$

où on a mis $t\chi(t) = \varphi(t)$ et noté par 1_ε la fonction caractéristique de $\{x^n \leq \varepsilon\}$. En plus,

$$\begin{aligned} \partial_n(g^{(\varepsilon)} - g) &= \varphi'(\tfrac{x^n}{\varepsilon})(2h + O(x^n)) + \varphi(\tfrac{x^n}{\varepsilon})O(\varepsilon) = 1_\varepsilon O(1), \\ \partial_n^2(g^{(\varepsilon)} - g) &= \tfrac{1}{\varepsilon}\varphi''(\tfrac{x^n}{\varepsilon})(2h + O(x^n)) + \varphi'(\tfrac{x^n}{\varepsilon})O(1) + \varphi(\tfrac{x^n}{\varepsilon})O(\varepsilon) \\ &= \tfrac{1}{\varepsilon}\varphi''(\tfrac{x^n}{\varepsilon})2h + 1_\varepsilon O(1), \end{aligned} \tag{3.14}$$

et on a des estimations pareilles pour les dérivées en x'. Dans le passage à la limite (3.11) on trouvera que les termes composés de facteurs $1_\varepsilon O(1)$ vont disparaître; d'autre part, $\frac{1}{\varepsilon}\varphi''(\frac{x^n}{\varepsilon})$ converge vers $-\delta(x^n)$, où δ est la mesure de Dirac. (Plus précisément, la convergence prend lieu dans $\mathcal{D}'(]-c,c[)$, quand on laisse $x^n \in]-c,c[$ en prenant une extension $\widetilde{X}$ de X.) Nous avons aussi besoin du fait que

$$\frac{1}{\varepsilon}\varphi''(\tfrac{x^n}{\varepsilon})(\varphi'(\tfrac{x^n}{\varepsilon})-1)^\mu \to \tfrac{(-1)^{\mu+1}}{\mu+1}\delta(x^n) \quad \text{pour } \varepsilon \to 0, \quad \mu \in \mathbb{N}. \tag{3.15}$$

La matrice et le tenseur de courbure pour $g^{(\varepsilon)}$ sont définis par

$$\begin{aligned} \Omega^{(\varepsilon)} &= \left(\Omega^{(\varepsilon)m}{}_l\right)_{m,l\le n} = \Big(\sum_{k\le n} g^{(\varepsilon)mk}\Omega^{(\varepsilon)}_{kl}\Big)_{m,l\le n}, \quad \Omega^{(\varepsilon)}_{kl} = \sum_{i<j\le n} R^\varepsilon_{ijkl}dx^i\wedge dx^j, \\ R^\varepsilon_{ijkl} &= \partial_k\Gamma^\varepsilon_{jli} - \partial_l\Gamma^\varepsilon_{jki} + \sum_{m\le n}(\Gamma^\varepsilon_{jk}{}^m\Gamma^\varepsilon_{ilm} - \Gamma^\varepsilon_{jl}{}^m\Gamma^\varepsilon_{ikm}), \end{aligned} \tag{3.16}$$

où les Γ^ε_{ikj} et $\Gamma^\varepsilon_{ik}{}^l$ sont les symboles de Christoffel, définis en géneral par:

$$\Gamma_{ikj} = \tfrac{1}{2}(\partial_k g_{ij} + \partial_i g_{jk} - \partial_j g_{ki}) = \Gamma_{kij}, \quad \Gamma_{ik}{}^l = \sum_{j\le n} g^{lj}\Gamma_{ikj}; \tag{3.17}$$

avec $(g^{lj})_{l,j\le n} = \left((g_{ik})_{i,k\le n}\right)^{-1}$; voir e.g. Roe [R], Klingenberg [K].

La limite de $\Omega^{(\varepsilon)}$ et ses puissances sont calculées par insertion de (3.13), (3.14) ff. dans ces formules. On trouve que φ'' apparaît toujours à la puissance 1 (parce qu'il est toujours couplé avec une forme $dx^j \wedge dx^n$, et $dx^n\wedge dx^n = 0$). En renvoyant à [G2] pour les détails nous formulons le résultat:

THÉORÈME 3.2. *Pour tout entier $\sigma \ge 1$ il existe un polynôme q_σ en la matrice de courbure de $(dx^n)^2 + g^0_Y$ et certaines matrices formées de la deuxième forme fondamentale h, tel que*

$$(\Omega^{(\varepsilon)})^\sigma \to \Omega^\sigma + q_\sigma\delta(x^n), \quad \textit{pour } \varepsilon \to 0. \tag{3.18}$$

Il s'ensuit que

$$\int_X (\Omega^{(\varepsilon)})^\sigma \operatorname{Ch} F_1 \to \int_X \Omega^\sigma \operatorname{Ch} F_1 + \int_X \delta(x^n) q_\sigma \operatorname{Ch} F_1, \text{ pour } \varepsilon \to 0. \tag{3.19}$$

Désignons par $\widehat{B}_{F_1}$ la forme obtenue de la manière suivante: Dans $\widehat{A}\operatorname{Ch} F_1$ on remplace Ω^σ par q_σ, on prend la forme de dégré n, et on remplace là $dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$ par $dx^1\wedge\cdots\wedge dx^{n-1}$. Alors nous avons:

THÉORÈME 3.3. *Quand P est un opérateur de Dirac tordu satisfaisant aux hypothèses décrites plus haut,*

$$\begin{aligned} &\operatorname{index} P_{\Pi^+} = a_0 + b_0 - \tfrac{1}{2}\eta_A, \text{ où} \\ &a_0 = \int_X \widehat{A}\operatorname{Ch} F_1, \quad b_0 = \int_Y \widehat{B}_{F_1}. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Notons que $b_0 = 0$ si $n = 2$, simplement parce que $\widehat{A}_\varepsilon = 1$ pour tout ε dans ce cas, voir (3.6). (Voir aussi Gilkey [Gi2].) D'autre part, pour n pair ≥ 4, on peut donner des exemples simples explicits montrant que $b_0 \ne 0$ en général (voir [G2]).

Pour éliminer l'hypothèse que la métrique hermitienne de F_1 et la connexion ∇^{F_1} sont constants en x^n, il faut considérer (3.11) avec $\operatorname{Ch} F_1$ remplacée par une caractère de Chern dépendant de ε, et faire encore une étude de perturbation.

References

[ABP]. M. F. Atiyah, R. Bott and V. K. Patodi, *On the heat equation and the index theorem*, Inventiones Math. **19** (1973), 279–330.

[APS]. M. F. Atiyah, V. K. Patodi and I. M. Singer, *Spectral asymmetry and Riemannian geometry, I*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **77** (1975), 43–69.

[BM]. L. Boutet de Monvel, *Boundary problems for pseudo-differential operators*, Acta Mat. **126** (1971), 11–51.

[BS]. J. Brüning and R. Seeley, *An index theorem for first order regular singular operators*, Amer. J. Math. **110** (1988), 659–714.

[C]. J. Cheeger, *Spectral geometry of singular Riemannian spaces*, J. Diff. Geom. **18** (1983), 575–657.

[Ge]. E. Getzler, *A short proof of the local Atiyah-Singer index theorem*, Topology **25** (1986), 111–117.

[Gi1]. P. B. Gilkey, *The boundary integrand in the formula for the signature and Euler characteristic of a Riemannian manifold with boundary*, Adv. in Math. **15** (1975), 334–360.

[Gi2]. ———, *On the index of geometrical operators for Riemannian manifolds with boundary*, (in preparation).

[Gre]. P. Greiner, *An asymptotic expansion for the heat equation*, Arch. Rat. Mech. Anal. **41** (1971), 163–218.

[G1]. G. Grubb, "Functional Calculus of Pseudo-Differential Boundary Problems," Progress in Math., Vol. 65, Birkhäuser, Boston, 1986.

[G2]. ———, *Heat operator trace expansions and index for general Atiyah-Patodi-Singer boundary problems*, Copenhagen Univ. Math. Dept. Preprint Series 1991 no. 9.

[MP]. S. Minakshisundaram and Å. Pleijel, *Some properties of the eigenfunctions of the Laplace operator on Riemannian manifolds*, Canada J. Math. **1** (1949), 242–256.

[R]. J. Roe, "Elliptic Operators, Topology and Asymptotic Methods," Pitman Research Monograph 179, Longman Scientific and Technical, New York, 1988.

[S1]. R. T. Seeley, *Complex powers of an elliptic operator*, AMS Proc. Symp. Pure Math. **X** (1967), 288–307, AMS, Providence R. I.

[S2]. ———, *Analytic extension of the trace associated with elliptic boundary problems*, Amer. J. Math. **91** (1969), 963–983.

[S3]. ———, *Topics in pseudo-differential operators*, "CIME Conference on Pseudo-Differential Operators 1968," Edizioni Cremonese, Roma, 1969, pp. 169–305.