JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

JEAN-MARC DELORT

Deuxième microlocalisation simultanée et applications

Journées Équations aux dérivées partielles (1990), p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1990____A8_0>

Deuxième microlocalisation simultanée et applications

JEAN-MARC DELORT
UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
91405 ORSAY CEDEX

0. Introduction

Nous nous proposons dans cet exposé de résumer les résultats obtenus dans [**5**], [**6**] concernant la deuxième microlocalisation simultanée et son application à l'étude de deux problèmes d'analyse microlocale. La deuxième microlocalisation, introduite dans le domaine de l'analyse par SJÖSTRAND [**19**], BONY [**3**], LEBEAU [**13**] a été utilisée récemment par ce dernier auteur pour obtenir des résultats généraux de propagation des singularités pour des solutions d'équations aux dérivées partielles semi-linéaires (cf. [**15**] et pour une introduction élémentaire à la deuxième microlocalisation par transformation de FBI [**8**]).

La deuxième microlocalisation simultanée, introduite dans [**5**], est une extension de celle-ci adaptée à l'étude d'un certain type de distributions apparaissant naturellement dans la résolution de tels problèmes de propagation. Elle permet d'obtenir des majorations géométriques pour le front d'onde C^∞ d'un produit de distributions conormales le long de sous-variétés analytiques réelles lisses, en position quelconque les unes par rapport aux autres, ainsi que des renseignements précis concernant la conormalité des ondes semi-linéaires le long de leurs caustiques.

Nous allons dans le premier paragraphe rappeler la notion de conormalité et celle de deuxième microlocalisation. Le paragraphe 2 sera ensuite consacré à la définition de la deuxième microlocalisation simultanée et à l'énoncé d'un théorème de trace qu'elle permet d'obtenir. Le dernier paragraphe, enfin, développe les applications indiquées ci-dessus.

1. Conormalité et deuxième microlocalisation

La notion de distribution conormale a joué un rôle essentiel dans l'étude des singularités de solutions d'équations aux dérivées partielles hyperboliques semi-linéaires (cf. [**1**], [**2**], [**3**], [4], [**17**], [**18**]). Commençons par rappeler la définition des espaces de Bony :

DÉFINITION 1.1. Soient Σ une sous-variété C^∞ de $\mathbb{R}^n$ et s un réel. On dit qu'une distribution u est dans l'espace $H^{s,+\infty}_\Sigma$ si pour toute famille finie $X_1,\ldots,X_k$ de champs de vecteurs C^∞ tangents à Σ, $X_1\ldots X_k u\in H^s_{\mathrm{loc}}$. On dit que u est conormale le long de Σ s'il existe $s\in\mathbb{R}$ avec $u\in H^{s,+\infty}_\Sigma$.

Il résulte de la définition que si u est conormale le long de Σ son front d'onde C^∞ est contenu dans le fibré conormal à Σ dans $\mathbb{R}^n$, $T^*_\Sigma\mathbb{R}^n$. La deuxième microlocalisation le long de $T^*_\Sigma\mathbb{R}^n$ décrit, pour une distribution u à front d'onde contenu dans $T^*_\Sigma\mathbb{R}^n$, son défaut de conormalité le long de Σ. C'est un raffinement de la notion de singularité microlocale dans lequel on regarde comme négligeables du point de vue de la régularité non seulement les fonctions C^∞ mais toutes les distributions conormales le long de Σ.

Rappelons la définition de la transformation de FBI. Soit u une distribution à support compact sur $\mathbb{R}^n$ et pour $\lambda\in[1,+\infty[$, $z\in\mathbb{C}^n$, posons :

$$Tu(z,\lambda)=\int e^{-\frac{\lambda}{2}(z-x)^2}u(x)\,dx\ . \tag{1.1}$$

On a une estimation de la forme $|Tu(z,\lambda)|\le C(\lambda+|\mathrm{Im}\,z|)^N e^{\frac{\lambda}{2}(\mathrm{Im}\,x)^2}$ où N est l'ordre de la distribution u. La régularité microlocale H^s, C^∞ ou analytique de u se caractérise par de meilleures estimations de $Tu(z,\lambda)$. On a par exemple le résultat suivant de [**10**] :

THÉORÈME 1.2 (Gérard). *La distribution u est H^s microlocalement près du point $(x_0,\xi_0)\in T^*\mathbb{R}^n\setminus 0$ (i.e. il existe $a(x,D)$ opérateur pseudo-différentiel d'ordre 0 elliptique en (x_0,ξ_0) avec $a(x,D)u\in H^s$) si et seulement si il existe W voisinage de $x_0-i\xi_0$ dans $\mathbb{C}^n$ tel que :*

$$\int_1^{+\infty}\int_W |Tu(z,\lambda)|^2\ e^{-\lambda(\mathrm{Im}\,z)^2}\ \lambda^{\frac{3n}{2}+2s-1}\ dL(z)\,d\lambda<+\infty \tag{1.2}$$

(où $dL(z)$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C}^n$).

De manière analogue, la conormalité peut se caractériser par une transformation du même type que (1.1). Plaçons-nous pour cela dans un système de coordonnées locales $x=(x',x'')$ tel que Σ soit donnée par $x''=0$ et pour $z\in\mathbb{C}^n$, $\lambda\in[1,+\infty[$, $\mu\in\,]0,1]$, posons pour u

distribution à support compact, suivant [**19**], [**13**] :

$$T^2u(z,\lambda,\mu) = \int e^{-\frac{\lambda\mu^2}{2}(z'-x')^2 - \frac{\lambda x''^2}{2\mu^2} + i\lambda x''\cdot z''}\, u(x)\,dx \; . \tag{1.3}$$

On dit que T^2u est une transformation de FBI de deuxième espèce de u le long de $T^*_\Sigma\mathbf{R}^n$. Il existe toujours N entier et pour tout compact K de $\mathbf{C}^n$ une constante $C_K > 0$ telle que pour tout $z \in K$, tout $\lambda \in [1,+\infty[$, tout $\mu \in]0,1]$

$$\left|T^2u(z,\lambda,\mu)\right| \le C_K \lambda^N e^{\frac{\lambda\mu^2}{2}(\operatorname{Im} z)^2} \; . \tag{1.4}$$

Soit $(x_0\,;\xi_0) = (x'_0, 0\,; 0, \xi''_0)$ un point de $T^*_\Sigma\mathbf{R}^n\setminus 0$. On peut alors prouver ([**6**], [**7**]).

PROPOSITION 1.3. *Soit $u \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) *Il existe $s \in \mathbf{R}$ et $a(x,D)$ opérateur pseudo-différentiel elliptique en (x_0,ξ_0) tel que $a(x,D)u \in H^{s,+\infty}_\Sigma$.*

ii) *Le front d'onde de u est contenu dans $T^*_\Sigma\mathbf{R}^n$ près de (x_0,ξ_0) et il existe W voisinage de $\{z \in \mathbf{C}^n\,;\, \operatorname{Re} z = (x'_0, -\xi''_0),\ |\operatorname{Im} z| = 1\}$ dans $\mathbf{C}^n$, $\sigma \in \mathbf{R}$ et $\alpha > 0$ tels que $\forall N \in \mathbf{N}$ il existe $C_N > 0$ avec :*

$$\left|T^2u(z,\lambda,\mu)\right| \le C_N \lambda^\sigma (\lambda\mu^2)^{-N} e^{\frac{\lambda\mu^2}{2}(\operatorname{Im} z)^2} \tag{1.5}$$

pour tous $z \in W$, $\mu \in]0,\alpha[$ λ avec $\lambda\mu^2 \ge 1$.

La régularité conormale de u se lit donc sur la décroisance rapide en $\lambda\mu^2$ de $T^2u(z,\lambda,\mu)$ au voisinage de $(x'_0, -\xi''_0) + iS^{n-1}$ (S^{n-1} =sphère unité). L'idée de la deuxième microlocalisation de SJÖSTRAND ([**19**], [**13**], [**14**]) consiste à distinguer les points de S^{n-1} près desquels on a cette décroissance. Pour cela, munissons $\Lambda = T^*_\Sigma\mathbf{R}^n$ des coordonnées naturelles (x', ξ'') et $T^*\Lambda$ des coordonnées duales $(x', \xi''\,; x'^*, \xi''^*)$. Considérons l'identification de $T^*\Lambda$ à $\mathbf{C}^n$:

$$(x', \xi''\,; x'^*, \xi''^*) \to (x' - ix'^*, -\xi'' + i\xi''^*) \tag{1.6}$$

et posons :

DÉFINITION 1.4. On dit que le point $(x'_0, \xi''_0\,; x'^*_0, \xi''^*_0)$ de $T^*\Lambda$ n'est pas dans le deuxième front d'onde à croissance de u le long de Λ, $WF^{2,1}_\Lambda(u)$ s'il existe W voisinage de $(x'_0 - ix'^*_0, -\xi''_0 + i\xi''^*_0)$ dans $\mathbf{C}^n$, $\sigma \in \mathbf{R}$, $\alpha > 0$ et pour tout $N \in \mathbf{N}$ une constante $C_N > 0$ tels que :

$$\left|T^2u(z,\lambda,\mu)\right| \le C_N \lambda^\sigma (\lambda\mu^2)^{-N} e^{\frac{\lambda\mu^2}{2}(\operatorname{Im} z)^2} \tag{1.7}$$

pour tous $z \in W$, $\mu \in]0,\alpha[$, λ avec $\lambda\mu^2 \ge 1$.

L'ensemble $WF_\Lambda^{2,1}(u)$ est un fermé de $T^*\Lambda$ conique pour les deux homogénéités naturelles sur cet espace i.e. invariant pour tous $r_1 > 0$, $r_2 > 0$ sous l'action des applications :

$$(x', \xi''; x'^*, \xi''^*) \to (x', r_1\xi''; r_2 x'^*, r_1^{-1} r_2 \xi''^*) \ . \tag{1.8}$$

La proposition 1.3 signifie donc que u est conormale le long de Σ microlocalement en (x_0, ξ_0) si et seulement si $WF(u) \subset \Lambda$ près de (x_0, ξ_0) et la fibre de $WF_\Lambda^{2,1}(u)$ au-dessus des points de Λ voisins de (x_0, ξ_0) est contenue dans la section nulle.

L'importance de la conormalité dans l'étude des équations non-linéaires provient de la stabilité par opérations non linéaires des espaces de distributions conormales assez régulières. Cette étroite relation entre conormalité et stabilité par opérations non linéaires est éclairée par le résultat suivant de LEBEAU **[14]** :

THÉORÈME 1.5. *Soient N la sous-variété de $\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^{n'}_{x'} \times \mathbf{R}^{n''}_{x''}$ d'équations $x'' = 0$ et $\Lambda = T_N^*\mathbf{R}^n$. Considérons les projections définies en coordonnées locales par :*

$$\begin{aligned} \rho : T^*\mathbf{R}^n|_N &\to T^*N \\ (x', 0; \xi', \xi'') &\to (x', \xi') \\ \check{\rho} : T^*\Lambda \cap \{\xi''^* = 0\} &\to T^*N \\ (x', \xi''; x'^*, 0) &\to (x', x'^*) \ . \end{aligned} \tag{1.9}$$

Alors si $u \in H^s_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$ avec $s > \dfrac{n''}{2}$ on a :

$$WF(u|_N) \subset \rho\Big(WF(u)|_N\Big) \cup \check{\rho}\Big(WF_\Lambda^{2,1}(u) \cap \{\xi''^* = 0, \xi'' \neq 0\}\Big) \ . \tag{1.10}$$

Si l'on applique le résultat précédent avec $n' = n''$ et à une distribution de la forme $u(x', x'') = u_1(x')u_2(x' + x'')$ on voit donc que l'on obtient une estimation du front d'onde du produit des deux distributions assez régulières $u_1 \cdot u_2$ (l'hypothèse de régularité du Théorème 1.5 n'est pas satisfaite pour cet exemple mais elle peut être suffisamment affaiblie pour prendre en compte une telle distribution).

Si l'on veut de plus être capable d'étudier l'éventuel caractère conormal du produit $u_1 \cdot u_2$ le long d'une sous-variété Σ, il nous faut, d'après la Proposition 1.3 et la Définition 1.4 savoir majorer, par une formule analogue à (1.10), le deuxième front d'onde d'une trace. C'est ce que va nous permettre de faire la deuxième microlocalisation simultanée.

2. Deuxième microlocalisation simultanée

Nous allons donner la définition de la deuxième microlocalisation simultanée le long d'un couple de deux lagrangiennes conormales, par souci de simplification, puis nous signalerons l'extension immédiate au cas d'un $p-$uple de lagrangiennes, qui est celle dont nous aurons besoin au paragraphe 3.

Soient M_0, M_1 deux ouverts de $\mathbb{R}^{n_0}$, $\mathbb{R}^{n_1}$ munis de coordonnées x_0, x_1. On se donne Σ_j $j = 0,1$ sous-variété lisse de M_j. On suppose que x_j s'écrit (x'_j, x''_j) avec Σ_j d'équations $x''_j = 0$. On note $\Lambda_j = T^*_{\Sigma_j} M_j$ $j = 0,1$ et on introduit pour u distribution à support compact sur $M_0 \times M_1$ la transformation :

$$(2.1) \quad \widetilde{T}^2 u(z_0, z_1, \lambda_0, \lambda_1, \mu_0, \mu_1) = \int e^{-\frac{\lambda_0 \mu_0^2}{2}(z'_0 - x'_0)^2 - \frac{\lambda_0 x''^2_0}{2\mu_0^2} + i\lambda_0 x''_0 \cdot z''_0} \times e^{-\frac{\lambda_1 \mu_1^2}{2}(z'_1 - x'_1)^2 - \frac{\lambda_1 x''^2_1}{2\mu_1^2} + i\lambda_1 x''_1 \cdot z''_1} \times u(x_0, x_1)\, dx_0\, dx_1$$

où $z_j = (z'_j, z''_j) \in \mathbb{C}^{n_j} = \mathbb{C}^{n'_j} \times \mathbb{C}^{n''_j}$, $\lambda_j \in [1, +\infty[$, $\mu_j \in]0,1]$ $j = 0,1$.

Il s'agit donc du produit tensoriel de deux transformations de la forme (1.3) par rapport aux deux groupes de variables x_0, x_1. Il existe un entier N_0 et pour tout compact K de $\mathbb{C}^{n_0} \times \mathbb{C}^{n_1}$ une constante $C > 0$ tels que si (z_0, z_1) reste dans K :

$$(2.2) \quad \left|\widetilde{T}^2 u(z_0, z_1, \lambda_0, \lambda_1, \mu_0, \mu_1)\right| \leq \leq C(\lambda_0 \lambda_1)^{N_0} e^{\frac{\lambda_0 \mu_0^2}{2}(\operatorname{Im} z_0)^2 + \frac{\lambda_1 \mu_1^2}{2}(\operatorname{Im} z_1)^2} .$$

Remarquons alors que si l'on restreint $\widetilde{T}^2 u$ à la sous-variété de l'espace des $(\lambda_0, \lambda_1, \mu_0, \mu_1)$ d'équations $\lambda_0 \mu_0^2 = \lambda_1 \mu_1^2$, on obtient une majoration en $e^{\frac{\lambda'}{2}[(\operatorname{Im} z_0)^2 + (\operatorname{Im} z_1)^2]}$ si λ' désigne la valeur commune à $\lambda_0 \mu_0^2$ et $\lambda_1 \mu_1^2$. On pose :

DÉFINITION 2.1. On appelle transformation de FBI de deuxième espèce simultanée associée à (Λ_0, Λ_1) l'application qui à u associe :

$$(2.3) \quad T^2 u(z_0, z_1, \lambda', \mu_0, \mu_1) = \widetilde{T}^2 u(z_0, z_1, \lambda_0, \lambda_1, \mu_0, \mu_1)\Big|_{\lambda_0 \mu_0^2 = \lambda_1 \mu_1^2 = \lambda'} .$$

D'après (2.2), pour u distribution à support compact on a une estimation de la forme :

$$(2.4) \quad \left|T^2 u(z_0, z_1, \lambda', \mu_0, \mu_1)\right| \leq C \lambda'^{2N_0} \mu_0^{-4N_0} e^{\frac{\lambda'}{2}[(\operatorname{Im} z_0)^2 + (\operatorname{Im} z_1)^2]}$$

et nous alons définir le deuxième front d'onde simultané à partir des points où l'on a décroissance rapide par rapport au paramètre λ'.

Munissons Λ_j des coordonnées naturelles (x'_j, ξ''_j) et $T^*\Lambda_j$ des coordonnées duales $(x'_j, \xi''_j\,; x'^*_j, \xi''^*_j)$. Considérons les identifications :

$$\begin{aligned} \kappa_j \,:\, T^*\Lambda_j &\to \mathbb{C}^{n_j} \\ (x'_j, \xi''_j\,; x'^*_j, \xi''^*_j) &\to (x'_j - i\,x'^*_j, -\xi''_j + i\,\xi''^*_j) \end{aligned} \tag{2.5}$$

et posons :

DÉFINITION 2.2. On dit qu'un point $(q_0, q_1) \in T^*\Lambda_0 \times T^*\Lambda_1$ n'est pas dans le deuxième front d'onde simultané de la distribution à support compact u le long de (Λ_0, Λ_1), $WF^{2,1}_{(\Lambda_0,\Lambda_1)}(u)$ s'il existe W voisinage de $(\kappa_0(q_0), \kappa_1(q_1))$ dans $\mathbb{C}^{n_0} \times \mathbb{C}^{n_1}$, des réels σ_0, σ_1 et $\alpha > 0$ tels que pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe $C_N > 0$ avec :

$$\left|T^2 u(z_0, z_1, \lambda', \mu_0, \mu_1)\right| \leq C_N\, \lambda'^{-N} \mu_0^{-\sigma_0}\, \mu_1^{-\sigma_1}\, e^{\frac{\lambda'}{2}\left[(\operatorname{Im} z_0)^2 + (\operatorname{Im} z_1)^2\right]} \tag{2.6}$$

pour tous $(z_0, z_1) \in W$, $(\mu_0, \mu_1) \in]0, \alpha[^2$, $\lambda' \geq 1$.

REMARQUES.

• On peut montrer que l'ensemble précédent est intrinsèquement défini comme partie de $T^*\Lambda_0 \times T^*\Lambda_1$ i.e. est invariant par les changements de coordonnées sur cet ensemble provenant d'un produit de changements de coordonnées sur M_0 et M_1.

• Le deuxième front d'onde simultané est un fermé de $T^*\Lambda_0 \times T^*\Lambda_1$ conique pour les homogénéités suivantes (pour $r_0 > 0$, $r_1 > 0$, $r > 0$) :

$$\begin{aligned} &\Big((x'_0, \xi''_0\,; x'^*_0, \xi''^*_0), (x'_1, \xi''_1\,; x'^*_1, \xi''^*_1)\Big) \to \\ &\qquad \Big((x'_0, r_0\,\xi''_0\,; r\,x'^*_0, r\,r_0^{-1}\,\xi''^*_0), (x'_1, r_1\,\xi''_1\,; r\,x'^*_1, r\,r_1^{-1}\,\xi''^*_1)\Big)\,. \end{aligned} \tag{2.7}$$

• Si Λ_1 est la section nulle de T^*M_1 (i.e. si $\Sigma_1 = M_1$) le deuxième front d'onde simultané le long de (Λ_0, Λ_1) coïndice avec le deuxième front d'onde usuel le long du conormal à $\Sigma_0 \times M_1$ dans $M_0 \times M_1$. Si de plus $\Sigma_0 = M_0$, il coïndice avec le front d'onde.

L'intérêt du deuxième front d'onde simultané réside dans les estimations de deuxième front d'onde de traces qu'il permet d'obtenir. Soient N la sous-variété de $M_0 \times M_1$ donnée par $N = M_0 \times \Sigma_1$ et Σ la sous-variété de N donnée par $\Sigma = \Sigma_0 \times \Sigma_1$. On considère u une distribution à support compact sur $M_0 \times M_1$ qui est dans H^s avec $s > \dfrac{1}{2}\operatorname{codim} N$. On peut donc définir $u|_N$ et on se propose d'obtenir une majoration du même type que (1.10) pour $WF^{2,1}_\Lambda(u|_N)$ où $\Lambda = T^*_\Sigma N = T^*_{\Sigma_0} M_0 \times T^*_{\Sigma_1}\Sigma_1$ (en fait, pour donner un énoncé parfaitement intrinsèque, il faudrait plutôt dire que l'on va majorer le deuxième front d'onde simultané de $u|_N$ le long de $(T^*_{\Sigma_0} M_0, T^*_{\Sigma_1}\Sigma_1)$, ensemble qui d'après les remarques suivant la Définition 2.2 coïncide avec le deuxième front d'onde usuel le long de Λ). Munissons Λ de ses coordonnées naturelles (x'_0, x'_1, ξ''_0) et $T^*\Lambda$ des coordonnées duales $(x'_0, x'_1, \xi''_0\,; x'^*_0, x'^*_1, \xi''^*_0)$. Considérons les projections suivantes :

$$
\begin{aligned}
&\rho : T^*\Lambda_0 \times T^*M_1|_{\Sigma_1} \to T^*\Lambda \\
&\Big((x'_0, \xi''_0\,; x'^*_0, \xi''^*_0), (x'_1, 0\,; \xi'_1, \xi''_1)\Big) \to (x'_0, x'_1, \xi''_0\,; x'^*_0, \xi'_1, \xi''^*_0) \\
&\check{\rho} : T^*\Lambda_0 \times T^*\Lambda_1 \cap \{\xi''^*_1 = 0\} \to T^*\Lambda \\
&\Big((x'_0, \xi''_0\,; x'^*_0, \xi''^*_0), (x'_1, \xi''_1\,; x'^*_1, 0)\Big) \to (x'_0, x'_1, \xi''_0\,; x'^*_0, x'^*_1, \xi''^*_0)\ .
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

On a alors :

THÉORÈME 2.3. *Sous les hypothèses et avec les notations précédentes :*

$$
\begin{aligned}
WF^{2,1}_{\Lambda}(u|_N) \subset\ &\rho\Big(WF^{2,1}_{(\Lambda_0, T^*_{M_1} M_1)}(u)\Big|_{\Lambda_0\times\Sigma_1}\Big) \\
&\cup \check{\rho}\Big(WF^{2,1}_{(\Lambda_0,\Lambda_1)}(u) \cap \{\xi''^*_1 = 0, \xi''_1 \neq 0\}\Big)\ .
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

La preuve du théorème, pour laquelle nous renvoyons à [**5**], repose sur les mêmes idées que celle du Théorème 1.5 de [**14**]. L'intérêt de la majoration (2.9) est double. D'une part, elle permet d'obtenir des estimations de deuxième front d'onde de traces sans avoir à faire intervenir de microlocalisations d'ordre supérieur à 2. D'autre part, et ce sera le point fondamental pour les applications du paragraphe 3, la formule (2.9) montre que pour estimer $WF^{2,1}_{\Lambda}(u|_N)$ il nous suffit de connaître $WF^{2,1}_{(\Lambda_0,\Lambda_1)}(u)$ au-dessus des points $\Big((x'_0, 0\,; 0, \xi''_0), (x'_1, 0, 0, \xi''_1)\Big)$ de $\Lambda_0\times\Lambda_1$ avec $\xi''_1 \neq 0$. Or dans les applications, la distribution u s'écrira sous la forme $u = Q(x''_1, D_{x''_1})v(x_0, x_1)$ où v est une distribution pour laquelle on dispose de majorations géométriques du deuxième front d'onde et Q est un opérateur pseudo-différentiel par rapport aux seules variables x''_1. Mais microlocalement près des points de Λ_1 où $\xi''_1 \neq 0$, Q peut également être considéré comme un opérateur pseudo-différentiel par rapport à l'ensemble des variables $x_1 = (x'_1, x''_1)$ et comme on montre [**5**] qu'un tel opérateur est simultanément $2-$microlocal, on a :

PROPOSITION 2.4. *On a l'inclusion :*

$$
WF^{2,1}_{(\Lambda_0,\Lambda_1)}(u) \cap \{\xi''_1 \neq 0\} \subset WF^{2,1}_{(\Lambda_0,\Lambda_1)}(v)\ .
\tag{2.10}
$$

En fait nous aurons besoin dans la suite de l'extension du Théorème 2.3 et de la Proposition 2.4 au cas où u est une distribution $u(x_0, x_1, \dots, x_p)$ sur un produit $M_0 \times M_1 \times \dots \times M_p$. On se donne pour $j = 0, \dots, p$ une sous-variété $\Sigma_j = \{x''_j = 0\}$ de M_j et si on note $N = M_0 \times \Sigma_1 \times \dots \times \Sigma_p$ et $\Lambda = T^*_{\Sigma_0\times\Sigma_1\times\dots\times\Sigma_p} N$ on cherche à estimer $WF^{2,1}_{\Lambda}(u|_N)$. Pour cela, on est d'abord amené à définir un deuxième front d'onde simultané le long d'une famille de conormaux $(\Lambda_0, \dots, \Lambda_p)$ à l'aide d'une transformation définie comme (2.1), (2.3) mais à partir de $p+1$ facteurs au lieu de 2 (la transformée T^2u est alors fonction de $p+1$ variables complexes $(z_0, \dots, z_p)$, d'un grand paramètre λ' et de $p+1$ petits paramètres $\mu_0, \dots, \mu_p$).

On montre ensuite que $WF^{2,1}_{\Lambda}(u|_N)$ s'estime par une réunion d'ensembles indexée par toutes les familles de lagrangiennes $(\Lambda_0, \Lambda_1, \ldots, \Lambda_p)$ où $\Lambda_0 = T^*_{\Sigma_0} M_0$ et soit $\Lambda_j = T^*_{M_j} M_j$ soit $\Lambda_j = T^*_{\Sigma_j} M_j$ pour $j = 1, \ldots, p$. Le terme de cette réunion correspondant à $\Lambda_j = T^*_{M_j} M_j$ pour $j = 1, \ldots, q$, $\Lambda_j = T^*_{\Sigma_j} M_j$ pour $j = q+1, \ldots, p$ s'écrit :

$$R\Big(WF^{2,1}_{(\Lambda_0,\ldots,\Lambda_p)}(u) \cap \\ \Big\{x''_j = 0 \ j = 1, \ldots, q, \xi''^*_j = 0, \xi''_j \neq 0 \ j = q+1, \ldots, p\Big\}\Big) \tag{2.11}$$

où R est la projection de $T^*\Lambda_0 \times \ldots \times T^*\Lambda_p$ sur $T^*\Lambda_0 \times T^*\Sigma_1 \times \ldots \times T^*\Sigma_p$ donnée par l'identité sur le facteur d'ordre 0, par l'application :

$$(x'_j, 0, \xi'_j, \xi''_j) \to (x'_j, \xi'_j) \tag{2.12}$$

sur le facteur d'ordre $j = 1, \ldots, q$ et par :

$$(x'_j, \xi''_j ; x'^*_j, 0) \to (x'_j, x'^*_j) \tag{2.13}$$

sur le facteur d'ordre $j = q+1, \ldots, p$.

Le point important, dans (2.11) est le fait que $WF^{2,1}_{(\Lambda_0,\ldots,\Lambda_p)}(u)$ ne doit être connu qu'au dessus des points

$$((x'_0, 0 ; 0, \xi''_0), (x'_1, 0), \ldots, (x'_q, 0), (x'_{q+1}, 0, 0, \xi''_{q+1}), \ldots, (x'_p, 0 ; 0, \xi''_p))$$

de $\Lambda_0 \times \ldots \times \Lambda_p$ avec $\xi''_j \neq 0$ **pour tout** $j = q+1, \ldots, p$. Il en résulte, comme dans la Proposition 2.4, que (2.11) appliqué à une distribution de la forme :

$$u(x_0, \ldots, x_p) = \prod_{j=q+1}^{p} Q_j(x''_j, D_{x''_j}) v(x_0, \ldots, x_p) \tag{2.14}$$

avec $Q_j(x''_j, D_{x''_j})$ opérateur pseudo-différentiel C^∞ s'estime par (2.11) appliqué à v, toujours parce que Q_j peut être considéré comme un opérateur pseudo-différentiel par rapport à l'ensemble des variables $x_j = (x'_j, x''_j)$ pour tout $j = q+1, \ldots, p$, près des points considérés.

Ces remarques sont la clef des applications ci-dessous.

3. Applications

Front d'onde d'un produit de distributions conormales.

Considérons p sous-variétés analytiques réelles lisses de $\mathbb{R}^n$, $Z_1, \ldots, Z_p$ et pour tout $j = 1, \ldots, p$ soit $u_j \in H^{s,+\infty}_{Z_j}$ avec $s > \frac{n}{2}$. On se propose de majorer le front d'onde C^∞ du produit $u_1 \ldots u_p$ en termes géométriques à partir de Z_j. Pour cela, nous aurons beoin de la définition suivante qui généralise l'opération $\widehat{+}$ de KASHIWARA-SCHAPIRA [**11**], [**12**] :

DÉFINITION 3.1. Soient F_j $j = 1, \ldots, p$ des fermés $\mathbb{R}^*_+$-coniques d'un cotangent $T^*\mathbb{R}^N$. On pose :

$$\widehat{\sum_1^p} F_j = \Big\{ (x,\xi) \in T^*\mathbb{R}^N \text{ ; il existe des suites } (x_j^m, \xi_j^m)_m \text{ de } F_j \ j=1,\ldots,p \text{ et une suite } (x_0^m)_m \text{ de } \mathbb{R}^N \text{ telles que } x_j^m \to x \ j=0,\ldots,p,\ \xi_1^m + \ldots + \xi_p^m \to \xi \quad |x_j^m - x_0^m|\,|\xi_j^m| \to 0 \ j=1,\ldots,p \Big\}. \tag{3.1}$$

L'ensemble précédent décrit les interactions géométriques entre suites de points de $F_1, \ldots, F_p$. Bien que sa définition ait été donnée dans un système de coordonnées locales, il est immédiat que celle-ci est intrinsèque.

Notons pour $j = 1, \ldots, p$ $Z_j^{\mathbb{C}}$ la variété complexifiée de Z_j dans $\mathbb{C}^n$. Le résultat que nous avons en vue est le suivant :

THÉORÈME 3.2. *Sous les hypothèses précédentes :*

$$WF(u_1 \ldots u_p) \subset \Big(\widehat{\sum_1^p} T^*_{Z_j^{\mathbb{C}}} \mathbb{C}^n \cup T^*_{\mathbb{C}^n}\mathbb{C}^n \Big) \cap T^*\mathbb{R}^n . \tag{3.2}$$

REMARQUE. Si $p = 2$ le théorème résulte du Théorème 1.5. par la même méthode que ci-dessous, donc ne fait intervenir que la deuxième microlocalisation usuelle. Le cas général ne peut toutefois en découler par récurrence puisque (1.10) ne fournit qu'une majoration de $WF(u_1 \cdot u_2)$ et pas de renseignement précis sur le caractère conormal de $u_1 \cdot u_2$ le long de $Z_1 \cup Z_2$ (notion qui reste d'ailleurs à définir lorsque Z_1 et Z_2 sont en position relative quelconque).

Indiquons rapidement le principe de la preuve du Théorème 3.2. Notons δ la masse de Dirac en 0 sur $\mathbb{R}^n$ et écrivons pour $x_0 \in \mathbb{R}^n$:

$$(3.3) \quad u_1 \dots u_p(x_0) = \\ = \int \delta(x_0 - x_1') \dots \delta(x_0 - x_p') u_1(x_1') \dots u_p(x_p') dx_1' \dots dx_p' \ .$$

Il nous suffit donc de majorer le front d'onde de l'intégrant de (3.3) qui s'écrit :

$$(3.4) \qquad \prod_{j=1}^{p} \delta(x_0 - x_j') u_j(x_j' + x_j'')|_N$$

où N est la sous-variété de $M_0 \times \dots \times M_p = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{2n} \times \dots \times \mathbb{R}^{2n}$ muni des coordonnées $(x_0, x_1 = (x_1', x_1''), \dots, x_p = (x_p', x_p''))$ d'équations $x_1'' = \dots = x_p'' = 0$. En appliquant l'extension du Théorème 2.3 signalée à la fin du paragraphe précédent avec $\Sigma_0 = M_0$ (i.e. $\Lambda_0 = T^*_{M_0} M_0$) on obtient une majoration du front d'onde de (3.4) à l'aide d'expressions de la forme (2.11). Comme $u_j \in H^{s,+\infty}_{Z_j}$, il est aisé de voir qu'il existe pour tout j un opérateur pseudo-différentiel C^∞ $Q_j(x_j'', D_{x_j''})$ sur $\mathbb{R}^n$ tel que $u_j = Q_j \delta_{Z_j}$ où δ_{Z_j} est le courant d'intégration sur la variété Z_j. La distribution étudiée s'écrit donc $\prod_1^p Q_j(x_j'', D_{x_j''}) v$ avec :

$$(3.5) \qquad v = \prod_1^p \delta(x_0 - x_j') \prod_1^p \delta_{Z_j}(x_j' + x_j'') \ .$$

D'après la Proposition 2.4 et son extension à la deuxième microlocalisation simultanée le long d'une famille quelconque de lagrangiennes, les expressions (2.11) se contrôlent à partir des quantités analogues pour la distribution v donnée par (3.5) (cf. [**5**] pour les détails). Or, comme les Σ_j sont analytiques réelles, v est une distribution conormale **analytique** pour laquelle on peut obtenir des majorations géométriques du front d'onde ou des deuxième fronts d'ondes simultanés à l'aide des techniques de déformation de contour mises au point dans [**9**]. Ces estimations, combinées avec le raisonnement précédent, fournissent en dernier lieu l'inclusion (3.2).

REMARQUE. Le théorème 3.2 reste vrai lorsqu'on remplace le produit $u_1 \dots u_p$ par une expression de la forme $F(u_1, \dots, u_p)$ avec F fonction C^∞ de ses arguments. Cela découle du résultat de LEBEAU [**16**] affirmant que le front d'onde C^∞ de $F(u_1, \dots, u_p)$ est contenu dans l'adhérence de la réunion des fronts d'onde de tous les polynômes de $u_1, \dots, u_p$.

Il est permis de se demander dans quelle mesure l'estimation (3.2) est fine. On peut remarquer tout d'abord que d'après la Définition 3.1, l'ensemble $\overset{p}{\underset{1}{\hat{+}}} T^*_{Z_j^{\mathbb{C}}} \mathbb{C}^n$ est contenu dans la variété caractéristique de tout champ de vecteurs holomorphe à coefficients lipschitziens tangent à $Z_j^{\mathbb{C}}$ pour $j = 1, \ldots, p$.

D'autre part, le membre de droite de (3.2) est un ensemble "petit". Rappelons en effet que l'on dit qu'une partie sous-analytique de $T^*\mathbb{R}^n$ est isotrope si la forme de Liouville est nulle sur l'ouvert de ses points lisses. En particulier un ensemble isotrope est de codimension supérieure ou égale à n dans $T^*\mathbb{R}^n$. Or, on peut montrer (cf. [5]) :

THÉORÈME 3.3. *Le membre de droite de* (3.2) *est sous-analytique isotrope dans* $T^*\mathbb{R}^n$.

Conormalité des ondes semi-linéaires le long des caustiques.

Dans la première application ci-dessus, nous avons utilisé la deuxième microlocalisation simultanée pour étudier le front d'onde de traces de certaines distributions. Nous allons maintenant indiquer comment les résultats de majoration du deuxième front d'onde d'une trace du paragraphe 2 permettent d'étudier la conormalité des ondes semi-linéaires le long des caustiques.

Soient $P(t,x,Z)$ un polynôme en Z à coefficients C^∞ en $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ et soit $u \in H_{\mathrm{loc}}^{s+\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^{1+d})$ $s > \frac{d}{2}$ solution de l'équation des ondes semi-linéaire :

$$(3.6) \qquad \begin{cases} \Box u = P(t,x,u) \\ u|_{t=0} = u_0 \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = u_1 \end{cases}$$

où $u_0 \in H_{\mathrm{loc}}^s(\mathbb{R}^d)$, $u_1 \in H_{\mathrm{loc}}^{s-1}(\mathbb{R}^d)$ sont les données de Cauchy. On se donne V hypersurface analytique réelle de $\mathbb{R}^d$, lisse, et on suppose que $u_0 \in H_V^{s,+\infty}$, $u_1 \in H_V^{s-1,+\infty}$. Alors LEBEAU [15] a prouvé (cf. également [5] pour le cas où u_0, u_1 ne sont pas nécessairement classiques) que si $\mathcal{E}$ est un ensemble de suites de $T^*\mathbb{C}^{1+d}$ vérifiant un certain nombre de propriétés de stabilité par propagation et interaction et de compatibilité avec la variété V, le front d'onde C^∞ de u est contenu dans l'adhérence de l'ensemble des limites de sommes de points de $\mathcal{E}$.

De plus, en dimension $d = 2$ d'espace et dans le cas où V est une parabole, il a construit un tel ensemble pour lequel la majoration de $WF(u)$ obtenue est celle attendue. Précisément, si Q est la variété singulière projection sur $\mathbb{R}^3$ de la réunion des bicaractéristiques nulles de $\Box$ issues des points $\left\{(\tau,\xi) \in T^*\mathbb{R}^3 ; \tau^2 = \xi^2, (x,\xi) \in T_V^*\mathbb{R}^2\right\}$ et Γ le demi-cône d'avenir issu de l'unique point singulier de Q dans le futur, $WF(u) \cap \{t > 0\}$ est contenu dans la réunion des conormaux aux strates de la stratification naturelle de Q.

Les résultats du paragraphe 2 permettent d'étudier la conormalité de la solution u le long des points lisses de la caustique. Par souci de simplification, nous n'énoncerons le résultat que dans le cas de l'exemple ci-dessus.

PROPOSITION 3.4. *Soit u la solution du problème* (3.6) *en dimension $d = 2$ d'espace à données conormales le long de la parabole V. Soit Ω l'ouvert de $\{t > 0\}$ complémentaire des points singuliers de $Q \cup \Gamma$ et $\Sigma = \Omega \cap (Q \cup \Gamma)$ (Σ est donc une variété lisse). Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, $u|_\Omega \in H_\Sigma^{s-\varepsilon,+\infty}(\Omega)$.*

La preuve de la proposition est résumée dans [**7**] et détaillée dans [**6**]. Le point clef consiste à prouver que si $\Lambda = T_\Sigma^*\Omega$, $WF_\Lambda^{2,1}(u|_\Omega) = 0$. On montre cela en deux étapes. La première, suivant [**15**], consiste à voir que $WF_\Lambda^{2,1}(u|_\Omega)$ se contrôle à partir du deuxième front d'onde le long de Λ d'une famille de distributions explicites de la forme :

$$\prod_1^p e_+(x_0 - x_j')w_j(x_j') \tag{3.7}$$

où w_j est égale à u_0 ou à u_1 et où $e_+(\cdot)$ est la solution élémentaire de l'équation des ondes à support dans le futur. On doit donc majorer le deuxième front d'onde d'une distribution de la même forme que (3.4) que l'on écrit comme une trace :

$$\prod_1^p e_+(x_0 - x_j')w_j(x_j' + x_j'')|_N \tag{3.8}$$

N étant la sous-variété d'équations $x_1'' = \ldots = x_p'' = 0$. Utilisant le même raisonnement que dans la première application et le théorème 2.4 – étendu à un nombre quelconque de facteurs – avec $\Lambda_0 = T_\Sigma^*\mathbb{R}^3$, on se ramène à l'obtention d'une estimation pour une famille de deuxième fronts d'ondes simultanés de distributions conormales analytiques. Celle-ci, qui s'obtient par les méthodes de [**15**], [**9**] entraîne que $WF_\Lambda^{2,1}(u|_\Omega)$ est contenu dans la section nulle.

Signalons pour terminer que les résultats que nous avons rappelé ci-dessus concernant la majoration du front d'onde de la solution de (3.6) ont été étendus au cas d'un second membre de la forme $F(t, x, u, \nabla u)$ avec F fonction C^∞ de ses arguments (cf. [**16**]).

Bibliographie

[1] M. BEALS, *Singularities in solutions to nonlinear hyperbolic problems,* Preprint, Rutgers University, à paraître dans Progress in Mathematics, Birkhaüser.

[2] J-M. BONY, *Interaction des singularités pour les équations aux dérivées partielles non-linéaires,* Séminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz, Exp. n° 2, **(1981-82)**, *Interaction des singularités pour les équations de Klein-Gordon non-linéaires,* Séminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz, Exp. n° 10, **(1983-84)**.

[3] J-M. BONY, *Second microlocalization and propagation of singularities for semi-linear hyperbolic equations,* Proceedings of the International Taniguchi Symposium HERT, Kotaka and Tokyo, **1984**, Academic-Press, 11-49.

[4] J-Y. CHEMIN, *Interaction de trois ondes dans les équations semi-linéaires strictement hyperboliques d'ordre 2,* Comm. in P.D.E, 12 **(1987)**, 1203-1255.

[5] J-M. DELORT, *Deuxième microlocalisation simultanée et front d'onde de produits,* Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 4ème série, t. 23, **(1990)**.

[6] J-M. DELORT, *Conormalité des ondes semi-linéaires le long des caustiques,* à paraître in : Amer. Jour. of Math.

[7] J-M. DELORT, *Conormalité des ondes semi-linéaires le long des caustiques,* Séminaire Equations aux dérivées partielles, Ecole Polytechnique, Exp. n° 15, **(1988-89)**.

[8] J-M. DELORT, *Transformation de FBI, deuxième microlocalisation et caustiques semi-linéaires,* Cours de troisième cycle, Preprint, 127 p.

[9] J-M. DELORT et G. LEBEAU, *Microfonctions I-Lagrangiennes,* J. Math. Pures et Appl. 67, **(1988)**, 39-84.

[10] P. GÉRARD, *Moyennisation et régularité 2-microlocale,* Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 4ème série, t. 23, **(1990)**.

[11] M. KASHIWARA et P. SCHAPIRA, *Microlocal study of sheaves,* Astérisque 128, **(1985)**.

[12] M. KASHIWARA et P. SCHAPIRA, *Sheaves on manifolds,* Springer, à paraître.

[13] G. LEBEAU, *Deuxième microlocalisation sur les sous-variétés isotropes,* Ann. Inst. Fourier Grenoble, 35, 2, **(1985)**, 145-216.

[14] G. LEBEAU, *Deuxième microlocalisation à croissance,* Séminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz, Exp. n° 15, **(1982-83)**.

[15] G. LEBEAU, *Equation des ondes semi-linéaires II. Contrôle des singularités et caustiques non-linéaires,* Inv. Math., 95, **(1989)**, 277-323.

[16] G. LEBEAU, *Front d'onde des fonctions non linéaires et polynômes,* Séminaire Equations aux dérivées partielles, Ecole Polytechnique, Exp. n° 10, **(1988-89)**.

[17] R. MELROSE et N. RITTER, *Interaction of non linear progressing waves,* Annals of Math. 121, **(1985)**, 187-213.

[18] R. MELROSE et N. RITTER, *Interaction of progressing waves for semi-linear wave equations II,* Arkiv för Math., **(1987)**, 91-114.

[19] J. SJÖSTRAND, *Singularités analytiques microlocales,* Astérisque 95, **(1982)**.