JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

JEAN-MICHEL BONY

Problème de Cauchy et diffusion à données petites pour les modèles discrets de la cinétique des gaz

Journées Équations aux dérivées partielles (1990), p. 1-12
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1990____A1_0>

PROBLÈME DE CAUCHY ET DIFFUSION À DONNÉES PETITES POUR LES MODÈLES DISCRETS DE LA CINÉTIQUE DES GAZ

Jean-Michel Bony

Centre de Mathématiques, École Polytechnique
91128 Palaiseau Cedex

1 Introduction

Nous nous intéresserons à des systèmes hyperboliques non-linéaires du type suivant

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + C_i \cdot \nabla u_i = Q_i(u) \tag{1}$$

où I est un ensemble *fini*, où les $(C_i)_{i\in I}$ sont des vecteurs *distincts* de $\mathbf{R}^n$, où les composantes $u_i(t,x)$ de $u(t,x)$ sont des fonctions définies dans l'espace-temps $\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}^n_x$, et où ∇ désigne le gradient par rapport aux variables d'espace.

Le terme d'interaction non linéaire figurant au membre de droite sera supposé quadratique, et plus précisément de la forme suivante

$$Q_i(u) = \sum_{j,k\in I} B_i^{jk} u_j u_k \tag{2}$$

où les B_i^{jk} sont des nombres réels quelconques assujettis à la seule condition

$$B_i^{jk} \neq 0 \Rightarrow j \neq k\ . \tag{3}$$

Nous allons montrer, en renvoyant partiellement à notre article [4], que pour des données $f = \big(f_i(t,x)\big)$ assez petites, la solution du problème de Cauchy défini par (1) (2) et les conditions initiales

$$u_i(0,x) = f_i(x) \tag{4}$$

existe et est bornée globalement dans l'espace temps $\mathbf{R}^{n+1}$ (théorème 2.4). Un point nouveau est le théorème 3.1 qui exprime la continuité uniforme en t des opérateurs G_t qui transforment les données à l'instant 0 en les données à l'instant t. Cela nous permettra dans la section 4 de préciser le comportement asymptotique en introduisant et étudiant les opérateurs d'onde et de diffusion (scattering).

Sans être strictement nécessaires, les conditions (3) d'une part sont vérifiées par les modèles du type ci-dessous, et d'autre part écartent des systèmes du type $\partial u/\partial t = u^2$ ou bien du type $\partial u/\partial t + \partial u/\partial x_1 = v^2$, $\partial v/\partial t - \partial v/\partial x_1 = u^2$, pour lesquels il est facile de voir que le problème de Cauchy, même à données très petites, n'a pas de solution globale en général.

Le principal intérêt des systèmes (1) (2) est qu'ils contiennent les modèles à répartition discrète de vitesses de la cinétique des gaz (voir [8] [5]). On suppose dans ceux-ci que les molécules ne peuvent prendre qu'un nombre fini de vitesses $(C_i)_{i\in I}$. La fonction $u_i(t,x)$ représente la densité, au point x et à l'instant t, des molécules animées de la vitesse C_i.

L'équation (1) avec second membre nul représenterait alors l'équation de transport d'un tel système en l'absence d'interactions. En supposant que les seules interactions sont binaires et à distance nulle, on obtient des termes d'interaction du type suivant

$$Q_i(u) = \sum_{j,k,l\in I} \left(A_{ij}^{kl} u_k u_l - A_{kl}^{ij} u_i u_j \right) , \tag{5}$$

où les coefficients d'interaction A_{ij}^{kl} sont ≥ 0 et vérifient un certain nombre de conditions de symétrie et de lois de conservation dont on trouvera une discussion détaillée dans [8]. Il nous suffira de savoir ici que les coefficients A_{ij}^{kk} sont nuls (les particules d'une vitesse donnée n'interagissent pas entre elles), et que les Q_i, mis sous la forme (2) vérifient donc (3). Bien entendu, il s'agit de systèmes possédant des propriétés supplémentaires : conservation de la positivité dans le futur, conservation de la masse et, selon les hypothèses faites sur les A_{ij}^{kl}, conservation d'autres quantités, croissance de l'entropie, ...

Nous avons rappelé dans [4] l'existence d'une littérature abondante consacrée à des systèmes particuliers ou au cas de la dimension 1 (voir [1] [2] [3] [5] [12] [13] [14] [15]... et les références qui y figurent). Nous y avons également montré que les deux articles bien connus de Illner [10] et de Hamdache [9] ne fournissent en fait une réponse effective au problème de Cauchy à données petites que pour des systèmes extrêmement particuliers.

2 Problème de Cauchy

Les concepts suivants, liés à la géométrie des caractéristiques de l'équation (1) nous permettront d'exprimer la petitesse des données de Cauchy dans l'espace, et celle des termes d'interaction dans l'espace-temps. Dans toute la suite, l'expression *p-plan* signifiera *sous-variété affine de dimension p.*

Définition 2.1 *Pour $i \in I$, on notera D_i le vecteur de $\mathbf{R}^{n+1}$ dont les composantes sont $(1, C_i)$.*
(a) *Nous dirons qu'un p-plan Π de $\mathbf{R}^{n+1}$, pour $p = 1, \ldots, n+1$, est* caractéristique *s'il existe p vecteurs linéairement indépendants parmi les D_i qui soient parallèles à Π.*
(b) *Nous dirons qu'un p-plan π de $\mathbf{R}^n$, pour $p = 0, \ldots, n$ est* de type trace *s'il est l'intersection de $\{t = 0\}$ avec un $(p+1)$-plan caractéristique. Il est équivalent de dire qu'il existe $p+1$ indices $i_0, \ldots, i_p$ tels que les vecteurs $C_{i_1} - C_{i_0}, \ldots , C_{i_p} - C_{i_0}$ soient linéairement indépendants et parallèles à π.*
(c) *Pour chaque (direction de) p-plan de type trace π, nous noterons $J(\pi)$ le sous-ensemble de I constitué des i tels qu'il existe un $(p+1)$-plan caractéristique Π s'appuyant sur π avec D_i parallèle à Π.*

Ce sont les normes $\mathcal{N}_p$ ci-dessous qui mesureront la taille des fonctions définies dans l'espace.

Définition 2.2 *Soit* $f = \left(f_i(x)\right)_{i\in I}$ *une (classe de) fonction mesurable dans* $\mathbf{R}^n$. *Pour* $p = 0, \dots, n$, *on pose*

$$\mathcal{N}_p(f) = \sup_{i\in J(\pi)} \sup \text{ess} \left\{ \int_\pi |f_i(x)| \, d^p x \;\middle|\; \pi \text{ } p\text{-plan de type trace} \right\}$$

On notera $\mathcal{E}$ *l'espace de Banach constitué des* f *pour lesquels on a* $\mathcal{N}_p(f) < \infty$, $p = 0, 1, \dots, n$.

Nous avons noté $d^p x$ la mesure de Lebesgue p-dimensionnelle sur le p-plan π. Il n'existe qu'un nombre fini de directions de p-plans de type trace, et pour chacune de celles-ci, les intégrales du membre de droite dépendent d'un paramètre $(n-p)$-dimensionnel (un point d'un $(n-p)$-plan transverse), ce qui donne un sens clair aux bornes supérieures essentielles.

Remarque **2.3** On voit facilement que la norme $\mathcal{N}_0(f)$ est équivalente à la norme $\sum \|f_i\|_{L^\infty}$. En effet, un point quelconque $m \in \mathbf{R}^n$ est un 0-plan de type trace et on a $J(m) = I$.

D'autre part, sous l'hypothèse suivante

$$\textit{Les vecteurs } D_i \textit{ engendrent } \mathbf{R}^{n+1} \quad , \tag{6}$$

le n-plan $\mathbf{R}^n$ est de type trace, avec $J(\mathbf{R}^n) = I$ et $\mathcal{N}_n(f)$ est équivalente à $\sum \|f_i\|_{L^1}$. Il nous sera commode de supposer (6) à partir de la section 4. Il s'agit d'une part d'une hypothèse plus que raisonnable d'un point de vue physique. D'autre part, lorsqu'elle n'est pas réalisée, on peut faire un changement de coordonnées linéaires dans l'espace-temps : $\mathbf{R}^{n+1} = \mathbf{R}_t \times \mathbf{R}^p_y \times \mathbf{R}^q_z$ de telle sorte que les D_i appartiennent à (et engendrent) $\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}^p_y$. On est alors ramené, pour chaque valeur du paramètre z, au cas précédent.

Les normes intermédiaires, pour $1 \le p \le n-1$ sont des sommes de normes $L^\infty(\mathbf{R}^{n-p}; L^1(\mathbf{R}^p))$ de certains des f_i, pour des coordonnées identifiant un p-plan de type trace à $\mathbf{R}^p$. Pour le modèle de Broadwell, elles apparaissent explicitement dans [12] [10], et Illner [11] a montré que la petitesse des normes L^1 et L^∞ n'est pas suffisante, même pour ce modèle très simple, pour obtenir l'existence de solutions globalement bornées.

Théorème 2.4 *Sous l'hypothèse (3), il existe des constantes* δ_0 *et* C, *ne dépendant que des* C_i *et des* B_i^{jk} *telle que, si les données de Cauchy* $f_i \in L^\infty(\mathbf{R}^n)$ *vérifient* $\mathcal{N}_p(f) \le \delta_0$ *pour* $p = 0, \dots, n$, *le problème (1) (2) (4) possède une unique solution définie et bornée dans* $\mathbf{R}^{n+1}$ *entier.*

On a en outre, en notant u^T *la trace de la solution sur l'hyperplan* $\{t = T\}$

$$\sup_T \sup_{0\le p\le n} \mathcal{N}_p(u^T) \le C \sup_{0\le p\le n} \mathcal{N}_p(f) \tag{7}$$

et, pour tout p*-plan caractéristique* Π,

$$\int_\Pi |Q_i(u)| \le C \left(\sup_{0\le p\le n} \mathcal{N}_p(f) \right)^2 . \tag{8}$$

On remarquera que les hypothèses de notre théorème sont satisfaites si, pour un $s > n/2$, les $\|f_i\|_{H^s}$ (ou bien les $\|(1+|x|)^{2s} f_i(x)\|_{L^\infty}$) sont assez petits. Nous renvoyons à [4] pour la démonstration de ce théorème, en nous bornant à en rappeler les principaux ingrédients.

1. Un théorème d'existence locale bien connu assurant que, pour des données de Cauchy f appartenant à L^∞, il existe une unique solution u définie dans $[-\theta, \theta] \times \mathbf{R}^n$, avec $\theta = \mathrm{C^{te}}\,\|f\|_{L^\infty}^{-1}$ vérifiant $\|u\|_{L^\infty} \leq \mathrm{C^{te}}\,\|f\|_{L^\infty}$. Une conséquence classique est qu'une solution définie et bornée dans $[0, T[\, \times \mathbf{R}^n$ peut se prolonger en une solution bornée dans $[0, T'[\, \times \mathbf{R}^n$ pour un $T' > T$.

2. Le fait, également bien connu, que si des données de Cauchy uniformément bornées convergent en norme L^q sur tout compact pour un (et donc tout) $q < \infty$, les solutions correspondantes convergent également en norme L^q sur tout compact dans le domaine d'existence commun fourni par le théorème précédent.

3. Un lemme, dont l'utilisation dans ce type de problèmes est due à Kawashima [12], assurant que pour une fonction $f(t)$ continue positive définie sur un intervalle J contenant l'origine, vérifiant $f(0) = 0$ et

$$f(t) \leq C\big(\varepsilon + f(t)\big)^2 , \tag{9}$$

Il existe des constante $\varepsilon_0 > 0$ et K, ne dépendant que de C, telles que, pour $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, l'estimation (9) entraîne $f(t) \leq K\varepsilon^2$.

4. L'estimation fondamentale énoncée dans le théorème suivant, dont les idées de la démonstration seront reprises dans celle du théorème 3.1 ci-dessous.

Théorème 2.5 *Soit u une solution continue, définie sur $[0, T] \times \mathbf{R}^n$, du problème de Cauchy (1) (2) (4), les données de Cauchy étant continues et à support compact dans $\mathbf{R}^n$. Il existe une constante C, ne dépendant que des C_i et B_i^{jk} (et en particulier indépendante de T) telle que, en posant pour $p = 1, \ldots n$*

$$M_p(T) = \sup_{i \neq j} \sup \left\{ \int_{\Pi \cap ([0,T] \times \mathbf{R}^n)} |u_i(P) u_j(P)| \; d^p P \;\middle|\; \Pi \text{ } p\text{-plan caractéristique} \right\} \tag{10}$$

on ait

$$\sup_{p=1}^{n+1} M_p(T) \leq C \left(\sup_{p=0}^{n} \mathcal{N}_p(f) + \sup_{p=1}^{n+1} M_p(T) \right)^2 \tag{11}$$

Un argument classique permet alors de conclure. On peut d'abord se ramener, grâce au point 2, au cas où les f_i sont continues à support compact. On introduit ensuite T^* égal à la borne supérieure des T tels qu'il existe une solution bornée dans $[0, T] \times \mathbf{R}^n$. Les arguments 4 et 3 ci dessus entraînent que les $M_p(T)$ sont majorés uniformément lorsque T parcourt $[0, T^*[$, pourvu que les $\mathcal{N}_p(f)$ soient assez petits. En intégrant le long des caractéristiques, les intégrales des termes d'interaction étant majorées en module par les $M_p(T)$, il en résulte que les $\mathcal{N}_p(u^T)$, et en particulier la norme uniforme des u^T, sont majorés uniformément en T. L'argument 1 entraîne alors que l'on ne peut pas avoir $T^* < \infty$, ce qui achève la démonstration.

Corollaire 2.6 *Il existe un voisinage ouvert Ω de l'origine dans $\mathcal{E}$ et un groupe à un paramètre G_t d'applications continues de Ω dans lui-même tels que, pour $f \in \Omega$, la solution du problème de Cauchy (1) (2) (4) soit donnée par $u(t,x) = G_t f(x)$.*

Il suffit en effet, les constantes C et δ_0 étant celles du théorème 2.4, et l'espace $\mathcal{E}$ étant muni de la norme $\|f\|_{\mathcal{E}} = \sup \mathcal{N}_p(f)$ de définir $G_t f$, pour f appartenant à la boule ouverte B_{δ_0} de rayon δ_0 de l'espace $\mathcal{E}$, comme étant la valeur à l'instant t de l'unique solution du problème de Cauchy associé à f. On pose alors $\Omega = \bigcup_{t \in \mathbf{R}} G_t(B_{\delta_0/C})$. La loi de groupe résulte de l'unicité, il est clair que Ω est contenu dans B_{δ_0} et est stable par les G_t. Enfin, le fait que Ω soit ouvert résulte de la continuité des G_t (conséquence facile du théorème d'existence locale, qui fournit la continuité des G_t pour t petit, et de la loi de groupe) qui sera (re)démontrée, avec uniformité en t, dans la section suivante.

2.7 Régularité des solutions

Il est facile de voir que si f possède des régularités supplémentaires, il en est de même de $G_t f$. Si $\mathcal{A}$ est une algèbre de Banach invariante par translation, contenue dans L^∞ et telle que l'on ait

$$\|a_1 a_2\|_{\mathcal{A}} \leq \mathrm{C^{te}} \left\{\|a_1\|_{\mathcal{A}} \|a_2\|_{L^\infty} + \|a_1\|_{L^\infty} \|a_2\|_{\mathcal{A}}\right\} ,$$

on obtient facilement un théorème d'existence locale dans $\mathcal{A}$, en supposant les f_i dans ce même espace, avec un temps d'existence ne dépendant que de la norme des f_i dans L^∞. Au cours de l'évolution, la solution ne pourrait cesser d'appartenir à $\mathcal{A}$ que si sa norme dans L^∞ tendait vers $+\infty$, ce qui n'est pas. Les espaces C^k ($k = 0, 1, \ldots$), les espaces de Hölder, les espaces $L^\infty \cap H^s$, ... rentrent dans ce cadre. En conséquence, si les f_i sont de classe C^∞, il en est de même de la solution.

3 Estimation uniforme des opérateurs G_t

Nous allons montrer que, dans un voisinage de l'origine dans l'espace $\mathcal{E}$, les opérateurs G_t sont lipschitziens, avec une constante de Lipschitz indépendante de t.

Théorème 3.1 *Il existe $\delta > 0$ et $C > 0$ tels que, pour f et g vérifiant $\|f\|_{\mathcal{E}} \leq \delta$ et $\|g\|_{\mathcal{E}} \leq \delta$, on ait*

$$\sum_0^n \mathcal{N}_p\left(G_t f - G_t g\right) \leq C \sum_0^n \mathcal{N}_p\left(f - g\right) \tag{12}$$

Là encore, il suffit de démontrer le théorème pour des données de Cauchy continues à support compact. On peut en effet approcher f et g par de telles données f^ν et g^ν de telle sorte que (voir [4] §2) l'on ait $\mathcal{N}_p\left(f^\nu - g^\nu\right) \leq \mathcal{N}_p\left(f - g\right)$, et que les $G_t f^\nu$ convergent vers $G_t f$ dans $L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^n)$ et donc, quitte à extraire une sous suite, presque partout. Les normes $\mathcal{N}_p$ n'étant autres que des sommes de normes dans $L^\infty(\mathbf{R}^{n-p}; L^1(\mathbf{R}^p))$, il résulte du lemme de Fatou que l'on a

$$\mathcal{N}_p\left(G_t f - G_t g\right) \leq \liminf \mathcal{N}_p\left(G_t f^\nu - G_t g^\nu\right) ,$$

et le résultat supposé établi pour les f^ν et g^ν entraîne donc le cas général.

Nous noterons $u(t,x)$ et $v(t,x)$ les solutions associées à f et g. Comme dans (10) mais pour t appartenant à $\mathbf{R}$ entier, nous introduisons les quantités suivantes, destinées à majorer les termes d'interaction, et dont nous savons déjà qu'elles sont finies

$$M_p = \sup_{i \neq j} \sup \left\{ \int_\Pi |u_i(P) u_j(P)| \; d^p P \;\middle|\; \Pi \;\; p\text{-plan caractéristique} \right\} .$$

Nous noterons $\tilde{M}_p$ les quantités analogues relatives à v et nous poserons enfin

$$m_p = \sup_{i \neq j} \sup \left\{ \int_\Pi |u_i(P) u_j(P) - v_i(P) v_j(P)| \; d^p P \;\middle|\; \Pi \;\; p\text{-plan caractéristique} \right\} .$$

Le point essentiel est le lemme suivant

Lemme 3.2 *Il existe des constantes C_1 et C_2 telles que, pour $\|f\|_{\mathcal{E}} \leq \delta$ et $\|g\|_{\mathcal{E}} \leq \delta$ avec δ assez petit, on ait*

$$\sum_{p=1}^{n+1} m_p \leq C_1 \delta \sum_{p=0}^{n} \mathcal{N}_p\left(f - g\right) + C_2 \delta \sum_{p=1}^{n+1} m_p . \tag{13}$$

Il est facile de voir que le théorème 3.1 en résulte. En choisissant $\delta < 1/(2C_2)$, on obtient une estimation des m_p par les normes de $f - g$ dans $\mathcal{E}$. Il reste à démontrer (12). Soit donc π_T un p-plan de type trace de $t = T$, et $i \in J(\pi)$. Soit Π le $(p+1)$-plan caractéristique s'appuyant sur π_T et parallèle à C_i, et soit π_0 l'intersection de celui-ci avec $t = 0$. On a alors, par intégration le long des caractéristiques

$$\begin{aligned} \int_{\pi_T} |u_i(T,x) - v_i(T,x)| \; d^p x \leq & \int_{\pi_0} |u_i(0,x) - v_i(0,x)| \; d^p x \\ & + \int_{\Pi \cap ([0,T] \times \mathbf{R}^n)} |Q_i(u)(z) - Q_i(v)(z)| \; d^{p+1} z \end{aligned}$$

et donc, avec des constantes indépendantes de δ (assez petit) et de T,

$$\mathcal{N}_p(G_T u - G_T v) \leq \mathcal{N}_p(f - g) + \mathrm{C^{te}} m_{p+1} \leq (1 + \mathrm{C^{te}}\delta) \|f - g\|_{\mathcal{E}} .$$

Cela achève la démonstration du théorème.

3.3 *Démonstration du lemme 3.2*

Rappelons que, d'après le théorème 2.5, nous avons $M_p + \tilde{M}_p \leq \mathrm{C^{te}}\delta^2$. Notre objectif est d'estimer, pour un p-plan caractéristique Π,

$$\int_\Pi |u_i(P) u_j(P) - v_i(P) v_j(P)| \; d^p P \tag{14}$$

par le membre de droite de (13), sous l'hypothèse $i \neq j$ et donc $C_i \neq C_j$. En appelant N_i l'intersection de la droite caractéristique parallèle à D_i passant par P et de $\{t = 0\}$, on peut majorer $|u_i(P)|$ par la somme de $|f_i(N_i)|$ et de l'intégrale de $|Q_i|$ sur le segment N_iP, et les termes $|u_i(P) - v_i(P)|$ peuvent s'estimer de même. Le terme (14) peut donc s'estimer (à des constantes ne dépendant que des coefficients d'interaction près) par des intégrales des types suivants.

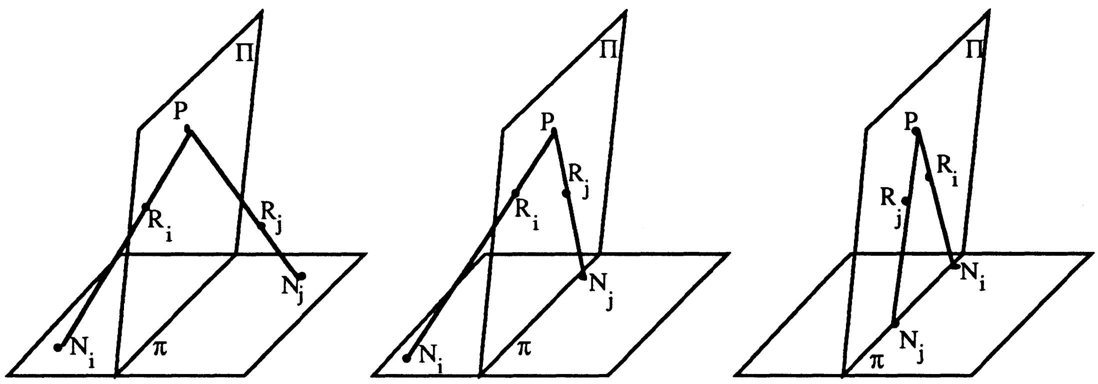
$$A = \int_{P\in\Pi} |f_i(N_i) - g_i(N_i)|\, |f_j(N_j) + g_j(N_j)|\, d^pP\,, \tag{15}$$

$$B_1 = \int_{P\in\Pi\,,\, R_i\in N_iP} |u_\alpha(R_i)u_\beta(R_i) - v_\alpha(R_i)v_\beta(R_i)|\, |f_j(N_j) + g_j(N_j)|\, d^pP\, dR_i\,, \tag{16}$$

$$B_2 = \int_{P\in\Pi\,,\, R_i\in N_iP} |u_\alpha(R_i)u_\beta(R_i) + v_\alpha(R_i)v_\beta(R_i)|\, |f_j(N_j) - g_j(N_j)|\, d^pP\, dR_i\,, \tag{17}$$

$$C = \int_{P\in\Pi, R_i\in N_iP, R_j\in N_jP} |u_\alpha(R_i)u_\beta(R_i) + v_\alpha(R_i)v_\beta(R_i)|\, |u_\lambda(R_j)u_\mu(R_j) - v_\lambda(R_j)v_\mu(R_j)|\, d^pP\, dR_i\, dR_j \tag{18}$$

où on a $\alpha \neq \beta$ et $\lambda \neq \mu$. Nous noterons π l'intersection de Π et de $\{t = 0\}$. Il s'agit d'un $(p-1)$ plan de type trace, et on a $k \in J(\pi)$ dès que D_k est parallèle à Π. Nous devrons considérer divers cas de figure, selon que les D_i, D_j sont ou non parallèles à Π.



3.4 *Estimation des intégrales p-uples (15).*

Si D_i n'est pas parallèle à Π, le point N_i parcourt un p-plan de type trace π_1 (vérifiant $i \in J(\pi_1)$) et peut servir à paramétrer le domaine d'intégration. Les $f_j(N_j)$ étant majorés par δ, on obtient

$$A \leq \mathrm{C^{te}}\delta\mathcal{N}_p(f - g)\,.$$

Si D_i est parallèle à Π, le point N_i parcourt π et on a $i \in J(\pi)$. Le point N_i étant fixé, le point N_j parcourt la droite Δ passant par N_i et parallèle au vecteur $C_j - C_i$. Il s'agit d'une droite de type trace, et on a $j \in J(\Delta)$. En intégrant d'abord sur la droite Δ, sur laquelle l'intégrale de $|f_j|$ est majorée par δ, puis sur π, on obtient

$$A \leq \mathrm{C^{te}}\delta\mathcal{N}_{p-1}(f - g)$$

3.5 *Estimation des intégrales $(p+1)$-uples (16).*

Si D_i n'est pas parallèle à Π, le point R_i parcourt alors le $(p+1)$-plan caractéristique Π_1 parallèle à D_i et s'appuyant sur Π. On peut paramétrer le domaine d'intégration par R_i, ce point déterminant P puis N_j de manière unique. En majorant $|f_j(N_j)|$ par δ, on obtient

$$B_1 \leq \mathrm{C^{te}}\delta m_{p+1} .$$

Lorsque D_i est parallèle à Π, le point R_i parcourt Π, et lorsqu'il est fixé, le point N_j parcourt une droite caractéristique Δ parallèle à $C_j - C_i$. L'intégrale de f_i sur Δ étant majorée par δ, on obtient

$$B_1 \leq \mathrm{C^{te}}\delta m_p .$$

3.6 *Estimation des intégrales $(p+1)$-uples (17).*

L'analyse est la même que dans le cas précédent, mais ce sont cette fois des termes du type $|u_\alpha(R_i)u_\beta(R_i)|$ que l'on doit intégrer sur des plans caractéristiques, ce qui fait apparaître $M_{p+1} + \tilde{M}_{p+1}$ ou $M_p + \tilde{M}_p$ qui sont majorés par $\mathrm{C^{te}}\delta$ (et même par $\mathrm{C^{te}}\delta^2$). Par contre, ce sont les différences $|f_j(N_j) - g_j(N_j)|$ dont on doit majorer la valeur en N_j ou l'intégrale sur une droite caractéristique. On obtient

$$B_2 \leq \mathrm{C^{te}}\delta \mathcal{N}_0(f-g)$$

ou

$$B_2 \leq \mathrm{C^{te}}\delta \mathcal{N}_1(f-g)$$

selon les cas.

3.7 *Estimation des intégrales $(p+2)$-uples (17).*

Lorsque D_i n'est pas parallèle à Π, le point R_i parcourt le $(p+1)$-plan caractéristique Π_1 parallèle à D_i s'appuyant sur Π. Pour chaque R_i fixé, le point P est déterminé et R_j décrit le segment de droite caractéristique issu de P et parallèle à D_j. L'intégrale de $|u_\lambda u_\mu - v_\lambda v_\mu|$ sur ce segment se majore par m_1, et il reste l'intégrale sur Π_1 qui se majore par $M_{p+1} + \tilde{M}_{p+1}$. On obtient donc

$$C \leq \mathrm{C^{te}}\delta m_1$$

Lorsque D_j n'est pas parallèle à Π, la même analyse géométrique, en échangeant les rôles de i et j, fournit l'estimation

$$C \leq \mathrm{C^{te}}\delta m_{p+1}$$

Il reste le cas où D_i et D_j sont parallèles à Π. Le point R_i parcourt alors Π. Pour chaque choix de R_i, le point R_j parcourt une partie du 2-plan caractéristique passant par R_i et parallèle à D_i et D_j. L'intégrale de $|u_\lambda u_\mu - v_\lambda v_\mu|$ sur ce 2-plan se majore par m_2, et il reste l'intégrale sur Π majorée par $M_p + \tilde{M}_p$. On obtient

$$C \leq \mathrm{C^{te}}\delta m_2 .$$

Cela achève la démonstration du lemme 3.2.

4 Diffusion

Nous ferons désormais l'hypothèse (6) assurant que la norme de $\mathcal{E}$ est plus forte que la norme L^1. Notre objectif est de comparer le comportement asymptotique de G_t et celui des G_t^0 correspondant à l'évolution libre

$$G_t^0 f = u^t \qquad u_i^t(x) = f_i(x - tC_i) \ .$$

Pour pouvoir obtenir des convergences fortes, nous nous placerons dans l'espace suivant, en désignant par $C_0(\mathbf{R}^n)$ l'espace des fonctions continues tendant vers 0 à l'infini.

Définition 4.1 *On note $\mathcal{E}_0$ l'adhérence de $(C_0(\mathbf{R}^n))^I$ dans $\mathcal{E}$. Il s'agit de l'espace des f, dont les composantes appartiennent à $L^1 \cap C_0$ et qui vérifient de plus, pour chaque direction de p-plan de type trace π identifié à $\mathbf{R}^p$, et pour tout $i \in J(\pi)$,*

$$f_i \in C_0\left(\mathbf{R}^{n-p}\,;\, L^1(\mathbf{R}^p)\right) \ .$$

Les opérateurs G_t respectent la continuité des fonctions, et par la propagation à vitesse finie respectent le fait d'être à support compact. Par continuité, ils appliquent donc $\mathcal{E}_0$ dans lui-même. Pour δ assez petit, nous introduirons l'ouvert $\Omega_\delta \subset \mathcal{E}_0$, réunion de la boule de $\mathcal{E}_0$ de rayon δ et de ses images par les G_t pour $t \in \mathbf{R}$, et nous noterons $\overline{\Omega_\delta}$ son adhérence.

Le théorème suivant montre l'existence des 'opérateurs d'ondes' (si nous osons employer cette expression dans un tel contexte physique). Pour $f \in \mathcal{E}_0$ assez petit, $W^- f$ est l'état du système à l'instant 0 lorsque son évolution est asymptotique à l'évolution libre $\left(f_i(x - C_i t)\right)_{i \in I}$ pour $t \to -\infty$.

Théorème et Définition 4.2 *Pour δ assez petit, et pour $f \in \overline{\Omega_\delta}$, les $G_t G_{-t}^0 f$ convergent en norme dans $\mathcal{E}_0$, pour $t \to \pm\infty$, vers un élément de $\overline{\Omega_\delta}$ noté $W^\pm f$. Les opérateurs $W^\pm$ sont des applications lipschitziennes de $\overline{\Omega_\delta}$ dans lui-même.*

Pour f appartenant au sous-espace dense dans $\mathcal{E}_0$ constitué des éléments à support compact, il est évident que les $G_t G_{-t}^0 f$ convergent pour (par exemple) $t \to +\infty$, puisque cette famille est constante pour t asez grand. En effet, il existe T_0 tel que, pour $t \geq T_0$ les $(G_{-t}^0 f)_i(x) = f_i(x + C_i t)$ sont à support disjoints. Dans l'intervalle $[-t, -T_0]$, l'évolution libre coïncide avec l'évolution avec interaction, et on a donc

$$G_t G_{-t}^0 f = G_{T_0}\left(G_{t-T_0} G_{T_0 - t}^0\right) G_{-T_0}^0 f = G_{T_0} G_{-T_0}^0 f \ .$$

Les $G_t G_{-t}^0$ constituent une famille uniformément équicontinue d'applications de $\overline{\Omega_\delta}$ dans lui-même d'après (12) qui converge sur un sous-ensemble dense. On a donc convergence forte vers un opérateur W^+. Le caractère lipschitzien résulte clairement de (12).

Le théorème suivant ('complétude asymptotique'), assure que toute évolution est asymptotique, au sens fort, à une évolution libre.

Théorème 4.3 *Pour δ assez petit, et pour $f \in \overline{\Omega_\delta}$, les $G^0_{-t}G_t f$ convergent en norme dans $\mathcal{E}_0$, pour $t \to \pm\infty$, vers un élément de $\overline{\Omega_\delta}$. Les opérateurs $W^\pm$ sont des bijections bilipschitziennes de $\overline{\Omega_\delta}$ sur lui-même, et on a*

$$\left(W^\mp\right)^{-1} f = \lim_{t\to\pm\infty} G^0_{-t}G_t f$$

1. En notant $u(t,x)$ la solution du problème de Cauchy associé à f, on a

$$w^t = G^0_{-t}G_t f \qquad w^t_i(x) = f_i(x) + \int_0^t (Q_i(u))(s, x + C_i s)\, ds\,.$$

En vertu du théorème 2.4, on a $Q_i(u) \in L^1(\mathbf{R}^{n+1})$, ce qui entraîne la convergence (pour $t \to +\infty$ par exemple) dans $L^1(\mathbf{R}^n)$ des w^t vers

$$(K^+ f)_i(x) = f_i(x) + \int_0^{+\infty} (Q_i(u))(s, x + C_i s)\, ds\,.$$

De même, la finitude des intégrales des $|Q_i(u)|$ sur les droites caractéristiques entraîne la convergence ponctuelle des w^t vers $K^+ f$.

2. En notant τ_h la translation de vecteur $h \in \mathbf{R}^n$, il est clair que τ_h commute avec les opérateurs G_t et G^0_t. D'autre part, pour $f \in \mathcal{E}_0$, les $\tau_h f$ convergent vers f pour la norme de $\mathcal{E}_0$ lorsque h tend vers 0. D'après l'uniformité en t de l'estimation (12), il en résulte que $\|\tau_h K^+ f - K^+ f\|_{\mathcal{E}_0} \to 0$. Cela exprime précisément que $K^+ f$ est uniformément continue, et qu'il en est de même des applications $x'' \mapsto \int_{\mathbf{R}^p} (K^+ f)_i(x', x'')\, dx'$ lorsqu'un p-plan π de type trace, avec $i \in J(\pi)$, est identifié à $\mathbf{R}^p$. Une fonction sommable et uniformément continue tend vers 0 à l'infini, et nous avons donc montré que $K^+ f \in \mathcal{E}_0$.

3. Introduisons maintenant la situation majorante où les B^{jk}_i et les f_i sont remplacés par leurs modules. On obtient alors une solution $\overline{u}$ possédant toutes les propriétés établies ci-dessus pour u. En outre, on a $|u_i(t,x)| \leq \overline{u}_i(t,x)$ et les termes d'interaction $Q_i u$ sont majorés en module par les termes analogues relatifs à $\overline{u}$. On notera $\overline{w^t}$, $\overline{K^+}$, ... les expressions relatives à la situation majorante.

Les fonctions $\overline{K^+}\,\overline{f} - \overline{w^t}$ convergent en décroissant vers 0, et elles appartiennent à $C_0(\mathbf{R}^n)$. D'après le théorème de Dini, la convergence est uniforme. De même, avec l'identification ci-dessus, les fonctions $x'' \mapsto \int_{\mathbf{R}^p} (\overline{K^+}\,\overline{f} - \overline{w^t})(x', x'')\, dx'$ convergent uniformément vers 0. On a

$$\left|(K^+ f - w^t)_i(x)\right| = \left|\int_t^{+\infty} (Q_i(u))(s, x + C_i s)\, ds\right| \leq (\overline{K^+}\,\overline{f} - \overline{w^t})_i(x)$$

d'après la majoration des termes d'interaction. Il en résulte que w^t converge vers $K^+ f$ pour la norme de $\mathcal{E}_0$. Le caractère lipschitzien de K^+ résulte immédiatement de l'uniformité de la constante de Lipschitz dans (12). Enfin, il est clair que l'on a $W^- K^+ = K^+ W^- = \mathrm{Id}$ ce qui achève la démonstration du théorème 4.3.

Nous pouvons donc maintenant définir l'opérateur de diffusion S, reliant les évolutions libres auxquelles une évolution perturbée est asymptote pour $t \to \pm\infty$.

Définition 4.4 *On note S l'opérateur $\left(W^-\right)^{-1} W^+$. Il s'agit, pour δ assez petit, d'une bijection bilipschitzienne de $\overline{\Omega_\delta}$ sur lui-même.*

L'équation $f^+ = Sf^-$ signifie que l'unique évolution asymptote à $\left(f_i^-(x - C_i t)\right)$ pour $t \to -\infty$ est asymptote à $\left(f_i^+(x - C_i t)\right)$ pour $t \to +\infty$. Dans le cas des modèles de la cinétique des gaz (5), les opérateurs $(W^-)^{-1}$, W^+ et S conservent l'ensemble des $f \in \Omega_\delta$ vérifiant $f_i \geq 0$ pour tout i. Par contre, il n'en est pas de même, en général, pour leurs inverses.

Bibliographie

[1] J. T. Beale. Large-time behavior of the Broadwell model of a discrete velocity gas *Comm. Math. Phys.* **102** (1985) 217–235

[2] J. T. Beale. Large-time behavior of discrete velocity Boltzmann equations *Comm. Math. Phys.* **106** (1986) 659–678

[3] J.-M. Bony. Solutions globales bornées pour les modèles discrets de l'équation de Boltzmann en dimension 1 d'espace *Actes Journées E.D.P. St. Jean de Monts* (1987) n°XVI

[4] J.-M. Bony. Existence globales à données de Cauchy petites pour les modèles discrets de l'équation de Boltzmann. *soumis à Comm. P.D.E.* (1990)

[5] H. Cabannes. Solution globale du problème de Cauchy en théorie cinétique discrète *J. de Mecan.* **17** (1978) 1-22

[6] H. Cabannes. The discrete Boltzmann equation (Theory and applications) *Lecture notes, University of California, Berkeley* (1980)

[7] H. Cabannes. On the initial-value problem in discrete kinetic theory *à paraître* (1990)

[8] R. Gatignol. Théorie cinétique des gaz à répartition discrète de vitesses *Lecture Notes in Physics* **36** Springer Verlag (1975)

[9] K. Hamdache. Existence globale et comportement asymptotique pour l'équation de Boltzmann à répartition discrète des vitesses *J. de Mecan. Th. Appl.* **3**, 5 (1984) 761–785

[10] R. Illner. Global existence results for discrete velocity models of the Boltzmann equation in several dimension *J. de Mecan. Th. Appl.* **1**, 4 (1982) 611–622

[11] R. Illner. Examples of non-bounded solutions in discrete kinetic theory *J. de Mecan. Th. Appl.* **5**, 4 (1986) 561–571

[12] S. Kawashima. Global solution of the initial value problem for a discrete velocity model of the Boltzmann equation *Proc. Japan Acad.* **57** (1981) 19–24

[13] M. Mimura et T. Nishida. On the Broadwell's model for a simple discrete velocity gas *Proc. Japan Acad.* **50** (1974) 812–817

[14] L. Tartar. Existence globale pour un système hyperbolique semi-linéaire de la théorie cinétique des gaz *Séminaire Goulaouic-Schwartz, Ec. Polytechnique* (1975–76) n°1

[15] L. Tartar. Some existence theorem for semilinear hyperbolic systems in one space variable *Technical Summary Report, Univ. Wisconsin* (1980)