Journées Équations aux dérivées partielles

Max Bezard

Problème de Riemann généralisé pour un système de lois de conservation vraiment non linéaire multidimensionnel

Journées Équations aux dérivées partielles (1990), p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1990____A17_0>

PROBLEME DE RIEMANN GENERALISE POUR UN SYSTEME DE LOIS DE CONSERVATION VRAIMENT NON LINEAIRE MULTIDIMENSIONNEL

Max BEZARD

Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique
91128 Palaiseau

et

DRET, 32 bld Victor 75015 PARIS

A. Introduction.

Les problèmes de la dynamique des gaz font apparaître des lois de conservation pour des grandeurs telles que la densité, l'impulsion ou l'énergie, dont l'expression locale est un système d'équations aux dérivées partielles. Selon qu'on prend en compte, ou non, la viscosité du gaz, ce système est parabolique (Equations de Navier Stokes) ou hyperbolique (Equations d'Euler). Dans les deux cas, les équations présentent une non-linéarité très forte. L'étude de ces systèmes entreprise de manière intensive depuis les années 50 a fourni une somme considérable de notions et de résultats dans des situations unidimensionnelles. Il a fallu attendre 1982 pour que les outils d'analyse microlocale, mis en oeuvre pour l'étude du problème mixte hyperbolique linéaire par H.O. Kreiss [9], soient utilisés avec succès par A. Majda [11] [12] pour construire des solutions, discontinues le long d'hypersurfaces, aux équations d'Euler, généralisant la notion d'onde de choc en dimension quelconque. L'utilisation du calcul paradifférentiel de J.M. Bony [4] par G. Métivier et A. Mokrane [16] a permis de préciser nettement la régularité des données, nécessaire pour traiter le problème de l'apparition d'un choc dans le problème de Cauchy, modulo des conditions de comptabilité. Par ailleurs, on doit à S. Alinhac [1] la première étude multidimensionnelle du problème de Cauchy dans le cas où des conditions de comptabilité sur les données initiales assurent que seule une onde de raréfaction peut apparaître. La situation est sensiblement compliquée par le fait que, bien que l'idée de base soit de se ramener à un problème mixte hyperbolique, comme dans le cas de l'onde de choc, la frontière de l'onde de raréfaction est caractéristique, et la possibilité de résoudre le problème par une méthode itérative classique est enlevée à cause de la structure du problème linéarisé qui fait apparaître une pathologie bien connue de géomètres et de dynamiciens : la solution du problème linéarisé est de toute manière moins régulière que les coefficients du problème. C'est cette particularité qui avait conduit à l'adoption d'un schéma de type Nash-Moser, dans la version améliorée par Hörmander [7] [8]. Rappelons enfin que la théorie classique unidimensionnelle permet l'apparition d'un autre type de singularités dans les solutions du système d'Euler : il s'agit des discontinuités de contact. La théorie multidimensionnelle les évite soigneusement pour le moment, car si l'idée de traiter ce problème comme un problème mixte hyperbolique est reprise, un calcul suivant la théorie linéaire classique de Majda et Osher [13] permet de voir que la condition de Lopatinski dont on sait qu'elle est nécessaire dans le cas à coefficients constants, n'est jamais vérifiée : une méthode nouvelle est alors nécessaire ; Si dans un tel système de lois de conservation, les données initiales sont discontinues le long d'une hypersurface, on s'attend à voir apparaître les différents types de singularités si aucune condition de comptabilité n'est imposée. Dans le cadre analytique, le travail de E. Harabetian [6] a montré qu'il en est bien ainsi. On s'intéressera ici au cadre peu régulier, et on évitera avec autant de soin que les auteurs précédents, l'apparition d'ondes de discontinuité de contact dans le problème posé. Le plan de l'exposé est le suivant : dans un premier temps, on présente les hypothèses de base sur le système multidimensionnel considéré, en même temps qu'on rappelle quelques éléments de la théorie unidimensionnelle de Lax [10]. Dans un second temps on présente le problème reformulé dans un cadre géométrique fixe, et les équations ainsi obtenues, ainsi que les linéarisations. Rappelant les estimations d'énergies usuelles sur les problèmes mixte-hyperbolique, on montre alors comment elles se traduisent dans le cas d'un système singulier en temps, et pourquoi elles nécessitent la construction d'une solution approchée à un ordre élevé. Enfin on présente la chaîne d'espaces et le schéma de Nash-Moser utilisé pour résoudre le problème. Les preuves ne seront évidemment qu'à peine esquissées et le lecteur téméraire pourra trouver les détails dans l'article complet [3].

B. Présentation des résultats.

Considérons dans $\mathbf{R}^n$ le système de lois de conservation $\partial_t u + \Sigma_{j\leq n}\partial_j F_j(u) = 0$, où $u = u(t,x) \in \mathbf{R}^N$; et les $F_j : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N$ sont des fonctions C^∞ en leur argument u. On fait sur ce système l'hypothèse de stricte hyperbolicité suivante : Si $\widetilde{A}_j(u)$ désigne la matrice $N \times N$ $\frac{dF_j}{du}$:

$\mathcal{H}i)$ $\forall u$, $\forall \xi \in \mathbf{R}^n \setminus 0$ l'équation $\det(\tau\, id_N - \sum_{j=1}^n \xi_j \widetilde{A}_j(u)) = 0$ admet N valeurs propres réelles et distinctes notées $\lambda_1(u,\xi) < \cdots < \lambda_N(u,\xi)$.

Remarquons que sous cette hypothèse, le système précédent est symétrisable microlocalement.

$\mathcal{H}ii)$ $\exists A_0(u) C^\infty$ symétrique définie positive, $\forall j$ $\quad A_0(u)\widetilde{A}_j(u) = A_j(u)$ est symétrique.

Afin de suivre la propagation suivant les différents modes on choisit un vecteur propre $r_k(u,\xi)$ non nul dans Ker $(\lambda_k(u,\xi)\mathrm{id} - \Sigma_j \xi_j \widetilde{A}_j(u))$, et pour éviter l'intervention des discontinuités de contact on fait l'hypothèse

$$\mathcal{H}iii) \qquad \forall u, \quad \forall \xi \in \mathbf{R}^n \setminus 0 \qquad \nabla_u \lambda_k(u,\xi) \cdot r_k(u,\xi) \neq 0$$

c'est-à-dire que tous les modes de propagation sont vraiment non linéaires au sens de Lax ; on peut alors normaliser $r_k(u,\xi)$ suivant $\nabla_u \lambda_k \cdot r_k = 1$. On se donne maintenant une hypersurface Σ de $\mathbf{R}^n$ et une donnée initiale u_0, fonction discontinue à travers Σ ; on suppose Σ de classe C^1 pour pouvoir définir sa normale, et en chaque y point de Σ il est associé de manière naturelle un système de lois de conservation unidimensionnel qui est la projection sur la normale. Disposant de deux états $u_-(y)$ et $u_+(y)$ de part et d'autre de Σ en y, la théorie de Lax nous apprend que si $|u_+(y) - u_-(y)| < \varepsilon_0$, où ε_0 ne dépend que des F_j et de $u_{-|\Sigma}$, le problème normal se résoud en une succession d'états constants séparés par des ondes de choc et des ondes de raréfaction.

On fait dans la suite l'hypothèse géométrique suivante

$\mathcal{H}iv$) Pour tout $y \in \Sigma$, le problème normal possède une solution à exactement N motifs (i.e. pas de dégénérescence), et l'ordre des motifs est indépendant de y (i.e. pas de croisement).

Evidemment pour que la théorie de Lax soit applicable on impose $|u_+ - u_-|_{L^\infty(\Sigma)} < \varepsilon_0$ et Σ est donnée par l'équation $x_n = \phi(y) \quad y \in \mathbf{R}^{n-1}$, $|\nabla\phi(y)| \neq 0 \, \forall y$.

Pour appliquer la théorie de Majda, on va imposer

$\mathcal{H}v$) Les chocs pour le problème normal sont stables au sens de Majda, uniformément en $y \in \Sigma$.

On rappelle au passage que la condition de stabilité de Majda est très voisine de la condition de Lopatinski uniforme.

Précisons les deux hypothèses précédentes : si $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$ est un système unidimensionnel strictement hyperbolique, et si nous voulons résoudre le problème de Riemann associé à deux données $(u_-, u_+) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$ suffisamment proches l'une de l'autre, la théorie classique de Lax nous apprend qu'il existe, au voisinage de u_-, N courbes, paramétrées par $\varepsilon \in]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$, tangentes à l'ordre deux aux courbes intégrales solutions de $\frac{du}{ds} = r_k(u)$ où $r_k(u)$ est le vecteur propre suivant la $k^{ème}$ valeur propre λ_k, normalisé par $\nabla_u \lambda_k . r_k = 1$ et une fonction C^2 $\quad \Gamma :]\varepsilon_0, \varepsilon_0[^N \rightarrow \mathbf{R}^N$ qui est un difféomorphisme local vérifiant : u_+ est lié à u_- par un k-choc si et seulement si $\varepsilon_k < 0$ et $\forall_j \neq k \quad \varepsilon_j = 0$.

Ainsi à tout point $y \in \Sigma$ on peut associer un $\Gamma_y :]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[^N \rightarrow \mathbf{R}^N$ difféomorphisme local au voisinage de $u_-(y)$ de sorte que si $|u_+ - u_-|_{L^\infty} < \delta$ assez petit, on peut trouver $\varepsilon_1(y) \cdots \varepsilon_N(y)$ tels que $u_+(y) = \Gamma_y(\varepsilon_1(y), \cdots, \varepsilon_N(y))$. Suivant cette description, l'hypothèse $\mathcal{H}iv$) prend la forme précisée suivante :

$\mathcal{H}iv'$) $$\exists \delta_1, \delta_2 > 0 \ , \ \forall_y \in \Sigma, \forall j \quad \delta_2 > |\varepsilon_j(y)| > \delta_1 \ ,$$

Sous cette hypothèse, les ε_j ne changent jamais de signe et donc les coefficients ε_j ont la même régularité tangentielle que les $u_\pm$ et Σ, car Γ est C^∞ en dehors des points où un ε_j s'annule. Soit k le nombre d'indices pour lesquels $\varepsilon_j > 0$: le problème normal présente donc k chocs et $N-k$ raréfactions.

Le problème consiste alors à trouver $2N-k+1$ fonctions $u_i(t,x,y)$ et $2N-k$ équations de surfaces libres données par $x = \phi^i(t,y)$ vérifiant

$$\phi^i(0,y) = \phi(y)$$

$$\phi^i(t,y) < \phi^{i+1}(t,y).(\quad \text{en fait} \quad \phi^{i+1}(t,y) - \phi^i(t,y) = t \ r_i(t,y) \quad \text{avec} \quad r_i > 0)$$

$$\partial_t u^i + \sum_{j \leq n} B_j(u^i) \frac{\partial u^i}{\partial x_j} = 0 \ . \quad \text{sur} \quad \omega_i = \{\phi^i < x < \phi^{i+1}\}$$

si $x = \phi^i$ est une surface de choc

$$\partial_t \phi^i [u^i - u^{i-1}] + \sum_{j<n} \partial_j \phi^i [F_j(u^i) - F_j(u^{i-1})] - [F_n(u^i) - F_n(u^{i-1})] = 0$$

si $x = \phi^i$ est une surface de raréfaction.

$$u^i(x,y,t) = u^{i-1}(x,j,t)$$

Suivant une stratégie bien connue maintenant (cf. Métivier [14], Alinhac [1], Tougeron [18]), on reformule le problème dans une géométrie fixe et on va chercher, sur chacun des domaines Ω_j définis ci-dessous, une fonction $\varphi_j(t,y,\theta)$ pour faire un changement de variable $\Omega_j \to \omega_j$. On imposera en outre que

$$\begin{cases} \varphi_j(0,y,\theta) = \phi(y) \\ \partial_\theta \varphi_j(t,y,\theta) = t \quad r_j(t,y,\theta), \quad r_j(t,y,\theta) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} & \Omega_0 =]-\infty, 0[\times \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}_+ \\ & \Omega_j =]j-1, j[\times \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}_+ \\ j = 1 \cdots 2N - k_0 - 1 & \\ & \Omega_{2N-k_0} =]2N - k_0 - 1, \infty[\times \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}_+ \end{cases}$$

Le système se réécrit alors :

$$(*) \begin{cases} \mathcal{L}(u^i,\varphi^i)u^i \stackrel{\text{def}}{=} \dfrac{\partial u_i}{\partial t} + \displaystyle\sum_{j<n} B_j(u_i)\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} + (B_n(u^i) - \dfrac{\partial \varphi^i}{\partial t} - \displaystyle\sum_{j<n} \dfrac{\partial \varphi^i}{\partial x_j} B_j(u^i))\dfrac{\partial_\theta u^i}{\partial_\theta \varphi^i} = 0 \\ \text{sur} \quad \Omega_i \\ \text{si} \quad i \in \mathcal{C} \\ \mathcal{B}_c(u^{i-1},u^i,\varphi^i) \stackrel{\text{def}}{=} \dfrac{\partial \varphi^i}{\partial t}(u^{i-1} - u^i) \\ \qquad + \displaystyle\sum_{j<n} \dfrac{\partial \varphi^i}{\partial x_j}(F_j(u^{i-1}) - F_j(u^i)) - (F_n(u^{i-1}) - F_n(u^i)) = 0 \\ \text{sur} \quad \theta = i-1 \\ \text{si} \quad i \in \mathcal{R} \\ \mathcal{B}_r(u^{i-1},u^i) \stackrel{\text{def}}{=} u^i - u^{i-1} = 0 \quad \text{sur} \quad \theta = i-1 \end{cases}$$

Rappelons que suivant Alinhac on dit qu'il y a une onde de rarefaction dans le domaine Ω_j si $|\partial_\theta u^j| \geq C^{te} > 0$.

Théorème.— *Donnons nous la surface Σ et deux fonctions u_- et u_+ sur Σ comme précédemment. Il existe un $s_0 > 0$ tel que pour tout couple de fonctions $u_-(y,x), u_t(y,x)$ de régularité $\mathcal{E}_s$ $s > 0$ admettant u_+ et u_- comme traces sur Σ, le problème (*) admet une unique solution $\mathcal{E}_s$ en temps petit.*

Remarque : La chaîne $\mathcal{E}_s$ est présentée au paragraphe D.

Idée générale de la preuve : les données $u_+(y)$ et $u_-(y)$ étant connues, il est aisé de construire une solution approchée d'ordre 0, suivant le problème normal. Cette solution d'ordre 0 fait apparaître des chocs plans dont on suppose qu'ils sont stables au sens de Majda, ceci fournit alors une inégalité d'énergie à priori qui permet de fixer l'ordre d'annulation dont on aura besoin pour faire fonctionner un schéma iétératif. Connaissant cet ordre d'annulation γ (généralement plus grand que celui nécessaire aux estimations d'énergie pour l'onde de raréfaction) on construit une solution approchée au même ordre, c'est à dire une collection de fonctions $\widetilde{u}^i$ et $\widetilde{\varphi}^i$ vérifiant :

$$\begin{cases} \mathcal{L}(\widetilde{u}_i, \widetilde{\varphi}_i)\widetilde{u}^i = \mathcal{O}(t^{\gamma+\delta_i}) \quad \delta_i = 0 \quad \text{si} \quad i = 0, 2N - k_0, \delta_i = -1 \quad \text{si} \quad i \neq 0, 2N - k_0 \\ i \in \mathcal{C} \quad \mathcal{B}_c(\widetilde{u}^{i-1}, \widetilde{u}^i, \widetilde{\varphi}_i) = \mathcal{O}(t^{\gamma+1}) \\ i \in \mathcal{R} \quad \mathcal{B}_c(\widetilde{u}^{i-1}, \widetilde{u}^i) = \mathcal{O}(t^{\gamma+1}), \quad \partial_i \widetilde{\varphi}^i - \lambda_{m(i)}(\widetilde{u}^i, -\nabla\widetilde{\varphi}^i) = \mathcal{O}(t^{\gamma+1}) \end{cases}$$

où $m(i)$ est le “mode” suivant lequel il y a une onde de raréfaction. On peut alors examiner le linéarisé au voisinage de cette solution approchée et envisager un schéma itératif autour de ce point, pour un voisinage formé de fonctions plates.

Lemme.— *Dans chaque domaine $\Omega_j, j \neq 0, 2N - k_0$ le linéarisé a la forme :*

$$d\mathcal{L}(u,\varphi)(\dot{u},\dot{\varphi}) = \mathcal{L}(u,\varphi)\dot{V} + C(\varphi,u)\dot{V} + \frac{\dot{\varphi}}{\partial_\theta\varphi}\partial_\theta(\mathcal{L}(u,\varphi)a)$$

où

$$\begin{cases} \dot{V} = \dot{u} - \dfrac{\dot{\varphi}}{\partial_\theta\varphi}\partial_\theta u \\ C(u,\varphi) = \dfrac{1}{\partial_\theta\varphi}(\nabla_u B_n - \displaystyle\sum_{j<n} \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\nabla_u B_j)\partial_\theta u + \sum_{j<n} \nabla_u B_j . \frac{\partial v}{\partial x_j} \end{cases}$$

Ce linéarisé fait tout de suite comprendre qu'il va y avoir une perte sur les dérivées normales $\partial_\theta\varphi$ à chaque pas, ce qui conduit à adopter le schéma de type Nash-Moser.

Remarque : Le linéarisé que nous utilisons même dans les zones de choc est différent de celui utilisé dans le cas de deux chocs par Métivier, ce qui interdit l'utilisation directe de ses estimations.

C. Estimations d'énergie.

Les problèmes qui apparaissent dans la solution du linéarisé sont de natures différentes.

i) Les surfaces de l'onde de raréfaction sont caractéristiques

ii) Les systèmes posés dans $\Omega_i \quad i = 1 \cdots 2N - k_0 - 1$ sont singuliers en temps

iii) Les estimations d'énergie pour les zones de choc et pour les zones de raréfaction sont sensiblement différentes, ce qui oblige à un contrôle très précis des troncatures utilisées.

1) Au voisinage d'une surface de choc, le système prend la forme.

$$(1) \qquad \begin{cases} t\partial_t\mathcal{V} + t\displaystyle\sum_{j<n}\mathcal{B}_j\partial_j\mathcal{V} + \mathcal{B}_n\partial_\theta V + \mathcal{C}\mathcal{V} = \mathcal{F} \quad \text{où} \quad \mathcal{V} \in \mathbf{R}^{2N} \\ \mathcal{M}\mathcal{V} + b\,\nabla\phi = \mathcal{G} \quad \text{où} \quad \begin{cases} \mathcal{M} & \text{est une matrice} \quad N \times 2N \\ b & \text{est une matrice} \quad N \times n \end{cases} \end{cases}$$

les $\mathcal{B}_j$ ont une structure diagonale par blocs, ainsi que $\mathcal{M}$.

Si $\mathcal{V} = t^\gamma \mathcal{U}$ et $\dot{\phi} = t^\gamma \Psi$ on obtient

$$(2) \qquad \begin{cases} \mathcal{B}_n^{-1}((t\partial_t - i\gamma) + \sum\limits_{j<n} \mathcal{B}_j t\partial_j)\mathcal{U} + \partial_\theta \mathcal{U} + \mathcal{B}_n^{-1} \mathcal{C}\mathcal{U} = \bar{\mathcal{F}} \\ \mathcal{M}\,\mathcal{U} + b\begin{pmatrix} t\partial_t + \gamma \\ \partial_{x_i} \end{pmatrix} \dfrac{\Psi}{t} = \bar{\mathcal{G}} \end{cases}$$

La construction du symétriseur de Kreiss assure, sous l'hypothèse de stabilité des chocs plans, l'existence d'une matrice $\widetilde{\mathcal{R}}(t,x,y\ ;\tau,\eta;\gamma)$ vérifiant :

- $\widetilde{\mathcal{R}}$ est $N \times N$ définie positive.
- $\mathrm{Im}[\widetilde{\mathcal{R}}\mathcal{B}_n^{-1}(\tau - i\gamma + \sum_{j<n} \mathcal{B}_j\eta_j)] = -\widetilde{\mathcal{T}}^{-1} \begin{bmatrix} \widetilde{h}\gamma & 0 \\ 0 & \widetilde{e} \end{bmatrix} \widetilde{\mathcal{T}}$ où $\widetilde{\mathcal{T}} \in \mathcal{O}(N), \widetilde{e}, \widetilde{h}$ sont des matrices hermitiennes définies positives homogènes de degrés respectifs 0 et 1 en $(\tau,\eta;\gamma)$.
- $-\widetilde{\mathcal{R}} + C^{te}\widetilde{Q}^*\widetilde{Q}$ définie positive.

$$\text{où} \quad \widetilde{w} = b.\begin{pmatrix} \tau - i\gamma \\ \eta \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\Pi}z = \frac{(z.\widetilde{w})}{|\widetilde{w}|}\widetilde{w} \quad \text{et} \quad \widetilde{Q} = (1 - \widetilde{\Pi})\mathcal{M}\ .$$

de plus $\widetilde{\mathcal{R}}$, $\widetilde{A}$, $\widetilde{\mathcal{T}}$ vérifient des estimées usuelles pour des symboles $(1,0)$ à paramètres de sorte que $\widetilde{e}$ et $\widetilde{h}$ vérifient des estimées semblables.

Si le système n'était pas singulier en temps, ces symboles seraient immédiatement utilisables, avec la quantification usuelle. Le terme singulier $t\partial_t$ conduit à utiliser $\mathcal{R}(t,x,y;\tau,\eta;\gamma) = \widetilde{\mathcal{R}}(t,x,y;t\tau,t\eta;\gamma)$, $\tau(t,x,y;\tau,\eta;\gamma) = \cdots$ qui sont dans des classes de symboles pour lesquels il faut adopter une quantification proche de celle de Métivier [15] pour les ondes soniques, et montrer l'existence de lemmes de calcul symbolique, conduisant à l'inégalité suivante.

Lemme.— *Si les coefficients $\mathcal{B}_j$, $\mathcal{B}_n$, $\mathcal{C}$ sont dans $\mathcal{E}_s$, si $\mathcal{F} \in \mathcal{E}_s$ et $\mathcal{G} \in \mathcal{E}_s$ alors le problème linéaire (2) admet une solution unique qui vérifie, pour γ assez grand :*

$$\gamma\|\mathcal{V}\|_s + \|\frac{\Psi}{t}\|_s \leq C^{te}\{\frac{1}{\gamma}\|\bar{\mathcal{F}}\|_s + \|\mathcal{G}\|_s\}$$

où $C^{te} = C^{te}(|\mathrm{coeff}|_s)$ ne dépend pas de γ

2) Au voisinage d'une surface de raréfaction, on utilise les estimations L^2 du travail d'Alinhac et l'existence d'un symétriseur $\mathcal{A}_0$. L'utilisation de cette estimation impose un ordre d'annulation en $t = 0$ fixé minimal ;

Lemme.— *Si $\mathcal{U}$ vérifie : $\mathcal{A}_0 t\partial_t\mathcal{U} + t\sum_{1<n} A_j\partial_j\mathcal{U} + \mathcal{B}\partial_\theta\mathcal{U} + \mathcal{C}\mathcal{U} = \mathcal{F}$ dans $[0,T_0[\times]0,1[\times\mathbf{R}^{n-1}$ où T_0 petit, avec des conditions aux limites homogènes en $\theta = 0$ ou 1, si $\mathcal{F} = t^\gamma\bar{\mathcal{F}}$, $\mathcal{U} = t^\gamma\mathcal{V}$ on a si $(\gamma - \frac{1}{2})A_0 - \frac{1}{2}\partial_\theta B + \frac{1}{2}(C + {}^tC) \to 0$.*

$$|\mathcal{V}|_{L^2} \leq C^{te}|\bar{\mathcal{F}}|_{L^2}$$

Le point important pour les estimations suivantes est de décomposer $\mathcal{U}$ suivant les différents modes de propagation. En particulier l'estimation de la composante suivant le j^e mode, dans une onde de raréfaction suivant ce même mode, se fait de manière séparée, à cause des surfaces caractéristiques. De plus l'estimation des dérivées normales se fait elle aussi de manière spécifique, suivant la preuve de Alinhac. Tous ces points permettent l'obtention d'une inégalité "Tame" dans les zones de raréfaction

Lemme.— *Si $\mathcal{U}$ vérifie : $A_0 t\partial_t \mathcal{U} + t\sum_{j<n} A_j \partial_j \mathcal{U} + B\partial_\theta \mathcal{U} + C\mathcal{U} = \mathcal{F}$ avec des conditions aux limites homogènes,*

$$\textit{si} \quad (\gamma - \frac{1}{2})A_0 - \frac{1}{2}\partial_\theta B + \frac{1}{2}(C + {}^tC) >> 0 \quad \textit{on a si} \quad s > s_0 = \frac{n+1}{2} + 1 \,.$$

$$\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{E}_s} \leq C\|\mathcal{F}\|_s + \|\mathcal{F}\|_{s_0}(1 + \|\mathrm{Coeff}\|_s)$$

3) Une fois obtenues les estimations d'énergie précédentes, il reste à prouver l'existence d'une solution pour le problème linéarisé. Pour cela, on combine les résultats usuels sur le problème mixte utilisant la condition de stabilité (Majda, Métivier, Mokrane) et la théorie du problème mixte caractéristique de Rauch [17]. Comme lors de l'obtention d'une solution approchée à un ordre quelconque, l'hypothèse de chocs faibles est tout à fait capitale pour pouvoir résoudre le problème linéaire.

D. Schéma de Nash-Moser

Négligeant les difficultés dans les zones $\theta < 0$ ou $\theta > 2N - k_0 - 1$, pour lesquelles le problème est non singulier en temps, on peut écrire, avec le formalisme usuel (cf. Hörmander [7] [8]) le schéma itératif :

Equations dans les domaines :
si $i, i+1 \in \mathcal{R}$, mode (i) = mode $(i+1)$ intérieur d'une onde de raréfaction.

$$t(L(u^i_{\nu+1}, \varphi^i_{\nu+1})u^i_{\nu+1} - L(u^i_\nu, \varphi'_\nu)u^i_\nu) = \Delta_\nu \dot{F}^i_\nu + \Delta_\nu \dot{e}^i_\nu$$

$$\dot{e}^i_\nu = e^i_{1,\nu} + e^i_{2,\nu} + \bar{e}^i_{1,\nu} + \bar{e}^i_{2,\nu}$$

$$\dot{V}^i_\nu = \dot{u}^i_\nu - \frac{\partial_\theta(S_\nu u^i_\nu)}{\partial_\theta(S_\nu \varphi^i_\nu)}\dot{\varphi}^i_\nu \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{P}(S_\nu u^i_\nu, -\nabla S_\nu \varphi^i_\nu)\dot{X}^i_\nu$$

$$\bar{F}^i_\nu = \bar{\bar{L}}\,(S_\nu u^i_\nu, S_\nu \varphi^i_\nu)\dot{X}^i_\nu$$

$$\dot{F}^i_\nu = \frac{t}{\partial_\theta(S_\nu \varphi^i_\nu)}(A_0^{-1}\mathcal{P})(S_\nu u^i_\nu, -\nabla S_\nu \varphi^i_\nu)\dot{\bar{F}}^i_\nu$$

$$e^i_{1\nu} = t\left[\ell(u^i_\nu, \varphi^i_\nu)(\dot{u}^i_\nu, \dot{\varphi}^i_\nu) - \ell(S_\nu u^i_\nu, S_\nu \varphi^i_\nu)(\dot{u}^i_\nu, \dot{\varphi}^i_\nu)\right]$$

$$e^i_{2\nu} = \frac{t}{\Delta_\nu}\left[L(u^i_{\nu+1}, \varphi^i_{\nu+1})u^i_{\nu+1} - L(u^i_\nu, \varphi^i_\nu)u^i_\nu - \Delta_\nu \ell(u^i_\nu, \varphi^i_\nu)(\dot{u}^i_\nu, \dot{\varphi}^i_\nu)\right]$$

$$\bar{e}^i_{iv} = \partial_\theta(L(S_\nu u^i_\nu, S_\nu \varphi^i_\nu)S_\nu u^i_\nu)\frac{t\dot{\varphi}^i_\nu}{\partial_\theta(S_\nu \varphi^i_\nu)}$$

$$\bar{e}^i_{2\nu} = \frac{t}{\partial_\theta(S_\nu\varphi^i_\nu)}(A_0^{-1}\mathcal{P})(S_\nu u^i_\nu, -\nabla S_\nu\varphi^i_\nu)\begin{bmatrix}\partial_\theta \dot{X}^i_{\nu,m(i)}\\ 0\end{bmatrix}\bar{d}_{m(i)}(S_\nu u^i_\nu, -\nabla S_\nu \varphi^i_\nu)$$

$$\text{où}\quad \bar{d}_{m(i)} = \chi d_{m(i)}(i-1,y,t) + (1-\chi)d_{m(i)}(i,y,t)$$

$$\begin{aligned}&\text{avec}\quad \chi \in C^\infty(\mathbf{R}),\\ &\chi' \geq 0 \quad \text{sur} \quad \mathbf{R}_+\\ &\chi \equiv 0 \quad \text{près de} \quad i-1\\ &\chi \equiv 1 \quad \text{près de} \quad i\end{aligned}$$

$(\bar{e}^i_{3,\nu})_{m(i)} = 0$

$$(\bar{e}^i_{3,\nu})' = \frac{t}{\partial_\theta(S_\nu\varphi^i_\nu)}(A_0^{-1}\mathcal{P})(S_\nu u^i_\nu, -\nabla S_\nu\varphi^i_\nu)$$

$$\{\chi(\mathcal{D}'(S_\nu u^i_\nu, -\nabla S_\nu\varphi^i_\nu) - \mathcal{D}'(S_\nu u^{i-1}_\nu, -\nabla S_\nu \varphi^{i-1}_\nu))_{\theta=i-1}$$

$$+(1-\chi)(\mathcal{D}'(S_\nu u^i_\nu, -\nabla S_\nu\varphi^i_\nu) - \mathcal{D}'(S_\nu u^{i+1}_\nu, -\nabla S_\nu\varphi^{i+1}_\nu))_{\theta=i}\}$$

$$\bar{\bar{\mathcal{D}}} = \begin{pmatrix}0 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & & & \\ & & & d_{m(i)} - \bar{d}_{m(i)} & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0\end{pmatrix} + \bar{\mathcal{D}} + (1-\chi)[\mathcal{D}'(S_\nu u^{i+1}_\nu, -\nabla S_\nu \varphi^{i+1}_\nu)$$

$$-\mathcal{D}'(S_\nu u^i_\nu, -\nabla S_\nu\varphi^i_\nu)]_{|\theta=i}$$

$$+\chi\left[\mathcal{D}'(S_\nu u^{i-1}_\nu, -\nabla S_\nu\varphi^{i-1}_\nu) - \mathcal{D}'(S_\nu u^i_\nu, -\nabla S_\nu\varphi^i_\nu)\right]_{|\theta=i-1}$$

$$\bar{\bar{L}}\,\dot{X} = \partial_\theta(S_\nu\varphi^i_\nu)\left[\mathcal{P}^{-1}A_0\mathcal{P}\partial_t\dot{X} + \sum_{j<n}\mathcal{P}^{-1}A_j\mathcal{P}\partial_j\dot{X}\right] + \bar{\bar{\mathcal{D}}}\,\partial_\theta\dot{X} + \widetilde{C}\dot{X}$$

Les termes d'erreur sont choisis de sorte que

$$\Delta_\nu \dot{F}^i_\nu = -\sum_0^{\nu-1}\Delta_k\dot{F}^i_k - S_\nu f_i - S_\nu E^i_\nu$$

$\mathcal{P}$ vérifie :

$$\mathcal{P} \in \mathcal{O}(N) \quad \text{et} \quad \mathcal{P}^{-1}A_0(v)(B_n(v) - \sum_{j<n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}B_j(v) - \frac{\partial\varphi}{\partial t}id)\mathcal{P} = \mathcal{D}$$

où $\mathcal{D}$ diagonale est telle que $d_{m(i)}$ s'annule en même temps que $\lambda_{m(i)}(v, -\nabla\varphi) - \frac{\partial\varphi}{\partial t}$ les autres parties du schéma dans les domaines sont du même type.

On notera que le schéma ci-dessus différe de celui utilisé par Alinhac pour une seule onde de raréfaction, en particulier à cause du terme $\bar{e}^i_{3\nu}$.

Condition aux limites :

si $i \in \mathcal{C}$ le linéarisé du schéma au bord fournit par exemple pour un choc :

$$dB_c(S_\nu v_\nu^{i-1}, S_\nu v_\nu^i, S_\nu \phi_\nu^i)(w_\nu^{i-1}, \omega_\nu^i, \psi_\nu^i) = \frac{\partial \psi_\nu^i}{\partial t}(S_\nu v_\nu^i - S_\nu v_\nu^{i-1})$$

$$+ \sum_{j<n} \frac{\partial \psi_\nu^i}{\partial x_j} \left[F_j(S_\nu v_\nu^i) - F_j(S_\nu v_\nu^{i-1})\right]$$

$$+ \left(B_n(S_\nu v_\nu^{i-1}) - \frac{\partial}{\partial t}(S_\nu \phi_\nu^i) - \sum_{i<n} \frac{\partial S_\nu \phi_\nu^i}{\partial x_j} B_j(S_\nu v_\nu^{i-1}) \right) \dot{V}_\nu^{i-1}$$

$$- \left(B_n(S_\nu v_\nu^i) - \frac{\partial S_\nu \phi_\nu^i}{\partial t} - \sum_{j<n} \frac{\partial S_\nu \phi_\nu^i}{\partial x_j} B_j(S_\nu v_\nu^i) \right) \dot{V}_\nu^i$$

$$+ \left(B_n(S_\nu v_\nu^{i-1}) - \frac{\partial S_\nu \phi_\nu^i}{\partial t} - \sum_{j<n} \frac{\partial S_\nu \phi_\nu^i}{\partial x_j} B_j(S_\nu v_\nu^{i-1}) \right) \frac{\partial_\theta S_\nu v_\nu^{i-1}}{\partial_\theta S_\nu \phi_\nu^i} \Psi_\nu^i$$

$$- \left(B_n(S_\nu v_\nu^i) - \frac{\partial S_\nu \phi_\nu^i}{\partial t} - \sum_{j<n} \frac{\partial S_\nu \phi_\nu^i}{\partial x_j} B_j(S_\nu v_\nu^i) \right) \frac{\partial_\theta S_\nu v_\nu^i}{\partial_\theta S_\nu \phi_\nu^i} \Psi_\nu^i$$

Le schéma de Nash-Moser associé sera alors :

$$\mathcal{B}_c(v_{\nu+1}^{i-1}, v_{\nu+1}^i, \phi_{\nu+1}^i) - \mathcal{B}_c(v_\nu^{i-1}, v_\nu^i, \phi_\nu^i) = \Delta_\nu b_\nu^i + \Delta_\nu \tau_\nu^i$$

$$\tau_\nu^i = \tau_{1\nu}^i + \tau_{2\nu}^i$$

$$\tau_{1,\nu}^i = (d\mathcal{B}_c(v_\nu^{i-1}, v_\nu^i, \phi_\nu^i) - d\mathcal{B}_c(S_\nu v_\nu^{i-1}, S_\nu v_\nu^i, S_\nu \phi_\nu^i))(\dot{v}_\nu^{i-1}, \dot{v}_\nu^i, \dot{\phi}_\nu^i)$$

$$\tau_{2,\nu}^i = \frac{1}{\Delta_\nu} \left\{ \mathcal{B}_c(v_{\nu+1}^{i-1}, v_{\nu+1}^i, \phi_{\nu+1}^i) - \mathcal{B}_c(v_\nu^{i-1}, v_\nu^i, \phi_\nu^i) - \Delta_\nu d\mathcal{B}_c(v_\nu^{i-1}, v_\nu^i \phi_\nu^i) \cdot (\dot{v}_\nu^{i-1}, \dot{v}_\nu^i, \dot{\phi}_\nu^i) \right\}$$

b_ν^i vérifiant $b_\nu^i = d\mathcal{B}_c(S_\nu v_\nu^{i-1}, S_\nu v_\nu^i, S_\nu \phi_\nu^i)(\dot{v}_\nu^{i-1}, \dot{v}_\nu^i, \dot{\phi}_\nu^i)$ et choisi de sorte que $\sum_{k\leq\nu} \Delta_\nu b_\nu^i + S_\nu(\sum_{k\leq\nu} \Delta_\nu \tau_\nu^i) = 0$.

Le schéma au bord d'une raréfaction est similaire à celui d'Alinhac.

Il reste à préciser les espaces utilisés et les régularisations : donnons un exemple dans le domaine $]i, 1+i[\times \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}^{n-1}$ en supposant que $\theta = i$ est une surface de raréfaction, $\theta = i+1$ une surface de choc.

$$s \quad \text{pair} \quad \mathcal{E}_s = \Big\{ u/(t\partial_t)^{\alpha_1} \partial_t^{\alpha_2} \partial_\theta^{\beta_2} ((\theta - i)\partial_\theta)^{\beta_1} \partial_y^\delta (t^\gamma u) \in L^2$$

$$\text{si} \quad 2\alpha_2 + 2\beta_2 + \alpha_1 + \beta_1 + |\delta| \leq s \}$$

Il se trouve que ces espaces $\mathcal{E}_s$ ont une caractérisation en théorie de Littlewood Paley :

$$\mathcal{E}_s = \{u/t^{-\gamma} u \in \widetilde{\mathcal{E}}_s\}$$

Introduisons $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ et $\psi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ avec supp $\psi \subset \{1 \leq |\xi| \leq 3\}$ telles que $\varphi(\xi) + \sum_i^\infty \phi(2^{-j}\xi) = 1$.

Alors $\widetilde{\mathcal{E}}_s$ peut être défini par : $\{u/|(1+2^p|\theta-i-1|+2^q+2^{p/2}+2^{r/2}+2^r t)^s u_{pqr} \leq C\varepsilon_{pqr}$ et $\varepsilon_{pqr} \in \ell^2\}$ où $u_{pqr} = \psi(2^{-p}D_\theta)\psi(2^{-q}D_y)\psi(2^{-r}D_t)$

On introduit alors des régularisations

$$\widetilde{M}_s u = \sum_{p,q,r} \widetilde{\psi}(2^{-r}D_\theta)\widetilde{\psi}(2^{-q}D_y)\widetilde{\psi}(2^{-r}D_t)$$

$$\left(\varphi_0\left(\frac{2^q + 2^{p/q} + 1 + 2^p|\theta - i - 1| + 2^{r/2} + \cdots}{s}\right)\right) u_{pqr}$$

où $\widetilde{\psi}$ est à support dans $\{\frac{1}{3} \leq |\xi| \leq 4\}$ et $\Sigma\widetilde{\psi}(2^{-j}\xi) = 1$. Les $\widetilde{M}_s$ vérifient alors les conditions usuelles de régularisations (cf. Hörmander). Les régularisations sur $\mathcal{E}_s$ sont obtenues par conjugaison :

$$M_s u = t^\gamma \widetilde{M}_s(b^{-\gamma}u)$$

Bibliographie

[1] S. Alinhac, Existence d'ondes de raréfaction pour des systèmes quasi-linéaires hyperboliques multidimensionnels. CPDE 1989.

[2] S. Alinhac, Unicité d'ondes de raréfaction pour des systèmes quasi-linéaires hyperboliques multidimensionnels. Indiana Univ. Math. J. 1989.

[3] M. Bézard, Problème de Riemann généralisé pour un système de lois de conservation multidimensionel vraiment non linéaire (à paraître).

[4] J.M. Bony, Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non-linéaires. Ann. Sci. ENS 1981.

[5] R.S. Hamilton, The inverse function theorem of Nash and Moser. Bull. AMS 1982.

[6] Harabetian, A convergent series expansion for hyperbolic systems of conservation laws Trans AMS vol. 294 p.383-424 (1986).

[7] L. Hörmander, The boundary problems of physical geodesy Archiv. Rat. Mech. Anal. vol. 62 p.1-52, 1976.

[8] L. Hörmander, Inverse function theorem Cours stanford Eté 1977.

[9] H.O. Kreiss, Initial boundary value problems for hyperbolic systems. CPAM 1970.

[10] P.D. Lax, Hyperbolic systems of conservation laws II. CPAM 1957.

[11] A. Majda, The stability of multidimensional shock fronts Memoir AMS 275.

[12] A. Majda, The existence of multidimensional shock fronts Memoir AMS 281.

[13] A. Majda-S. Osher, Initial-boundary value problems for hyperbolic equations with uniformly characteristic boundary. CPAM 1975.

[14] G. Métivier, Interaction de deux chocs pour un système de deux lois de conservation, en dimension deux d'espace. Trans. AMS vol. 296 p.431-479 1986.

[15] G. Métivier, Ondes soniques J.M.P.A. 1990.

[16] A. Mokrane, Problèmes mixtes hyperboliques non linéaires. Thèse Rennes 1987.

[17] J. Rauch, Symetric positive systems with boundary characteristic of constant multiplicity. Trans. AMS vol. 291 p.167-187 (1985).

[18] M. Tougeron, Ondes de gradient multidimensionnelles, Preprint Rennes 1989.