Journées Équations aux dérivées partielles

François Golse

Moyennisation des champs de vecteurs et ÉDP

Journées Équations aux dérivées partielles (1990), p. 1-17
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1990____A16_0>

MOYENNISATION DES CHAMPS DE VECTEURS ET EDP

par François Golse
Département de Mathématiques
Université Paris VII

1. Ce travail est consacré aux relations existant entre l'approximation des trajectoires de champs de vecteurs d'une part, et l'homogénéisation (ou moyennisation) de l'équation de Liouville adjointe qui leur est associée d'autre part. Le point de vue que j'emploierai systématiquement est d'utiliser des méthodes et des énoncés portant sur les équations aux dérivées partielles (ici sur les équations de Liouville adjointes) pour en déduire des informations sur les flots des trajectoires des champs de vecteurs associés. Tous les champs de vecteurs considérés ici sont définis sur un espace euclidien ou sur le produit d'un espace euclidien par un tore et leurs flots sont supposés complets et admettent une mesure invariante; pour simplifier, on supposera que cette mesure invariante est la mesure de Lebesgue (à normalisation près). En général on appelle équation de Liouville du champ de vecteurs u l'EDP pour une densité de mesure μ par rapport à l'élément de volume

$$\partial_t\mu+\mathrm{div}(\mu u)=0 \qquad (1)$$

et son équation adjointe pour une fonction est

$$\partial_t f+u.\nabla_x f=0 \qquad (2)$$

où $u.\nabla_x$ désigne la dérivée de Lie par rapport à u. Evidemment comme ici le flot de u préserve le volume, on a (d'après le théorème de Liouville) divu=0 et les EDP (1) et (2) coïncident de sorte qu'on les appellera indifféremment équation de Liouville associée à u. Enfin, on rappelle que la solution de (2) pour la donnée initiale

$$f(0,x)=\phi(x) \qquad (3)$$

est

$$f(t,x)=\phi(X(t,x)) \qquad (4)$$

où X est le flot de -u, c'est à dire que

$$\partial_t X+u(X)=0;\ X(0,x)=x \qquad (5)$$

Ceci est classique dans le cas où le champ u est localement lipschitzien, mais R. DiPerna et P.-L. Lions [1] ont établi un analogue de ce résultat dans le cas où $u\in W^{1,1}{}_{loc}$ avec $\mathrm{div}u\in L^\infty{}_{loc}$; ils montrent en fait que l'on peut définir un unique flot généralisé de -u en écrivant que la solution de (2) avec la condition initiale (3) (où $\phi\in L^\infty$) est donnée par (4). L'idée générale de [1] ainsi que du présent article est donc que pour étudier les trajectoires de (5), on se ramène à étudier les images non linéaires du flot, i.e. la solution (4) de (2)-(3).

2. Commençons par une remarque qui sera d'un usage constant dans la suite.

Lemme 1. Soit u_ε une famille de champs de vecteurs de classe $W^{1,1}{}_{loc}$ avec $\mathrm{div} u_\varepsilon \in L^\infty{}_{loc}$; on suppose qu'il existe un champ de vecteurs u de classe $W^{1,1}{}_{loc}$ avec $\mathrm{div} u \in L^\infty{}_{loc}$ tel que la solution f_ε de

$$\partial_t f_\varepsilon + u_\varepsilon . \nabla_x f_\varepsilon = 0;\ f_\varepsilon(0,x) = \phi(x) \tag{6}$$

converge au sens des distributions vers la solution f de

$$\partial_t f + u . \nabla_x f = 0;\ f(0,x) = \phi(x) \tag{7}$$

pour toute donnée initiale ϕ bornée. Alors le flot X_ε de u_ε converge vers le flot X de u dans $L^p{}_{loc}$ pour $1 \le p < \infty$ (et pour presque tout (t,x) à extraction près). Et en particulier la solution f_ε de (6) converge vers la solution f de (7) dans $L^p{}_{loc}$ pour $1 \le p < \infty$ (et pour presque tout (t,x) à extraction près).

(Pour démontrer un tel énoncé, on considère une mesure de Young $\nu_{(t,x)}$ de la suite X_ε définie pour presque tout (t,x) comme limite vague de la suite de mesures de probabilités (en λ) $\delta(\lambda - X_\varepsilon(t,x))$ définie sur $\mathbf{R}^N$. Utilisant l'hypothèse de l'énoncé ainsi que la formule (4) pour des fonctions ϕ localement convexes, on obtient que l'inégalité de Jensen pour $\nu_{(t,x)}$ est en fait une égalité, d'où, pour presque tout (t,x), $\nu_{(t,x)}$ est une masse de Dirac, ce qui prouve le résultat).◊

Cet énoncé très simple montre tout l'intérêt qu'il y a à étudier l'équation de Liouville d'un champ de vecteurs pour obtenir des renseignements sur le flot de ses trajectoires. Dans le cas où u_ε converge vers u par exemple dans L^∞ faible *, on remplace l'étude fastidieuse de la convergence pp. en t pour presque toute trajectoire par le fait que les produits $f_\varepsilon u_\varepsilon$ et $f_\varepsilon \mathrm{div} u_\varepsilon$ convergent au sens des distributions vers fu et fdivu. Ce type de convergence résulte usuellement de résultats de compacité (ou de régularité uniforme en ε) éventuellement partiels sur la famille f_ε que l'on obtient usuellement en utilisant des propriétés microlocales ou ergodiques des champs de vecteurs considérés.

3. On sait, d'après un résultat de Liouville, que si H est un hamiltonien intégrable en dimension 2n (i.e. admettant n intégrales premières en involution) dont les surfaces d'énergie sont compactes connexes, il admet une réduction en variables action-angles, c'est à dire que l'on peut trouver un système de coordonnées canoniques (I,ϕ) où I représente les variables d'action et trouver un système de coordonnées canoniques (I,ϕ) où I représente les variables d'action et varie dans $\mathbf{R}^N$ et ϕ les variable angulaires et varie dans $\mathbf{T}^N=\mathbf{R}^N/(2\pi\mathbf{Z})^N$. Par extension, nous appellerons champs de vecteurs intégrable un champ de vecteurs défini sur $\mathbf{R}^M\mathrm{x}\ \mathbf{T}^N$ de la forme $(I,\phi)\rightarrow(0,\omega(I))$. Il est classique que le flot d'un tel champ de vecteur restreint au tore invariant $\{I^*\}\mathrm{x}\ \mathbf{T}^N$ est ergodique si et seulement si les coordonnées de $\omega(I^*)$ dans un certain repère orthonormé de $\mathbf{R}^N$ définissent une famille de $\mathbf{R}$ libre sur $\mathbf{Q}$. Et la vitesse d'ergodisation d'une fonction définie sur $\mathbf{T}^N$ s'estime après représentation en série de Fourier grâce au calcul élémentaire suivant: si $\omega(I^*).k\neq 0$ pour $k\in\mathbf{Z}^N$, alors

$$\int \exp(ik.\phi)d\phi/(2\pi)^N=0 \tag{8}$$

$$T^{-1}\int_0^T\exp[ik.(\omega(I^*)t+\phi_0)]dt=(ik.\omega(I^*)T)^{-1}\exp(ik.\phi_0)[\exp(ik.\omega(I^*)T)-1]$$
$$=O([k.\omega(I^*)T]^{-1}) \tag{9}$$

En d'autres termes, la vitesse d'ergodisation est d'autant plus lente que le dénominateur $k.\omega(I^*)$ est petit (dans la terminologie consacrée par l'usage, on appelle les termes $k.\omega(I^*)$ les "petits diviseurs" lorsqu'ils donnent lieu à une vitesse d'ergodisation trop faible). Comme en outre l'équation $\omega(I).\xi=0$ pour $\xi\in\mathbf{R}^N$ définit la variété caractéristique de l'opérateur $\omega(I).\nabla_x$ agissant sur $\mathbf{R}^N{}_I\mathrm{x}\ \mathbf{R}^N{}_x$, on entrevoit le lien entre analyse microlocale et ergodicité dans le cas des champs de vecteurs intégrables. Ce lien est l'un des points que je vais détailler dans la suite de ce travail.

4. Les petits diviseurs interviennent dans la résolution de l'équation homologique

$$\omega(I).\nabla_\phi S=a;\ \phi\in\mathbf{T}^N,\ \int a(I,\phi)d\phi/(2\pi)^N=0 \tag{10}$$

dont la solution est la fonction génératrice de la transformation canonique permettant de réduire formellement une perturbation hamiltonienne d'un hamiltonien intégrable à un hamiltonien intégrable (voir Arnold [2]). La solution de (10) s'écrit, après développement en série de Fourier:

$$S(I,\phi)=\Sigma_{k\neq 0}\,[ik.\omega(I)]^{-1}\hat{a}(I,k)e^{ik.\phi} \tag{11}$$

(en notant â la transformée de Fourier de a en la variable ϕ) et il est clair que la série (11) ne converge pas forcément pour tout I (et en tout cas pas uniformément en I): la convergence est d'autant meilleure qu'il y a moins de petits diviseurs, ce qui dépend de la qualité de l'approximation des coordonnées homogènes de $\omega(I)$ par des rationnels. Siegel et Kolmogorov utilisent la notion d'approximation diophantienne pour résoudre (11): on a l'énoncé de régularité suivant:

Proposition 2. <u>Supposons que</u> $\omega(I)$ <u>vérifie la condition de Diophante de paramètres</u> (C,τ):

$$|k.\omega(I)|\geq C|k|^{-\tau},\ \underline{\text{pour tout}}\ k\in\mathbf{Z}^N\backslash 0 \tag{12}$$

<u>Alors, si</u> $a(I,\phi)$ <u>est de classe</u> C^m <u>en</u> ϕ <u>localement uniformément en</u> I <u>avec</u> $m>\tau+N+1$, <u>la solution</u>

S de (10) est de classe $C^{m-\tau-N-1}$ en ϕ localement uniformément en I.
L'idée est que la condition de Diophante limite l'apparition des petits diviseurs aux grands nombres d'onde, pour lesquels leur effet est contrebalancé par la régularité de a.
Or, génériquement, les petits diviseurs n'apparaissent que pour peu de valeurs de I (les diviseurs nuls sont à peu de choses près l'image réciproque de **Q** par une application régulière).

Une idée pour les éliminer consiste à regarder la régularité en ϕ des moyennes en I de solutions de l'équation homologique (ainsi, on compense les singularités produites par les petits diviseurs en les intégrant sur un ensemble de mesure petite). Nous appelons cette opération "moyennisation en vitesse" (le résultat le plus naturel consistant à considérer le cas où $\omega(I)=I$ qui correspond à l'hamiltonien du point matériel libre $|I|^2/2$.
Voici un premier énoncé qui est le prototype des résultats de moyennisation en vitesse des équations de transport.
Théorème 3. (Golse-Lions-Perthame-Sentis [3]) Soit m(dI) une mesure bornée sur $\mathbf{R}^N{}_I$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes:

i) il existe $0<\gamma<2$ et $C>0$ tels que $m(\{I\in \mathbf{R}^N{}_I \text{ t.q. } |\omega(I).e|<\alpha\})\leq C\alpha^\gamma$ pour tout $e\in S^{N-1}$;

ii) si $f\in L^2(\mathbf{R}^N{}_I x\ \mathbf{T}^N{}_\phi;m(dI)d\phi)$ et $\omega(I).\nabla_\phi f\in L^2(\mathbf{R}^N{}_I x\ \mathbf{T}^N{}_\phi;m(dI)d\phi)$, la moyenne en action $\int f(I,\phi)m(dI)\in H^{\gamma/2}(T^N)$ et on a l'inégalité:

$$|(-\Delta_\phi)^{\gamma/4}\int f(I,\phi)m(dI)|_2\leq C\|f\|_2{}^{1-\gamma/2}.\|\omega(I).\nabla_\phi f\|_2{}^{\gamma/2} \qquad (13)$$

où on note $|.|_p$ la norme de $L^p(d\phi)$ et $\|.\|_p$ la norme de $L^p(m(dI)d\phi)$ et où C est une constante positive qui ne dépend que de la mesure m.

Il existe des résultats analogues si l'on remplace l'opérateur $\omega(I).\nabla_\phi$ par un opérateur pseudo-différentiel $P(I,\phi,D_I,D_\phi)$ (voir Gérard-Golse [4], Gérard [5]). Cela tient à la nature microlocale du théorème 3: on effectue un découpage de l'espace de Fourier en $\{I\in \mathbf{R}^N{}_I \text{ t.q. } |\omega(I).e|>\alpha\}$ où l'opérateur $\omega(I).\nabla_\phi$ est microlocalement elliptique et son complémentaire $\{I\in \mathbf{R}^N{}_I \text{ t.q. } |\omega(I).e|\leq\alpha\}$ qui est de mesure petite. Toutefois, dans la suite, on se servira intensivement de l'inégalité d'interpolation (13). Cette inégalité ne persiste pas dans le cas d'un opérateur pseudo-différentiel quelconque $P(I,\phi,D_I,D_\phi)$: c'est une conséquence de l'homogénéité en ϕ de l'opérateur $\omega(I).\nabla_\phi$.

5. Voici une première application de la moyennisation en vitesse qui est de caractère ergodique (on verra pourquoi dans le §6). Ce paragraphe et le suivant contiennent les résultats sur l'équation homologique (11) dont on se servira constamment dans la suite.
D'abord, puisqu'on ne peut résoudre l'équation homologique (10) globalement en I (en effet, une condition de Diophante de type (12) n'est génériquement pas satisfaite avec les paramètres

(C,τ) uniformes en I), on va la remplacer par une régularisation qui supprime l'effet des petits diviseurs:

$$\lambda\chi+\omega(I).\nabla_\phi\chi=a;\ \phi\in \mathbf{T}^N,\ \int a(I,\phi)d\phi/(2\pi)^N=0 \tag{14}$$

où $\lambda>0$. Cette équation régularisée admet pour tout $\lambda>0$ une solution unique pour laquelle on rappelle les deux bornes évidentes

$$\|\chi\|_2\leq\|a\|_2/\lambda \tag{15}$$

$$\|\omega(I).\nabla_\phi\chi\|_2\leq 2\|a\|_2 \tag{16}$$

Lorsque λ tend vers zéro, la solution de l'équation (14) tend vers l'expression (11) qui est la solution formelle de l'équation homologique, et dont on sait qu'elle se contrôle d'autant plus mal qu'il y a plus de petits diviseurs dans la série (11). On s'attend donc à ce que l'explosion de χ lorsque λ tend vers zéro se fasse selon une puissance de λ d'autant plus faible qu'il y a peu de petits diviseurs dans la série (11), quitte à remplacer dans la première inégalité (15) la norme L^2 de a, $\|a\|_2$ par une norme non différentielle (c'est à dire ne comprenant aucun poids croissant vers l'infini en $|k|$) différente. Cette intuition est confirmée par l'inégalité d'interpolation (13) couplée avec (15) -remarquer que λ n'apparaît pas dans le contrôle de $\omega(I).\nabla_\phi\chi$: si la mesure m vérifie l'hypothèse i) du théorème 3:

$$|(-\Delta_\phi)^{\gamma/4}\int\chi(I,\phi)m(dI)|_2\leq C\|\chi\|_2^{1-\gamma/2}.\|\omega(I).\nabla_\phi\chi\|_2^{\gamma/2}\leq C\|a\|_2/\lambda^{1-\gamma/2}. \tag{17}$$

Evidemment, grâce à l'inégalité de Poincaré-Wirtinger, on a

$$|(-\Delta_\phi)^{\gamma/4}\int\chi(I,\phi)m(dI)|_2\geq C|\int\chi(I,\phi)m(dI)|_1$$

mais $|\int\chi(I,\phi)m(dI)|_1\neq\|\chi\|_1$. Toutefois, on a le

Lemme 4. Supposons que la mesure m vérifie l'hypothèse i) du théorème 3. Alors la solution χ de (14) vérifie

$$\|\chi\|_2\leq C|||a|||/\lambda^{1-\gamma/2} \tag{18}$$

où $|||a|||^2=(2\pi)^{-N}\Sigma_{k\neq 0}\sup_I|\hat{a}(I,k)|^2$ (19)

Preuve. Définissons $f_k(I,\phi)$ par

$$\lambda f_k+\omega(I).\nabla_\phi f_k=e^{ik.\phi},\ k\neq 0 \tag{20}$$

Alors $f_k(I,\phi)=(\lambda+i\omega(I).k)^{-1}e^{ik.\phi}$, $\chi(I,\phi)=\Sigma_{k\neq 0}\hat{a}(I,k)f_k(I,\phi)$ et d'après la formule de Plancherel:

$$\|\chi\|_2^2=(2\pi)^{-N}\Sigma_{k\neq 0}\int|\hat{a}(I,k)f_k(I,\phi)|^2m(dI)$$

$$\leq(2\pi)^{-N}(\sup_{k\neq 0}\int|f_k(I,\phi)|^2m(dI)).\Sigma_{k\neq 0}\sup_I|\hat{a}(I,k)|^2$$

$\leq (2\pi)^{-N}(\sup_{k\neq 0} \int |f_k(I,\phi)|^2 m(dI)).\Sigma_{k\neq 0} \sup_I |\hat{a}(I,k)|^2$

$$= (2\pi)^{-N}(\sup_{k\neq 0} \int |\lambda+i\omega(I).k|^{-2} m(dI)).|||a|||^2 \qquad (21)$$

Or l'intégrale $\int |\lambda+i\omega(I).k|^{-2}m(dI)$ a déjà été calculée pour la démonstration du théorème 3. Il est donc inutile de refaire le calcul ici, et on n'aura qu'à appliquer l'inégalité d'interpolation (13).

Introduisons $g_k(I,\phi)$ défini par

$$\lambda g_k - \omega(I).\nabla_\phi g_k = e^{ik.\phi},\ k\neq 0 \qquad (22)$$

et remarquons que

$$\int |\lambda+i\omega(I).k|^{-2}m(dI) = \int (f_k g_k)^\wedge(I,2k)m(dI) \qquad (23)$$

(on note f^ la transformée de Fourier de f en la variable ϕ). Observons que

i) en multipliant (20) par g_k:

$$2\lambda f_k g_k + \omega(I).\nabla_\phi(f_k g_k) = e^{ik.\phi}(f_k+g_k)$$

et donc que

$$\|f_k g_k\|_2 \leq \|f_k+g_k\|_2/(2\lambda),\ \|\omega(I).\nabla_\phi(f_k g_k)\|_2 \leq 2\|f_k+g_k\|_2 \qquad (24)$$

ii) en additionnant (20) et (22):

$$\lambda(f_k+g_k) - \omega(I).\nabla_\phi (f_k+g_k) = 2\lambda f_k$$

de sorte que

$$\|f_k+g_k\|_2 \leq 2\|f_k\|_2$$

et donc, en vertu de (24)

$$\|f_k g_k\|_2 \leq \|f_k\|_2/\lambda,\ \|\omega(I).\nabla_\phi(f_k g_k)\|_2 \leq 4\|f_k\|_2 \qquad (25)$$

Appliquons maintenant le théorème 3, et en particulier l'inégalité (13):

$$|(-\Delta_\phi)^{\gamma/4} \int f_k g_k(I,\phi)m(dI)|_2 \leq C\|f_k\|_2/\lambda^{1-\gamma/2}$$

d'où d'après l'inégalité de Poincaré-Wirtinger

$$| \int f_k g_k(I,\phi)m(dI)|_1 = | \int |f_k|^2(I,\phi)m(dI)|_1 \leq C| \int f_k g_k(I,\phi)m(dI)|_2 \leq C\|f_k\|_2/\lambda^{1-\gamma/2}$$

d'où enfin l'inégalité

$$\|f_k\|_2 \leq C/\lambda^{1-\gamma/2}$$

où C est une constante indépendante de k, ce qui, avec (21) donne l'estimation annoncée.◊

6.*Théorème abélien et théorème taubérien pour l'équation homologique.*

Dans ce paragraphe, on verra que l'inégalité (18) correspond exactement à une propriété d'ergodicité du groupe à un paramètre S_t: $\phi \rightarrow \phi + t\omega(I)$ sur le tore. Pour des champs non intégrables, on ne peut en général pas étudier la vitesse d'ergodisation au moyen de petits diviseurs. Ainsi, alors qu'un argument de type microlocal permet d'établir (18) pour les champs de vecteurs intégrables, il faut revenir à la notion (plus générale dans ce cas précis) d'ergodicité diviseurs. Ainsi, alors qu'un argument de type microlocal permet d'établir (18) pour les champs de vecteurs intégrables, il faut revenir à la notion (plus générale dans ce cas précis) d'ergodicité pour obtenir des analogues plus faibles de (18) dans le cas non intégrable. Soit donc un champ de vecteurs $u=u(x,y)\in W^{1,\infty}_{loc}(\mathbf{R}^N x\mathbf{T}^N)^N$, tel que $\mathrm{div}_y u=0$; on supposera pour simplifier que $u(x,y)=0$ dès que $|x|>R$, où R est une constante positive. On considère l'équation

$$\lambda\chi_{\lambda,\varepsilon}+u(x,y).\nabla_y\chi_{\lambda,\varepsilon}+\varepsilon u(x,y).\nabla_x\chi_{\lambda,\varepsilon}=a(x,y) \tag{26}$$

Lemme 5. Soit $\lambda=\lambda(\varepsilon)>0$ tel que $\lambda(\varepsilon)\to 0$ et $\varepsilon/\lambda(\varepsilon)\to 0$ lorsque $\varepsilon\to 0$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes:

i) pour presque tout x^* tel que $|x^*|\leq R$, le flot des trajectoires de l'EDO

$$Z'(t,x^*,y)=-u(x^*,Y);\quad Z(0,x^*,y)=y \tag{27}$$

ergodise la fonction $a(x^*,.)$ - c'est à dire que

$$(1/T)\int_0^T a(x^*, Z'(t,x^*,y))dt\to\int a(x^*,y)dy/(2\pi)^N=0 \text{ pp. en } y \text{ lorsque } T\to+\infty; \tag{28}$$

ii) $\lambda(\varepsilon)\chi_{\lambda(\varepsilon),\varepsilon}\to 0$ pp. en (x,y) et dans $L^p(\mathbf{R}^N x\mathbf{T}^N)^N$ pour $1\leq p<\infty$ lorsque $\varepsilon\to 0$.

Preuve. On calcule

$$\lambda(\varepsilon)\chi_{\lambda(\varepsilon),\varepsilon}(x,y)=\lambda(\varepsilon)\int_0^\infty e^{-\lambda(\varepsilon)t}\, a(X_\varepsilon(t,x,y);Y_\varepsilon(t,x,y))dt \tag{29}$$

où $(X_\varepsilon,Y_\varepsilon)$ est le flot de l'EDO

$$X'_\varepsilon(t,x,y)=\varepsilon u(X_\varepsilon,Y_\varepsilon),\ Y'_\varepsilon(t,x,y)=u(X_\varepsilon,Y_\varepsilon);\ X_\varepsilon(0,x,y)=x,\ Y_\varepsilon(0,x,y)=y \tag{30}$$

On introduit ensuite une fonction $\mu(\varepsilon)>0$ telle que $\varepsilon/\mu(\varepsilon)\to 0$ et $\mu(\varepsilon)/\lambda(\varepsilon)\to 0$. Il est alors clair que

$$\lambda(\varepsilon)\chi_{\lambda(\varepsilon),\varepsilon}(x,y)=\lambda(\varepsilon)\int_0^\infty e^{-\lambda(\varepsilon)t}\, a(x;Z(t,x,y))dt+o(1) \tag{31}$$

Pour démontrer que i) implique ii), on commence par intégrer par parties (ce qui correspond au théorème abélien):

$$\lambda(\varepsilon)\int_0^\infty e^{-\lambda(\varepsilon)t}\, a(x;Z(t,x,y))dt=\lambda(\varepsilon)^2\int_0^\infty te^{-\lambda(\varepsilon)t}\,(1/t)\int_0^t a(x;Z(s,x,y))dsdt$$

$$=\int_0^\infty \tau e^{-\tau}\,(\lambda(\varepsilon)/\tau)\int_0^{\tau/\lambda(\varepsilon)} a(x;Z(s,x,y))dsd\tau\to 0 \tag{32}$$

par convergence dominée lorsque $\varepsilon\to 0$ en vertu de l'hypothèse i). Pour établir la réciproque, on applique le théorème taubérien de Wiener et Pitt cité dans Rudin [6] - p.222, exercice 13 - à l'intégrale

$$\lambda(\varepsilon)^2\int_0^\infty te^{-\lambda(\varepsilon)t}\,(1/t)\int_0^t a(x;Z(s,x,y))dsdt=\int_0^\infty \lambda(\varepsilon)^2t^2e^{-\lambda(\varepsilon)t}\,[(1/t)\int_0^t a(x;Z(s,x,y))ds]dt/t$$

$$=K*\psi_{(x,y)}(1/\lambda(\varepsilon))\to 0 \text{ lorsque } \lambda(\varepsilon)\to 0 \tag{33}$$

avec $K(z)=z^{-2}e^{-1/z}$ (où $*$ désigne le produit de convolution sur le groupe multiplicatif $\mathbf{R}^{+*}$ muni de sa mesure de Haar dt/t et où $\psi_{(x,y)}(t)=(1/t)\int_0^t a(x;Z(s,x,y))ds$). En effet, la transformée de de sa mesure de Haar dt/t et où $\psi_{(x,y)}(t)=(1/t)\int_0^t a(x;Z(s,x,y))ds$). En effet, la transformée de Mellin de K est $K\hat{}(\tau)=\int_0^\infty z^{-2}e^{-1/z}z^{-i\tau}dz/z=\int_0^\infty e^{-z}z^{2+i\tau}dz/z=\Gamma(2+i\tau)\neq 0$ (puisque $1/\Gamma$ est entière). On observe ensuite que $\partial_t\psi_{(x,y)}(t)=O(1/t)$ puisque a est bornée, ce qui permet d'appliquer alors le théorème taubérien cité.◊

Evidemment, on peut également énoncer le lemme suivant qui correspond au cas où u ne dépend pas de x (et dont la preuve est la même que ci-dessus). Soit donc $u=u(y)\in W^{1,\infty}(\mathbf{T}^N)^N$, tel que $\mathrm{div}_y u=0$. On considère l'équation

$$\lambda\chi_\lambda+u(x,y).\nabla_y\chi_\lambda=a(x,y) \tag{34}$$

Lemme 6. Les deux assertions suivantes sont équivalentes:

i) le flot Y des trajectoires de -u ergodise la fonction a(x,.) pour presque tout x tel que $|x|\leq R$ - c'est à dire que

$(1/T)\int_0^T a(x,Y(t,y))dt\rightarrow\int a(x,y)dy/(2\pi)^N=0$ pp. en (x,y) lorsque $T\rightarrow+\infty$;

ii) $\lambda\chi_\lambda\rightarrow 0$ pp. en (x,y) et dans $L^p(\mathbf{T}^N)^N$ pour $1\leq p<\infty$ lorsque $\varepsilon\rightarrow 0$.

7. *Quelques remarques*. D'abord, dans le cas où N=2, on dispose d'une classification des champs de vecteurs réguliers sans points singuliers sur le tore possédant une mesure invariante de densité régulière par rapport à la mesure de Lebesgue. Cette classification est dûe à Kolmogorov [7] et permet de tester très simplement si le flot des trajectoires d'un tel champ de vecteurs sur $\mathbf{T}^2$ est ergodique au moyen d'un de ses nombres de rotation. Je vais en décrire le principe dans le cadre qui nous occupe. Soit donc un champ de vecteurs

$u=u(x,y)\in C^2(\mathbf{R}^N x\mathbf{T}^N)^N$, tel que $\mathrm{div}_y u=0$, u(x,y)=0 dès que $|x|>R$, où R est une constante positive et u(x,.) ne s'annule jamais pour $|x|\leq R$. On définit pour $|x|\leq R$ un nombre de rotation $\rho(x)$ du champ de vecteurs u(x,.) par

$$\rho(x)=M.(\int u_1(x,y)dy/4\pi^2,\int u_2(x,y)dy/4\pi^2) \tag{35}$$

où $M\in PSL_2(\mathbf{Z})$ (on rappelle que M agit de la façon suivante sur $\mathbf{R}^2$

$$M=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d\end{pmatrix},\ (a,b,c,d)\in\mathbf{Z}^4,\begin{vmatrix} a & c \\ b & d\end{vmatrix}=1,\ M.(x,y)=\frac{ax+cy}{bx+dy}$$

de sorte que $\{M.(x,y), M\in PSL_2(\mathbf{Z})\}$ est soit inclus dans $\mathbf{Q}$ soit inclus dans $\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}$. Dans le premier cas, on dira que la classe de (x,y) dans $PSL_2(\mathbf{Z})\backslash\mathbf{R}^2$ est rationnelle, dans le deuxième cas, on dira que la même classe est irrationnelle). Ainsi, un nombre de rotation de u(x,y) pour $|x|\leq R$ est un représentant de la classe du champ moyen $\int u(x,y)dy/4\pi^2$ dans $PSL_2(\mathbf{Z})\backslash\mathbf{R}^2$.

Le théorème de Kolmogorov assure alors qu'il existe un système de coordonnées convenable dans lequel le champ u(x,.) se met sous la forme $F(x,y)(1,\rho(x))$ où F est une fonction scalaire strictement positive. (En fait le résultat de Kolmogorov s'applique à un champ admettant une mesure invariante de classe au moins C^5; ces hypothèses de régularité sur le champ et sa mesure invariante ne sont pas superflues: il existe un contre exemple dû à Denjoy lorsque le champ est de classe $C^{2-\varepsilon}$, voir Herman [8]).

Voici donc une proposition qui est une conséquence du théorème de Kolmogorov:

Proposition 7. Pour tout x^* tel que $|x^*|\leq R$, le flot $Z(t,x^*,.)$ sur $\mathbf{T}^2$ est ergodique si et seulement si les nombres de rotations de $u(x^*,.)$ sont irrationnels.

Cette dernière proposition permet donc de tester la validité de l'hypothèse i) dans les lemmes 5 et 6.

On peut donc fabriquer une mesure naturelle sur

$\mathbf{K}=\{u\in C^2(\mathbf{T}^2)^2$ t.q. $\mathrm{div}u=0$ et u ne s'annule jamais sur $\mathbf{T}^2\}$

pour laquelle l'ensemble des champs de vecteurs dont le flot est non ergodique est négligeable.

On considère l'application r de $\mathbf{K}$ dans $\mathbf{R}$: $u\to\rho$ qui à un champ u associe un de ses nombres de rotation (par exemple $\rho=I.(\int u_1(y)dy/4\pi^2, \int u_2(y)dy/4\pi^2)$ où I est la matrice identité). On définit alors une mesure μ sur $\mathbf{K}$ en posant $\mu=r^{-1}(d\rho)$, pullback de la mesure de Lebesgue.

L'ensemble des champs de vecteurs de $\mathbf{K}$ dont le flot n'est pas ergodique est $\mathbf{K}_{ne}=r^{-1}(\mathbf{Q})$ donc $\mu(\mathbf{K}_{ne})=0$. La question de l'existence d'une telle mesure sur des tores de dimension plus grande est peut-être ouverte (en tout cas, le théorème de Kolmogorov qui permet de la construire en dimension 2 ne s'étend pas en dimension supérieure). Ainsi, on voit que pour μ-presque tout champ de $\mathbf{K}$ l'hypothèse i) du lemme 6 est satisfaite.

Passons maintenant à la situation où le flot du champ -u du lemme 6 n'est pas ergodique. On sait d'après le théorème taubérien que $\lambda\chi_\lambda$ ne tend pas vers zéro lorsque λ tend vers zéro. On peut alors préciser d'avantage le comportement de $\lambda\chi_\lambda$ grâce à la décomposition de $\mathbf{T}^N$ en composantes ergodiques du flot Y. Soit donc ξ la partition de $\mathbf{T}^N$ en composantes ergodiques de Y et $\{\nu_C: C\in\xi\}$ le système canonique de mesures conditionnelles provenant de la mesure de Lebesgue de $\mathbf{T}^N$ qui lui est associé. D'après un théorème de von Neumann et Rokhlin [9,10], pour presque toute composante ergodique C de ξ, le flot induit par Y sur C est ergodique pour la mesure ν_C. En appliquant mutatis mutandis la preuve du lemme 5, on arrive au résultat suivant. Notons C(y) la composante ergodique contenant le point y:

$$\lambda\chi_\lambda(x,y)\to\int_{C(y)} a(x,z)\nu_{C(y)}(dz\cap C(y)) \text{ lorsque } \lambda \text{ tend vers zéro, pp. en } (x,y) \qquad (36)$$

Donc, lorsqu'on connaît la décomposition de $\mathbf{T}^N$ en composantes ergodiques de Y, on sait encore déterminer la limite de $\lambda\chi_\lambda$ lorsque λ tend vers zéro. Il est facile de transposer ce résultat dans le cadre du lemme 5. Voici une application directe de ce fait: considérons l'équation

$\psi_\varepsilon+u(x/\varepsilon).\nabla_x\psi_\varepsilon=a(x,x/\varepsilon)$

Lorsque ε tend vers zéro, la famille ψ_ε admet la forme asymptotique suivante:

$\psi_\varepsilon(x)=\int_{C(x/\varepsilon)} a(x,z)\nu_{C(x/\varepsilon)}(dz\cap C(x/\varepsilon))+o(1)_{L^p}$. Et en particulier, si le flot de -u est ergodique, ψ_ε converge fortement vers zéro. On peut voir ce résultat comme un analogue du théorème de moyennisation en vitesse dans un cas où il n'y a pas a priori de distinction entre variables de vitesse et de position.

8.*Approximation du champ moyen*. Après les diverses préparations que nous venons de décrire dans les deux paragraphes précédents, venons en à la première application qui est l'homogénéisation des champs de vecteur périodiques ou approximation du champ moyen.

Soit $u=u(x,y)\in W^{1,\infty}{}_{loc}(\mathbf{R}^N x\mathbf{T}^N)^N$, un champ de vecteurs tel que $div_y u=0$; on supposera donc comme avant que $u(x,y)=0$ dès que $|x|>R$, où R est une constante positive. On considère conjointement l'équation différentielle ordinaire (EDO)

$$X'_\varepsilon(t,x)=u(X_\varepsilon,X_\varepsilon/\varepsilon);\ X'_\varepsilon(0,x)=x; \tag{37}$$

pour laquelle la boule fermée $|x|\leq R$ est invariante, et l'équation de Liouville associée

$$\partial_t f_\varepsilon+u(x,x/\varepsilon).\nabla_x f_\varepsilon=0;\ f_\varepsilon(0,x)=\phi(x) \tag{38}$$

Pour toute fonction $F\in L^1(\mathbf{T}^N)$, on note $<F>=\int_{T^N} F(y)dy/|\ T^N|$ sa moyenne sur le tore. On veut étudier sous quelles conditions le flot de l'EDO (35) converge lorsque ε tend vers 0 vers le flot du champ moyen

$$X'(t,x)=<u>(X);\ X(0,x)=x; \tag{39}$$

Grâce au lemme 1, on voit que cela correspond naturellement à étudier la validité de la méthode de moyennisation "à la Bogolyubov-Mitropolski" pour l'équation aux dérivées partielles (EDP) (36), c'est à dire à chercher si la solution f_ε de (2) converge au sens des distributions vers f, solution de

$$\partial_t f+<u>(x).\nabla_x f=0;\ f(0,x)=\phi(x). \tag{40}$$

On notera $v(x,y)=u(x,y)-<u>(x)$ la fluctuation de u autour de sa valeur moyenne.

Pour étudier la convergence de la solution f_ε de (2) vers f, solution de (36), on utilise l'Ansatz proposé par Bensoussan-Lions-Papanicolaou [11] pour l'homogénéisation des équations elliptiques, c'est à dire que l'on cherche formellement à représenter f_ε sous la forme d'un développement asymptotique de la forme

$$f_\varepsilon(t,x)=f_0(t,x,y)+\varepsilon f_1(t,x,y)+\ldots|_{y=x/\varepsilon} \tag{41}$$

En introduisant ce développement dans l'EDP (2) et en identifiant formellement les puissances successives de ε, on obtient la hiérarchie d'équations suivante, dont nous n'écrirons que les deux premières:

$\varepsilon^{-1}/\ \ u(x,y).\nabla_y f_0=0;$

ε^0/ $\partial_t f_0 + u(x,y).\nabla_x f_0 + u(x,y).\nabla_y f_1 = 0.$

On choisit donc de résoudre la première équation par $f_0(t,x,y)=f(t,x)$; il est alors clair que la seconde est, grâce à la condition $\mathrm{div}_y u=0$, équivalente aux deux équations

$$\partial_t f_0 + \langle u\rangle(x).\nabla_x f_0 = 0; \tag{42}$$

$$u(x,y).\nabla_y f_1 = (\langle u\rangle(x) - u(x,y)).\nabla_x f_0 = -v(x,y).\nabla_x f_0. \tag{43}$$

On reconnaît en (42) l'EDP du champ moyen (40) satisfaite par f_0; pour trouver f_1, on cherche $\chi(x,y)$ tel que

$$u(x,y).\nabla_y \chi = v(x,y) \tag{44}$$

et on définira $f_1(t,x,y)=\chi(x,y).\nabla_x f_0(t,x,y)$. La difficulté principale réside dans le fait que, pour démontrer effectivement la convergence de f_ε vers f par cette méthode asymptotique, il semble nécessaire de construire f_1 et de montrer que cette dernière quantité est bornée dans un espace de fonctions convenable. Or, comme nous l'avons dit au §4, l'équation (44) n'admet pas forcément de solution mesure bornée. (Il suffit pour s'en convaincre d'examiner le cas classique où N=2, $u(x,y)=\omega=(\omega_1,\omega_2)$ est un vecteur constant avec $\omega_1/\omega_2 \in \mathbf{Q}$, par exemple $\omega_1/\omega_2=-k_2/k_1$ avec $k=(k_1,k_2)\in \mathbf{Z}^2\backslash 0$ et $v(x,y)=e^{ik.y}v_0$ avec v_0 vecteur constant. Cette obstruction porte le nom de résonnance et constitue la différence essentielle entre l'homogénéisation de (38) et celle des équations elliptiques traitées dans [11]).

On peut donc penser à remplacer l'équation (44) par l'équation "régularisée"

$$\lambda\chi_\lambda + u(x,y).\nabla_y \chi_\lambda = v(x,y)$$

où λ sera choisi ultérieurement en fonction de ε de façon à ce que $\lambda(\varepsilon)\to 0$ lorsque $\varepsilon\to 0$. Mais on veut éviter d'avoir à estimer $\nabla_x \chi_\lambda$. Finalement, on posera $f_1(t,x,y)=\chi_{\lambda,\varepsilon}(x,y).\nabla_x f_0(t,x,y)$ où $\chi_{\lambda,\varepsilon}(x,y)$ est la solution de

$$\lambda\chi_{\lambda,\varepsilon} + u(x,y).\nabla_y \chi_{\lambda,\varepsilon} + \varepsilon u(x,y).\nabla_x \chi_{\lambda,\varepsilon} = v(x,y) \tag{45}$$

On définit alors le reste dans le développement (41) par

$R_\varepsilon(t,x)=f_\varepsilon(t,x)-f_0(t,x)+\varepsilon\chi_\lambda(x,x/\varepsilon).\nabla_x f_0(t,x)$. On calcule ensuite

$$\partial_t R_\varepsilon + u(x,x/\varepsilon).\nabla_x R_\varepsilon = \varepsilon\chi_{\lambda,\varepsilon}(x,x/\varepsilon).\nabla_x \partial_t f_0(t,x) + \varepsilon\chi_{\lambda,\varepsilon}(x,x/\varepsilon)\otimes u\,(x,x/\varepsilon):\nabla_x^{\otimes 2} f_0(t,x)$$
$$-\lambda\chi_{\lambda,\varepsilon}(x,x/\varepsilon).\nabla_x f_0(t,x) \tag{46}$$

et, en faisant le choix naturel de la condition initiale pour f_0, c'est à dire $f_0(0,x)=\phi(x)$, on trouve

$$R_\varepsilon(0,x)=\varepsilon\chi_{\lambda,\varepsilon}(x,x/\varepsilon).\nabla_x\phi(x) \tag{47}$$

On voit clairement que, pour estimer R_ε, on se ramène naturellement à estimer $\lambda\chi_\lambda$ et $\varepsilon\chi_\lambda$ lorsque $\varepsilon\to 0$, avec un choix convenable de $\lambda(\varepsilon)$ comme dans le lemme 5. En appliquant directement le lemme 5, on arrive à l'énoncé suivant:

Théorème 8. Supposons que pour presque tout x^* tel que $|x^*|\leq R$ le flot de $-u(x^*,.)$ ergodise la fluctuation $v(x^*,.)$ Alors, pour tout $\phi\in C^2(\mathbf{R}^N)$, la solution f_ε de (38) converge dans $L^p_{loc}(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}^N)$ vers la solution f de (40) pour $1\leq p<\infty$. Et l'écart maximum entre le flot microscopique X_ε et le flot X du champ moyen $E_\varepsilon(x)=\sup_{[0,T]}|X_\varepsilon(t,x)-X(t,x)|$ converge dans $L^p_{loc}(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}^N)$ et donc en mesure vers zéro.

Dans le cas non ergodique, on peut appliquer la formule (34) pour étudier le comportement de f_ε.

9. *Théorème d'Anosov sur la moyennisation des champs de vecteurs.*

On considère le système d'équations différentielles ordinaires

$$dI/dt=\varepsilon f(I,\phi)$$

$$d\phi/dt=\omega(I,\phi)+\varepsilon g(I,\phi) \tag{48}$$

où I varie dans $\mathbf{R}^N$ et ϕ varie dans $\mathbf{T}^N$. On suppose que $\mathrm{div}_\phi\,\omega(I,\phi)=0$. On lui associe son système moyenné (cf. Arnold [2]):

$$dJ/dt=\varepsilon\langle f\rangle(J) \tag{49}$$

(dorénavant nous noterons $\langle f\rangle(I)=\int f(I,\phi)d\phi/(2\pi)^N$).

Le principe de la méthode de moyennisation des perturbations consiste à remplacer la composante I de la solution de (48) par J sur une plage de temps $[0,0(1/\varepsilon)]$. Je voudrais décrire comment les techniques ci-dessus s'appliquent également à ce cas.

D'abord, on effectue un changement d'échelle de temps en posant

$$s=\varepsilon t \tag{50}$$

de sorte que l'on se restreint à une plage de s en $[0,O(1)]$. Ensuite, on effectue un changement de variable angulaire

$$\psi=\varepsilon\phi. \tag{51}$$

(Ceci est cohérent avec l'équation (48) qui montre qu'à l'ordre le plus bas ϕ varie comme t). On définit les nouveaux flots:

$$K_\varepsilon(s;I^0,\psi^0)=I_\varepsilon(t;I^0,\phi^0);\ \psi_\varepsilon(s;I^0,\psi^0)=\phi_\varepsilon(t;I^0,\phi^0) \tag{52}$$

lorsque s et t puis ψ et ϕ sont liés par les relations (50)-(51).

On aboutit aux nouvelles équations

$dK/ds=f(K,\psi/\varepsilon)$

$d\psi/ds=\omega(K,\psi/\varepsilon)+\varepsilon g(K,\psi/\varepsilon)$ (53)

ainsi que

$dJ/ds=\langle f\rangle(J)$ (54)

On écrit maintenant l'équation de Liouville associée:

$$\partial_s F_\varepsilon-\omega(I,\psi/\varepsilon).\nabla_\psi F_\varepsilon-\varepsilon g(K,\psi/\varepsilon).\nabla_\psi F_\varepsilon-f(I,\psi/\varepsilon).\nabla_I F_\varepsilon=0$$

$$F_\varepsilon(0,I,\psi)=G(I) \qquad (55)$$

La solution de (54) est

$$F_\varepsilon(s,I^0,\psi^0)=G(K_\varepsilon(s;I^0,\psi^0)) \qquad (56)$$

Ecrivons ensuite l'équation de Liouville associée à (55):

$$\partial_s F-\langle f\rangle(I).\nabla_I F=0$$

$$F(0,I,\psi)=G(I) \qquad (57)$$

dont la solution est

$$F(s,I^0)=G(J(s;I^0)) \qquad (58)$$

On effectue un développement asymptotique formel semblable à (41)

$$F_\varepsilon(s,I,\psi)=F_0(s,I,\phi)+\varepsilon F_1(s,I,\phi)+\ldots|_{\phi=\psi/\varepsilon} \qquad (59)$$

On s'aperçoit alors que l'analogue de (44)-(45) est

$$\lambda\chi_\lambda+\omega(I,\phi).\nabla_\phi\chi=f(I,\phi)-\langle f\rangle(I) \qquad (60)$$

On lui applique alors le lemme 6, et on aboutit comme dans le §8 au résultat suivant.

Théorème 9. On suppose les fonctions ω, f et g assez régulières et que $\mathrm{div}_\phi\omega(I,\phi)=0$.

Supposons en outre que, pour $|I|>R$, $f(I,\phi)=0$ et que pour presque tout I^* tel que $|I^*|\leq R$, le flot du champ de vecteurs $\omega(I^*,.)$ est ergodique sur le tore $\mathbf{T}^N$. Alors, pour toute fonction $G\in C^2(\mathbf{R}^N)$, la solution F_ε de (54) converge dans $L^p_{loc}(\mathbf{R}^N\times\mathbf{T}^N)$ vers la solution F de (56).

Et donc l'écart maximum entre le flot perturbé K_ε et le flot moyenné J:

$E_\varepsilon(x)=\sup_{[0,T]}|K_\varepsilon(s;I^0,\psi^0)-J(s;I^0)|$ converge dans $L^p_{loc}(\mathbf{R}_t\times\mathbf{R}^N\times T^N)$ et donc en mesure vers zéro. De façon équivalente $\sup_{[0,T/\varepsilon]}|I_\varepsilon(t;I^0,\phi^0)-J(t;I^0)|$ converge dans $L^p_{loc}(\mathbf{R}_t\times\mathbf{R}^N\times T^N)$ et donc en mesure vers zéro.

Ce théorème contient le résultat d'Anosov [12] cité dans Arnold [2].

10. *Les résultats de Neishtadt et Arnold.*

On reprend les systèmes (48) et (49) en supposant maintenant que ω ne dépend plus de ϕ. Et on réapplique la même méthode que dans le paragraphe précédent; la seule différence est que l'équation (60) devient:

l'équation (60) devient:

$$\lambda\chi_\lambda+\omega(I).\nabla_\phi\chi=f(I,\phi)-<f>(I) \tag{61}$$

On lui applique alors les résultats du §5, et en particulier le lemme 4. On aboutit sans difficulté au résultat suivant, qui généralise ceux de Neishtadt [13] et Arnold [2].

Théorème 9. On suppose les fonctions ω, f et g assez régulières. (En particulier, on suppose que f-<f> et se dérivées d'ordre 1 sont bornées pour la norme $|||.|||$). Supposons en outre que, pour $|I|>R$, $f(I,\phi)=0$ et que

$$\mathrm{mes}(\{I \text{ t.q. } |I|\leq R \text{ et } |\omega(I).e|<\alpha\})\leq C\alpha^\gamma \text{ uniformément en } e\in S^{N-1} \tag{62}$$

où $0<\gamma<2$.

Alors, pour toute fonction $G\in C^2(\mathbf{R}^N)$, on a:

$$\iint\sup_{[0,T]}|F_\varepsilon(s,I,\psi)-F(s,I)|^2 dI d\psi\leq C\varepsilon^{\gamma/2} \tag{63}$$

Et donc l'écart maximum entre le flot perturbé K_ε et le flot moyenné J:

$E_\varepsilon(I^0,\psi^0)=\sup_{[0,T]}|K_\varepsilon(s;I^0,\psi^0)-J(s;I^0)|$ vérifie:

$$\iint\sup_{[0,T]}|E_\varepsilon(I^0,\psi^0)|^2 dI d\psi\leq C\varepsilon^{\gamma/4} \tag{64}$$

d'où en particulier

$$\mathrm{mes}(\{(I^0,\psi^0) \text{ t.q. } \sup_{[0,T/\varepsilon]}|I_\varepsilon(t;I^0,\phi^0)-J(t;I^0)|\geq\rho\}\leq C\varepsilon^{\gamma/2}/\rho^2. \tag{65}$$

(Dans cet énoncé, C désigne différentes constantes positives).
Ce résultat généralise quelque peu ceux de Neishtadt et Arnold, qui supposaient que l'application $I\to\omega(I)$ est une submersion (condition de nondégénérescence de Kolmogorov). Dans ce cas, on a $\gamma=1$ dans (62); mais les résultats de Neishtadt correspondent à (65) avec une majoration en $C\varepsilon^{1/2}/\rho$ au lieu de $C\varepsilon^{1/2}/\rho^2$ (car ils n'utilisent pas l'inégalité de Chebyshev). Les hypothèses de régularité minimales pour ce paragraphe et le précédent s'obtiennent naturellement en calculant l'équation de Liouville portant sur le reste du développement (59); il n'est pas nécessaire d'en parler plus avant.

11.*Moyennisation généralisée des perturbations.*

Dans ce paragraphe, nous allons généraliser les résultats du §10 en abandonnant l'hypothèse de répartition périodique des oscillations. C'est à dire qu'au lieu de considérer des fonctions oscillantes de la forme $f(\phi/\varepsilon)$ avec f périodique en ϕ, nous considérerons des familles de fonctions $f_\varepsilon(\phi)$ convergeant pour une topologie faible de L^p ou faible * de L^∞.

$$dK/ds=f_\varepsilon(K,\psi)$$

$$d\psi/ds=\omega(K)+g_\varepsilon(K,\psi) \tag{66}$$

On écrit maintenant la transformée de Laplace de l'équation de Liouville associée:

On écrit maintenant la transformée de Laplace de l'équation de Liouville associée:

$$aF_\varepsilon-\omega(I).\nabla_\psi F_\varepsilon-g_\varepsilon(K,\psi).\nabla_\psi F_\varepsilon-f_\varepsilon(I,\psi).\nabla_I F_\varepsilon=G(I) \qquad (67)$$

La solution de (67) est

$$F_\varepsilon(I^0,\psi^0)=\int_0^\infty e^{-as}G(K_\varepsilon(s;I^0,\psi^0))ds \qquad (68)$$

Théorème 10. On suppose que, pour tout $\varepsilon>0$, f_ε et $g_\varepsilon\in W^{1,1}_{loc}\cap L^\infty_{loc}(\mathbf{R}^N\times \mathbf{T}^N)$ et que $\operatorname{div}(f_\varepsilon,g_\varepsilon)\in L^\infty_{loc}(\mathbf{R}^N\times \mathbf{T}^N)$. On fait en outre les hypothèses suivantes:

i) $\operatorname{mes}(\{I \text{ t.q. } |I|\leq R \text{ et } |\omega(I).e|<\alpha\})\to 0$ lorsque $\alpha\to 0$ uniformément en $e\in S^{N-1}$;

ii) pour $|I|>R$, $f_\varepsilon(I,\phi)=0$;

iii) $f_\varepsilon(I,\psi)\to f(I)$ dans $L^2(\mathbf{R}^N\times \mathbf{T}^N)$ faible, $g_\varepsilon\to g$ dans $L^2(\mathbf{R}^N\times \mathbf{T}^N)$ fort;

iv) $\iint |f_\varepsilon(I+h,\phi)-f_\varepsilon(I,\phi)|^2 dId\phi\to 0$ lorsque $|h|$ tend vers zéro, uniformément en ε, et

$\iint |\operatorname{div}(f_\varepsilon,g_\varepsilon)(I+h,\phi)-\operatorname{div}(f_\varepsilon,g_\varepsilon)(I,\phi)|^2 dId\phi\to 0$ lorsque $|h|$ tend vers zéro, uniformément en ε.

Alors, pour tout $G\in L^\infty_{loc}(\mathbf{R}^N)$, la solution F_ε de (67) converge dans $L^p_{loc}(\mathbf{R}^N\times \mathbf{T}^N)$ pour $1\leq p<\infty$ vers F solution de

$$aF-f(I).\nabla_I F=G(I) \qquad (69)$$

correspondant à l'équation "moyennée"

$$\partial_s J=f(J) \qquad (70)$$

Et donc l'écart maximum entre le flot perturbé K_ε et le flot moyenné J:

$E_\varepsilon(x)=\sup_{[0,T]}|K_\varepsilon(s;I^0,\psi^0)-J(s;I^0)|$ converge dans $L^p_{loc}(\mathbf{R}_t\times\mathbf{R}^N\times\mathbf{T}^N)$ et donc en mesure vers zéro.

La démonstration de ce résultat repose essentiellement sur les deux lemmes que voici.

Lemme A. (DiPerna-P.-L. Lions [14], Golse-Poupaud [15]) Soit $F_\varepsilon(I,\psi)$ une famille bornée de $L^2_{loc}(\mathbf{R}^N\times \mathbf{T}^N)$ telle que

$$\omega(I).\nabla_\psi F_\varepsilon=a_\varepsilon+\operatorname{div}_I b_\varepsilon+\operatorname{div}_\psi c_\varepsilon$$

où ω est une fonction de $W^{1,1}_{loc}\cap L^\infty_{loc}(\mathbf{R}^N)$ telle que

$\operatorname{mes}(\{I \text{ t.q. } |I|\leq R \text{ et } |\omega(I).e|<\alpha\})\to 0$ lorsque $\alpha\to 0$ uniformément en $e\in S^{N-1}$; on suppose que les familles a_ε et b_ε sont bornées dans $L^2_{loc}(\mathbf{R}^N\times \mathbf{T}^N)$ et que la famille c_ε est relativement compacte dans $L^2_{loc}(\mathbf{R}^N\times \mathbf{T}^N)$.

Alors, pour toute fonction $\chi(I,\psi)$ de classe C^∞ à support compact, la famille des moyennes $\int F_\varepsilon(I,\psi)\,\chi(I,\psi)dI$ est relativement compacte dans $L^2_{loc}(\mathbf{R}^N \times \mathbf{T}^N)$.

Lemme B. (Golse [16]) Soit $F_\varepsilon(I,\psi)$ convergeant vers $F(I,\psi)$ dans $L^2_{loc}(\mathbf{R}^N \times \mathbf{T}^N)$ faible telle que toutes les moyennes de la forme $\int F_\varepsilon(I,\psi)\chi(I,\psi)dI$ convergent dans $L^2_{loc}(\mathbf{R}^N \times \mathbf{T}^N)$ fort. Soit

$G_\varepsilon(I,\psi)$ convergeant vers $G(I,\psi)$ dans $L^2_{loc}(\mathbf{R}^N \times \mathbf{T}^N)$ faible et telle que

$\iint |G_\varepsilon(I+h,\phi)-G_\varepsilon(I,\phi)|^2 dI d\phi \to 0$ lorsque $|h|$ tend vers zéro, uniformément en ε. Alors $F_\varepsilon G_\varepsilon$ converge au sens vague des mesures vers FG.

Les lemmes A et B permettent de prouver que pour tout $G \in L^\infty_{loc}(\mathbf{R}^N)$ la famille F_ε converge vers F dans L^∞ faible *. On utilise ensuite le lemme 1 pour en déduire la convergence forte des flots (et, par voie de conséquence, celle de F_ε).

On peut résumer les résultats des trois derniers paragraphes au moyen du tableau suivant qui illustre bien les correspondances entre moyennisation des perturbations, homogénéisation des équations de Liouville et moyennisation en vitesse.

Moyennisation des perturbations d'EDO	Homogénéisation	Moyennisation en vitesse
variables d'action	variables macroscopiques	
variables d'angle	variable microscopiques	
résonnances		variété caractéristique de l'opérateur de transport
équation homologique	équation des correcteurs de Bensoussan-Lions-Papanicolaou	
moyennisation en angle		moyennisation en vitesse

La dernière ligne de ce tableau se comprend de la façon suivante: dans les EDP on moyennise naturellement par rapport aux vitesses (ou actions) la solution de l'EDP; pour les EDO on moyennise en angle les coefficients du champ de vecteurs, i.e. les coefficients de l'EDP de Liouville associée. Comme les deux moyennisations s'effectuent respectivement sur des variables complémentaires, le lemme B permet de passer à la limite faible dans le produits du type coefficients.solution, ce qui veut dire que ces deux types de moyennisation en apparence distinctes sont mises en dualité par le lemme B.

Je tiens à remercier M. Balabane, T. Hou et E. Weinan pour leurs commentaires et suggestions concernant les §§6 et 7.

Références

[1] R. DiPerna, P.-L. Lions: Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces; Inv. Math. **98**, (1989), 511-548.

[2] V. Arnold: Dynamical Systems III; Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Springer Verlag (1988).

[3] F. Golse, P.-L. Lions, B. Perthame, R. Sentis: Regularity of the moments of the solution of a transport equation; J. of Funct. Anal. 76, (1988), 110-125.

[4] P. Gérard, F. Golse: Averaging Regularity Results for PDEs under Transversality Assumptions; submitted to Comm. on Pure and Appl. Math..

[5] P. Gérard: Moyennisation et Régularité 2-microlocale; Ann. Scient. de l'ENS **23**, (1990) 89-122.

[6] W. Rudin: Functional Analysis; Mc Graw Hill.

[7] A. Kolmogorov: Sur les systèmes dynamiques du tore possédant un invariant intégral (en russe); Dokl. Akad. Nauk SSSR **93**, (1953), 763-766.

[8] M. Herman: Sur les courbes invariantes par les difféomorphismes de l'anneau; Astérisque **103-104**, (1983).

[9] J. von Neumann: Zur Operatorenmethode in der klassischen Mechanik; Ann. Math. **33**, (1932), 587-642.

[10] V. Rokhlin: Sur quelques questions de la théorie métrique des systèmes dynamiques (en russe); Usp. Mat. Nauk **4**, (1949), 57-128.

[11] A. Bensoussan, J.-L. Lions, G. Papanicolaou: Asymptotic Studies of Periodic Structures; North Holland (1978).

[12] D. Anosov: Oscillations dans les systèmes d'EDO à solutions oscillant rapidement (en russe); Izvestia Akad. Nauk SSSR **24**, 721-742.

[13] A. Neishtadt: Sur la moyennisation des systèmes à plusieurs fréquences II (en russe), Dokl. Akad. Nauk. SSSR 226, (1976), 1295-1298.

[14] R. DiPerna, P.-L. Lions: Global weak solutions fo Vlasov-Maxwell systems; Comm. on Pure and Appl. Math. **42**, (1989).

[15] F. Golse, F. Poupaud: Limite fluide des équations de Boltzmann des semi-conducteurs pour une statistique de Fermi-Dirac; prépublication (*in* F. Golse: Rapport d'habilitation, Université Paris VII, 1988).

[16] F. Golse: Remarques sur l'homogénéisation des équations de transport; C. R. Acad. Sci. 305, (1988), 801-804.