JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

FRANÇOIS TRÈVES

Formules d'homotopie locales pour le système de Cauchy-Riemann tangentiel

Journées Équations aux dérivées partielles (1987), p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1987____A18_0>

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

FORMULES D'HOMOTOPIE LOCALES POUR LE SYSTEME DE CAUCHY-RIEMANN TANGENTIEL

François Treves, Université Rutgers

On considère une hypersurface réelle S dans $\mathbb{C}^{n+1}$ (où les coordonnées complexes seront notées $z_1,\dots,z_n, w = s + it$). On supposera que l'origine appartient à S et qu'une équation de S près de l'origine est $t = \varphi(z,s)$, où φ est une fonction C^∞ à valeurs réelles, dans un voisinage ouvert U de O dans $\mathbb{R}^{2n+1}$. On supposera que $\varphi(0,0) = 0$ et que grad $\varphi(0,0) = 0$. Dans le système de coordonéees locales x_i, y_i ($1 \leq i \leq n$), s, les champs vectoriels de Cauchy-Riemann tangents à S sont des combinaisons linéaires des champs

$$L_j = \partial/\partial \bar{z}_j + \gamma_j(z,s)\partial/\partial s,$$

où $\gamma_j = - i\varphi_{\bar{z}_j}/(1 + i\varphi_s)$ et $j = 1,\dots,n$. Soit une fonction u de classe C^∞ dans U ; on a

$$du = \Sigma_{j=1,\dots,n} L_j u \, d\bar{z}_j \mod(dz_1,\dots,dz_n,dw).$$

Soit maintenant une forme différentielle f de bidegré (n+1,q) avec $0 \leq q \leq n$, c'est-à-dire

$$f = \Sigma_{|J|=q} f_J(z,s)\, d\bar{z}_J \wedge \omega,$$

où J est une suite croissante d'entiers $j_1 < \dots < j_q$, $d\bar{z}_J = d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_q}$ et $\omega = dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n \wedge dw$. On supposera que les coefficients sont de classe C^∞ dans la fermeture $\bar{\mathcal{O}}$ d'un ouvert $\mathcal{O} \subset\subset U$; on écrit $f \in C^\infty(\bar{\mathcal{O}};\Lambda^{n+1,q})$. On a alors

$$df = \Sigma_{|J|=q}\, \Sigma_{k=1,\dots,n}\, L_k f_J\, d\bar{z}_k \wedge d\bar{z}_J \wedge \omega .$$

On peut dire qu'au niveau des formes de bidegré $(n+1,q)$ le système de Cauchy-Riemann tangentiel à S est "réalisé" par la dérivée extérieure. Les formules d'homotopie auxquelles il est fait allusion dans le titre seront du genre

(1) $\qquad f = dK^q f + K^{q+1} df + R^q f ,$

où

$$K^q : C^\infty(\bar{\mathcal{O}};\Lambda^{n+1,q}) \to C^\infty(\mathcal{O};\Lambda^{n+1,q-1})$$

et où

$$R^q : C^\infty(\bar{\mathcal{O}};\Lambda^{n+1,q}) \to C^\infty(\bar{\mathcal{O}};\Lambda^{n+1,q})$$

représente une obstruction à l' *exactitude* du complexe différentiel

$$d : C^\infty(\mathcal{O};\Lambda^{n+1,q}) \to C^\infty(\mathcal{O};\Lambda^{n+1,q+1}) .$$

On va construire l'opérateur K^q sous la forme suivante: $K^q = (-1)^q K$, où K a une expression qui est indépendante du degré q . On définit d'abord

$$\mathcal{K}_\sigma f(z,s,\sigma) = (2\pi)^{-n} \int_\mathcal{O} e^{i\sigma[s + i\varphi(z,s) - s' - i\varphi(z',s') - i\alpha\cdot(z-z')]}$$

$$f(z',s')\wedge E_\alpha(z,s,z',s',\sigma)\wedge dw \, .$$

Posons $\Gamma_\gamma = \{ \sigma \in \mathbb{C} \,;\, |\mathrm{Im}\,\sigma| < \gamma|\mathrm{Re}\,\sigma| \}$ $(0 < \gamma < 1)$. Ici $\alpha = \alpha(z,s,z',s',\sigma)$ est une application C^∞ de $U\mathrm{x}U\mathrm{x}\Gamma_\gamma$ dans $\mathbb{C}^n$ qui est holomorphe par rapport à σ . Nous supposerons que toutes les dérivées de α sont bornées dans $U\mathrm{x}U\mathrm{xx}\Gamma_\gamma$. Quant à $E_\alpha(z,s,z',s',\sigma)$ c'est une forme différentielle dans UxU dont les coefficients dépendent de σ, de façon holomorphe dans Γ_γ . Nous la décrivons de façon plus détaillée ci-dessous . Mais disons tout de suite que $\mathcal{K}f$ est l'intégrale d'une forme différentielle dans l'espace de (z',s') , dont les coefficients sont des formes différentielles en (z,s) (qui dépendent en plus de σ), sur la $(2n+1)$-chaine $\mathcal{O}$. Il n'y a que la partie homogène de degré $2n+1$, par rapport à $(z',\bar{z}',s')$, de l'intégrand qui puisse fournir une contribution non nulle; tous les autres termes donnent lieu à des intégrales nulles.

Venons-en maintenant à l'expression de E_α . On introduit tout d'abord les distributions suivantes dans $\mathbb{C}^n$ où la variable complexe sera notée $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_n)$:

$$\mathcal{E}_j^{(\nu)}(\lambda) = (-1)^\nu (n-\nu-1)!\,\bar{\lambda}_j/|\lambda|^{2(n-\nu)} \quad (\nu = 0,1,\dots,n-1)\, .$$

Notons que

(2) $\pi^{-n}\Sigma_{j=1,\dots,n}(\partial/\partial\bar{\lambda}_j)\,\mathcal{E}_j^{(0)} = \delta(\lambda)$ (mesure de Dirac en 0).

On forme les courants suivants:

(3) $E_\alpha^{(\nu)} = \Sigma_{|J|=\nu+1}\,\Sigma_{j\in J}\,\varepsilon(j(J\backslash j))\,\mathcal{E}_j^{(\nu)}(\lambda)\,(D\alpha)_{J\backslash j}\wedge D\bar{\lambda}_{(J)}\wedge D\lambda$.

Nous devons expliquer les notations dans (3): $\varepsilon(j(J\backslash j))$ est le signe de la permutation qui ordonne l'ensemble $\{j\}\cup(J\backslash j)$. Si $\omega_1,\dots,\omega_n$ sont des 1-formes différentielles et si $K = \{k_1<\dots<k_p\}$, $K^* = \{1,\dots,n\}\backslash K$, nous écrivons

(4) $\omega_K = \omega_{k_1}\wedge\dots\wedge\omega_{k_p}$;

(5) $\omega_{(K)} = (-1)^{k_1+\dots+k_p-p}\,\omega_{K^*}$.

D'autre part, $\mathcal{E}_j^{(\nu)}(\lambda)\,D\bar{\lambda}_{(J)}\wedge D\lambda$ est le pull-back à $\mathbb{R}^{2n}\times\mathbb{R}^{2n}$ de la forme $\mathcal{E}_j^{(\nu)}(\lambda)\,d\bar{\lambda}_{(J)}\wedge d\lambda$ sur $\mathbb{R}^{2n}$, sous l'application $(z,z')\to\lambda = z - z'$. Ainsi D $= d_{z,s} + d_{z',s'}$. On continuera à donner le même sens à cette notation dans ce qui suit. On pose enfin:

(5) $E_\alpha = \Sigma_{\nu=0,\dots,n-1}\,(-1)^{\nu(\nu+1)/2}\,\sigma^\nu\,E_\alpha^{(\nu)}$.

La formule suivante vaut dans $U\times U\times\Gamma_\gamma$:

$$(6) \qquad e^{\alpha\lambda} D(e^{\alpha\lambda} E_{\alpha}) = \{\pi^n \delta(\lambda) D\lambda - (-1)^{n(n+1)/2} \sigma^n D\alpha\} \wedge D\lambda .$$

On rappelle que $\lambda = z - z'$. Posons

$$\mathcal{P} f(z,s,\sigma) = \int_{-b}^{a} e^{\,i\sigma[s + i\varphi(z,s) - s' - i\varphi(z,s')]} f(z,s') \wedge dw ,$$

où l'intégration s'effectue par rapport à s' seulement :

$$f(z,s') = \Sigma_{|J|=q}\, f_J(z,s')\, dz_J \wedge dz \wedge [1 + i\varphi_s(z,s')] ds' .$$

On définit aussi

$$\mathcal{R}_{\mathcal{O}} f(z,s,\sigma) =$$

$$(-1)^{n(n+1)/2} \sigma^n \int_{\mathcal{O}} e^{\,i\sigma[s + i\varphi(z,s) - s' - i\varphi(z',s')]}$$

$$f(z',s') \wedge D\alpha \wedge D\lambda \wedge dw / (2i)^n .$$

On déduit de (6) :

$$(7) \qquad d[(-1)^q\, \mathcal{K}_{\mathcal{O}} f] + (-1)^{q+1}\, \mathcal{K}_{\mathcal{O}} df = \mathcal{P} f - \mathcal{R}_{\mathcal{O}} f - (-1)^q\, \mathcal{K}_{\partial\mathcal{O}} \mathcal{O} ,$$

où $\mathcal{K}_{\partial\mathcal{O}} f$ a la meme signification que $\mathcal{K}_{\mathcal{O}} f$ sauf que l'intégration par rapport à (z',s') s'effectue sur le bord $\partial\mathcal{O}$ de l'ouvert $\mathcal{O}$.

L'étape suivante consiste à intégrer par rapport à σ sur $\mathbb{R}_+$, plus précisément à former

$$^{\varepsilon}\mathbf{K}_{\mathcal{O}+}f(z,s) = (2\pi)^{-1}\int_{\sigma>0} e^{-\varepsilon\sigma^2}\ \mathcal{K}f(z,s,\sigma)d\sigma\,,$$

$$^{\varepsilon}\mathbf{R}_{\mathcal{O}+}f(z,s) = (2\pi)^{-1}\int_{\sigma>0} e^{-\varepsilon\sigma^2}\ \mathcal{R}f(z,s,\sigma)d\sigma\,,$$

$$^{\varepsilon}\mathbf{P}_{+}f(z,s) = (2\pi)^{-1}\int_{\sigma>0} e^{-\varepsilon\sigma^2}\ \mathcal{P}f(z,s,\sigma)d\sigma\,.$$

On tire de (7) la formule évidente qui lie ces opérateurs. La question est de savoir si l'on peut choisir l'application α de manière à ce qu'on puisse faire tendre $\varepsilon > 0$ vers 0. En réalité cela est toujours possible si on ignore les autres contraintes. Ce que nous recherchons c'est aussi d'avoir

$$(8)\qquad \mathcal{R}f = 0\,,$$

quelle que soit $f \in C^\infty(\mathcal{O};\Lambda^{n+1,q})$. La condition (8) est vérifiée sous l'une ou l'autre des deux hypothèses suivantes:

$$(9)\qquad \text{dét}(L_j\alpha_k)_{j\in J,k\in K} = 0 \ \textit{dans}\ U\,,\ \textit{pour tous}\ J, K\,,\ |J| = |K| = q\,;$$

$$(10)\qquad \text{dét}(L_j'\alpha_k)_{j\in J,k\in K} = 0 \ \textit{dans}\ U\,,\ \textit{pour tous}\ J, K\,,\ |J| = |K| = n-q\,,$$

où L_j' est le champ de vecteur L_j agissant en les variables (z',s'). Lorsque (9) est vérifiée on a

(11) $\quad d_{z,s}\alpha_{i_1}\wedge\ldots\wedge d_{z,s}\alpha_{i_r}\wedge dz\wedge dw = 0$ *dès que* $r \geqslant q$.

Lorsque (10) est vérifiée on a

(12) $\quad d_{z',s'}\alpha_{i_1}\wedge\ldots\wedge d_{z',s'}\alpha_{i_r}\wedge dz'\wedge dw' = 0$ *dès que* $r \geqslant n - q$.

Dans les deux cas l'intégrale de $f(z',s')\wedge D\alpha\wedge D\lambda\wedge dw$ sur $\mathcal{O}$ est nulle.

Example 1.- Prenons $\varphi(z,s) = \varphi(z) = |z_*|^2 - |z_{**}|^2$, où $z_* = (z_1,\ldots,z_\nu)$, $z_{**} = (z_{\nu+1},\ldots,z_{\nu+\nu'})$, $z_\otimes = (z_{\nu+\nu'+1},\ldots,z_n)$, avec ν, $\nu' \geqslant 0$, $\nu + \nu' \leqslant n$. Si l'on prend $\alpha = (-2\bar{z}_*',2\bar{z}_{**},\bar{z}_\otimes - \bar{z}_\otimes')$ on aura

$$\varphi(z) - \varphi(z') + \text{Ré}[\alpha\cdot(z - z')] = |z - z'|^2$$

et donc on pourra faire tendre ε vers zéro. On voit que la condition (9) est satisfaite si $q > n - \nu$ tandis que la condition (10) l'est si $q < \nu'$.■

En fait on aussi le droit de déformer le domaine d'intégration par rapport à σ , de $\mathbb{R}_+$ à l'image de $\mathbb{R}_+$ sous une application $\sigma \to \mu(z,s,z',s',\sigma)\sigma$ avec μ lipschitzienne dans $U\times U\times\mathbb{R}_+$. En profitant de cette possibilité le résultat de l'example 1 se généralize aisément : on peut choisir l'application α chaque fois qu'il y a suffisamment de valeurs propres > 0 de la forme de Levi de la structure CR à l'étude (c'est-à-dire de la fonction φ), ou bien lorsqu'il y a assez de valeurs propres < 0 . Pour un bon choix de α on pourra faire tendre ε vers zéro, et l'on aboutira à une formule

(13) $\quad \mathbf{P}_+ f = d[(-1)^q \mathbf{K}_{\mathcal{O}+} f] + (-1)^{q+1} \mathbf{K}_{\mathcal{O}+} df - (-1)^q \mathbf{K}_{\partial\mathcal{O}+} f$.

L'opérateur $\mathbf{P}_+$ est une sorte de projecteur associé à la partie $\sigma > 0$ de l'ensemble charactéristique . On a, bien entendu, une formule analogue à (13) avec l'indice - au lieu de + : il suffit d'intégrer par rapport à σ sur $\mathbb{R}_-$ au lieu de $\mathbb{R}_+$. On vérifie immédiatement que

(14) $\quad \mathbf{P}_+ + \mathbf{P}_- = \mathbf{Id}$,

de sorte que lorsque les deux formules (13), avec les indices + et - , sont valables on obtient des formules d'homotopie (avec erreur!)

(15) $\quad f = d[(-1)^q \mathbf{K}_{\mathcal{O}} f] + (-1)^{q+1} \mathbf{K}_{\mathcal{O}} df - (-1)^q \mathbf{K}_{\partial\mathcal{O}} f$.

Il reste à éliminer les termes $-(-1)^q \mathbf{K}_{\partial\mathcal{O}+} f$ et $-(-1)^q \mathbf{K}_{\partial\mathcal{O}-} f$. On y parvient en se basant sur une formule du genre de (6) et sur une transformation CR de l'ouvert $\mathcal{O}$. Ceci, ainsi que ce qui précède, sera exposé, avec démonstrations à l'appui, dans un article à paraitre.

REFERENCES

Les formules d'homotopie décrites ci-dessus (ainsi que celles obtenues en éliminant les termes provenant de l'intégration sur le bord de $\mathcal{O}$) sont inspirées de celles, classiques, de Bochner-Martinelli et de Coleman-Leray . Parmi les résultats récents de résolubilité pour les equations de CR tangentielles il faut citer ceux de l'article

G. M. Henkin, *The H. Lewy equation and analysis on pseudoconvex manifolds*, Uspehi Mat. Nauk. **32** (1977), No 3 ; English transl. in Russian Math. Surveys **32** (1977).

Voir aussi

R. Harvey - J. Polking, *Fundamental solutions in complex analysis*, II, Duke Math. J. **46** (1979), 301-340,

où l'on trouvera une bonne bibliographie. Les résultats précédents sont globaux - sur le bord d'un ouvert pseudoconvexe de $\mathbb{C}^n$. On trouvera des résultats de résolubilité microlocale (dans un cadre bien plus général que celui traité ici) dans

M. Kashiwara - P. Schapira, *A vanishing theorem for a class of systems with simple characteristics* , Inventiones Math. **82** (1985), 579-592 .

En ce qui concerne des résultats *locaux* il convient de citer des résultats de J. - P. Rosay valables pour des calottes sphériques et des résultats complets pour des régions géométriquement régulières de l'hyperquadrique $\operatorname{Im} w = |z_1|^2 + \ldots + |z_\nu|^2 - |z_{\nu+1}|^2 - \ldots - |z_n|^2$ de P. Cordaro (thèse 1984).