JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

PAUL GODIN

Régularité analytique des chocs uniformément stables à données analytiques

Journées Équations aux dérivées partielles (1986), p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1986____A2_0>

Régularité analytique des chocs uniformément stables à données analytiques

par P.GODIN

UNIVERSITE LIBRE DE BRUXELLES
Département de Mathématique
Campus de la Plaine C.P.214
Boulevard du Triomphe
1050 Bruxelles
Belgique

1. Introduction.

On considère un système de lois de conservation

$$(1)\quad \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j} F_j(u) = 0 ,$$

où $x=(x_1,\dots,x_N)$ parcourt un ouvert U de $\mathbb{R}^N$ et t parcourt un intervalle de $\mathbb{R}$; pour $j=1,2,\dots,N$, F_j est une application C^∞ d'un ouvert G de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^m$. Soit V un voisinage ouvert de $(x_o,t_o) \in U \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$. Si $u \in L^\infty(V,G)$, on dit que u est une solution faible de (1) dans V lorsque pour toute fonction $\psi \in C_o^1(V)$, l'on a

$$(2)\quad \int\left(\frac{\partial\psi}{\partial t} u + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial\psi}{\partial x_j} F_j(u)\right)dx\, dt=0.$$

Soit S une hypersurface C^1 passant par (x_o,t_o), d'équation $x_N=\varphi(x',t)$, où $x=(x',x_N)$. Soit $B \subset V$ une boule ouverte centrée en (x_o,t_o). Si B est assez petite, on a $B=B^- \cup (S \cap B) \cup B^+$, avec $B^\pm=\{(x,t) \in B,\ x_N \gtrless \varphi(x',t)\}$. Si u est une solution faible de (1) dans B et si $u^\pm=u|_{B^\pm} \in C^1(\bar{B}^\pm)$, il résulte de (2) si l'on intègre par parties que

$$(3)\quad \frac{\partial u^\pm}{\partial t} + \sum_{j=1}^{N} A_j(u^\pm) \frac{\partial u^\pm}{\partial x_j} = 0 \text{ dans } B^\pm,$$

où $A_j = \partial F_j/\partial u$,

et que

$$(4) \quad \varphi_t(u^+-u^-)+\sum_{j=1}^{N-1} \varphi_{x_j}(F_j(u^+)-F_j(u^-))-(F_N(u^+)-F_N(u^-))=0$$

sur $S \cap B$. (4) est appelée relation de Rankine-Hugoniot.

Une solution u^+,u^-,φ de (3), (4) telle que S soit non caractéristique pour $\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{j=1}^{N} A_j(u^\pm)\frac{\partial}{\partial x_j}$, est appelée onde de choc. (Parfois on impose aux ondes de choc de vérifier certaines conditions dites d'entropie , cf. la condition (9) explicitée plus loin). Si $N > 1$, les premiers résultats généraux d'existence d'ondes de choc définies disons dans $V=\{(x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+,\ |x|+|t| < R\}$ et satisfaisant aux conditions initiales :

$$(5) \quad u^\pm|_{t=0}=u_0^\pm \ , \ \varphi|_{t=0}=\varphi_0 \quad \text{si} \quad |x| < R$$

ont été obtenus par Majda [4], [5]. Sa méthode consiste à ramener le problème (3),(4)(où B est remplacé par V), (5) à un problème mixte dans $x_N > 0$, $t > 0$. Pour cela on pose $v^\pm(x,t)=u^\pm(x', \pm x_N+\varphi(x',t),t)$, $v={}^t(v^+,v^-)$. On définit les matrices $2m \times 2m$

$$\tilde{A}_j(v) = \begin{pmatrix} A_j(v^+) & 0 \\ 0 & A_j(v^-) \end{pmatrix}, \quad 1 \leq j \leq N-1,$$

$$\tilde{A}_N(v,\nabla\varphi) = \begin{pmatrix} A_N(v^+)-\varphi_t-\sum_{j=1}^{N-1}\varphi_{x_j}A_j(v^+) & 0 \\ 0 & -(A_N(v^-)-\varphi_t-\sum_{j=1}^{N-1}\varphi_{x_j}A_j(v^-)) \end{pmatrix}$$

(3) devient alors

$$(6) \quad \frac{\partial v}{\partial t}+\sum_{j=1}^{N-1}\tilde{A}_j(v)\frac{\partial v}{\partial x_j}+\tilde{A}_N(v,\nabla\varphi)\frac{\partial v}{\partial x_N}=0 \ , \ x_N > 0,\ t > 0,\ |x|+|t| < R',$$

et (4) donne

(7) $\varphi_t(v^+-v^-)+\sum_{j=1}^{N-1}\varphi_{x_j}(F_j(v^+)-F_j(v^-))-(F_N(v^+)-F_N(v^-))=0,\ x_N=0,\ |x|+|t| < R'.$

On a dét $\tilde{A}_N(v,\nabla\varphi)\neq 0$ puisque S n'est pas caractéristique pour $\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{j=1}^{N} A_j(u^\pm)\frac{\partial}{\partial x_j}$

On fait l'hypothèse d'hyperbolicité suivante :

(8)(i) Il existe une matrice $A_o(u) > 0$, dépendant de façon C^∞ de u, telle que $A_o(u)\ A_j(u)$ soit symétrique $(j=1,\dots,N)$;

(ii) L'opérateur (1) est strictement hyperbolique dans la direction de $\frac{\partial}{\partial t}$ (cette condition (ii) peut être généralisée).

Posons $b_o(v)=v^+-v^-$, $b_j(v)=F_j(v^+)-F_j(v^-)$, $1 \leq j \leq N$, $M^{\pm}_{(v,\nabla\varphi)}=\mp(A_N(v^\pm)-\varphi_t-\Sigma\varphi_{x_j}A_j(v^\pm))$. Si $\bar{y}=(\bar{x}',\bar{t})$ et si $\tau\in\mathbb{C}$ vérifie Im $\tau<0$, on désigne par $E^+(\bar{y},\xi',\tau)$ le sous-espace vectoriel complexe de $\mathbb{C}^{2m}$ engendré par les traces sur $x_N=0$ des solutions z de $\frac{\partial z}{\partial t}+\sum_{j=1}^{N-1}\tilde{A}_j(v(\bar{x}',0,\bar{t}))\frac{\partial}{\partial x_j}+\tilde{A}_N(v(\bar{x}',0,\bar{t}),\nabla\varphi(\bar{x}',\bar{t}))\frac{\partial z}{\partial x_N}=0$, de la forme $z=e^{i(x'\xi'+t\tau)}\sum_r e^{ix_Nk_r^j}\,p_r(x_N)\,e_r$, $\xi'\in\mathbb{R}^{N-1}$, $e_r\in\mathbb{C}^{2m}$, où Im $k_r>0$ et p_r est un polynôme. On suppose que

(9) $\dim E^+(\bar{y},\xi',\tau)=m-1,\ |\bar{y}|<R',\ \text{Im}\,\tau<0,\ \xi'\in\mathbb{R}^{N-1}.$

On introduit la condition de stabilité uniforme au point $(\bar{x}',0,\bar{t})$:

$(10)_{(\bar{x}',0,\bar{t})}$ Il existe $\gamma>0$ tel que pour tout (ξ',τ) avec Im $\tau<0$ et $|\xi'|^2+|\tau|^2=1$, pour tout $\mu\in\mathbb{C}$ et tout $z\in E^+(\bar{y},\xi',\tau)$, l'on ait:

$$|\mu(\tau b_o(v(\bar{x}',0,\bar{t}))+\sum_{j=1}^{N-1}\xi'_j\, b_j(v(\bar{x}',0,\bar{t})))+M_{(v(\bar{x}',0,\bar{t}),\nabla\varphi(\bar{x}',\bar{t}))}z| \geq \gamma(|\mu|+|z|).$$

Sous les conditions précédentes, Majda ([5]) a prouvé l'existence locale de chocs satisfaisant (5) (pourvu que u_o, φ_o vérifient certaines conditions de compatibilité)

2. Enoncé des résultats.

Dans [3], on suppose de plus que

(11) F_j est analytique.

Alors on obtient des résultats de régularité analytique pour des chocs C^∞, définis disons dans un voisinage de $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^N_x \times \bar{\mathbb{R}}^+_t$. On suppose donc que φ est une application C^∞ de $U' \times [0,T]$ dans $\mathbb{R}$, où U' est un voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^{N-1}$, que $S=\{(x',\varphi(x',t),t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R},\ (x',t) \in U' \times [0,T]\}$, et que V est un voisinage dans $U' \times \mathbb{R} \times [0,T]$ de $\{(x,t) \in S, t > 0\}$. Posons $V^{\pm}=\{(x,t) \in V,\ x_N \gtrless \varphi(x',t)\}$, $V_o=\{(x,t) \in \bar{V},\ t=0\}$, $V_o^{\pm}=\{(x,t) \in \bar{V}^{\pm},\ t=0\}$. On a alors si u^+,u^-,φ vérifient (3),(4) (avec B remplacé par V):

<u>Théorème 1</u>. Supposons que les conditions (8),(9),$(10)_{(0,0,0)}$, (11) soient réalisées, que $u^{\pm}|_{t=0}$ soit analytique dans $\bar{V}_o$ et que $\varphi|_{t=0}$ soit analytique dans $U' \times \{0\}$. Alors $u^{\pm}$ est analytique dans un voisinage de $(0,\varphi(0,0),0)$ dans $\bar{V}^{\pm}$ et φ est analytique que dans un voisinage de $(0,0)$ dans $U' \times [0,T]$. En fait, on a "unique continuation de l'analycité" aussi loin que l'on a stabilité uniforme:

<u>Théorème 2</u>. Supposons que (8),(9),$(10)_{(0,0,t_o)}$, (11) soient réalisées avec $t_o \in]0,T[$. Supposons que pour $t < t_o$, $u^{\pm}$ soit analytique dans $V^{\pm}$ jusqu'à S et que φ soit analytique dans $U' \times]0,t_o[$. Alors $u^{\pm}$ est analytique dans un voisinage de $(0,\varphi(0,t_o),t_o)$ dans $\bar{V}^{\pm}$ et φ est analytique dans un voisinage de $(0,t_o)$ dans $U' \times [0,T]$.

3. Idée de la preuve du théorème 1. (le théorème 2 se prouve à l'aide d'arguments similaires).

Soit $\rho \in C_o^\infty(\mathbb{R}^{N+1},[0,1])$ valant 1 si $|x|+|t| < 1$ et 0 si $|x|+|t| > 2$. Posons $\rho_\lambda(x,t)=\rho(\frac{x}{\lambda},\frac{t}{\lambda})$, $\rho_\lambda'(x',t)=\rho_\lambda(x',0,t)$, $v_\lambda=\rho_\lambda v+(1-\rho_\lambda)v(0,0)$, $\varphi_\lambda=\rho_\lambda'\varphi+(1-\rho_\lambda')\cdot(\varphi(0,0)+<\nabla\varphi(0,0),(x',t)>)$, $Lz=\partial_t z+\sum_{j=1}^{N-1}\tilde{A}_j(v_\lambda)\partial_{x_j}z+\tilde{A}_N(v_\lambda,\nabla\varphi_\lambda)\partial_{x_N}z$,

$\mathcal{B}(z,\nabla\chi)=\chi_t\, b_o(v_\lambda)+\sum_{\ell=1}^{N-1}\chi_{x_\ell}b_\ell(v_\lambda)+M(v_\lambda,\nabla\varphi_\lambda)z$.

Soient $T,R,b > 0$ avec $bR < T$, et posons $D_t=\{(x,t) \in \mathbb{R}^N \times \{t\},\ b(|x|-R)+t < T, x_N > 0\}$, $E_t=\{(x',0,t) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \{0\} \times \{t\},\ b(|x'|-R)+t < T\}$, $D=\bigcup_{0<t<T} D_t$, $E=\bigcup_{0<t<T} E_t$.

Avec $y=(x',t)$, posons $\beta_j(y)=b_j(v_\lambda(x',0,t))$, $M(y)=M(v_\lambda(x',0,t),\nabla\varphi_\lambda(x',t))$.

Soit X_y le sous-espace de $\mathbb{C}^m$ engendré par $\beta_o(y),\dots,\beta_{N-1}(y)$ et soit $\beta^j(y)$ la forme $\mathbb{C}$-linéaire sur $\mathbb{C}^m$, nulle sur $X_y^\perp$, telle que $<\beta^j(y), \beta_k(y)> =1$ si $j=k$ et 0 si $j\neq k$. On peut démontrer le résultat suivant:

Proposition 1. Si λ et b sont assez petits, il existe des constantes $\eta_o > 0$, $C > 0$, telles que pour tout $\eta > \eta_o$, tout $z \in C^\infty(\bar{D},\mathbb{C}^{2m})$ et tout $\chi \in C^\infty(\bar{E},\mathbb{C})$, l'on ait:

$$(12)\qquad \eta^{1/2}|||e^{-\eta t}z|||_D+\|e^{-\eta t}z\|_E+\|e^{-\eta t}\nabla\chi\|_E \leq C(\eta^{-1/2}|||e^{-\eta t}Lz|||_D+\|e^{-\eta t}\mathcal{B}(z,\nabla\chi)\|_E+ \|z\|_{D_o}+\eta^{-1/2}\sum_{1\leq j\leq N-1}\|<\beta^j,Mz-\mathcal{B}(z,\nabla\chi>\|_{E_o}).$$

Dans (11), $|||\ \ |||_D$, $\|\ \ \|_E$, $\|\ \ \|_{E_o}$, $\|\ \ \|_{D_o}$ sont les normes L^2 naturelles sur D,E,E_o,D_o. (12) s'obtient en découplant z et $\nabla\chi$ dans $\mathcal{B}(z,\nabla\chi)$ (cf.[6]) et en appliquant ensuite les techniques habituelles des problèmes mixtes.(Une version de (12) sans domaine de dépendance et avec des conditions initiales homogènes est démontrée dans [4][5]).

Il est commode de poser $P=(\tilde{A}_N(v_\lambda,\nabla\varphi_\lambda))^{-1}L$. Si λ est assez petit, il résulte alors de (6) que

(13) $\quad Pv=0 \quad , \quad |x|+|t| < \lambda,\ x_N > 0,\ t > 0$

Pour démontrer le Théorème 1, on dérive (5),(6) par rapport à $y=(x',t)$, et on obtient des relations de la forme (∂_j désignant une dérivée d'ordre 1 par rapport à y)

(14) $\quad P\partial_y^\alpha\partial_j v=F_{\alpha,j} \quad , \quad |x|+|t| < \lambda,\ x_N > 0,\ t > 0.$

(15) $\quad B(\partial_y^\alpha\partial_j v,\nabla\partial_y^\alpha\partial_j\varphi)=g_{\alpha,j} \quad , \quad |x'|+|t| < \lambda,\ t > 0,$

où $F_{\alpha,j}$ (resp. $g_{\alpha,j}$) sont des fonctions non linéaires de $v,\nabla\varphi$ et de leurs dérivées d'ordre $\leq |\alpha|+1$ par rapport à y (resp.d'ordre $\leq |\alpha|$ par rapport à y). Pour estimer inductivement les dérivées de v et de $\nabla\varphi$ au moyen de (14),(15), les normes (12) ne sont pas bien adaptées. C'est pourquoi on introduit $Q_\eta(z)=\sum_{0\leq j\leq\mu}\|e^{-\eta\tau}\partial_t^j z\|_{H^{\mu-j}(D)}$, $Q'_\eta(z)=\sum_{0\leq j\leq\mu}\|e^{-\eta\tau}\partial_t^j z\|_{H^{\mu-j}(E)}$, où $\tau=t+\gamma$, $\gamma > 0$, μ est un entier $> \left[\frac{N+1}{2}\right]$ et H^s désigne l'espace de Sobolev d'ordre s. A partir de (12), on montre que , pour η assez grand :

(16)
$$\eta^{1/2}Q_\eta(z)+Q'_\eta(z)+Q'_\eta(\nabla\chi) \leq C_\mu(\eta^{-1/2}Q_\eta(Pz)+Q'_\eta(B(z,\nabla\chi)) + e^{-\eta\gamma}\sum_{|\alpha|\leq\mu}\eta^{\mu-|\alpha|}(\|\partial_y^\alpha z\|_{D_o}+\eta^{-1/2}\|\partial_y^\alpha\nabla_{x'}\chi\|_{E_o}))$$

Le théorème 1 s'obtient alors en utilisant (16) et une adaptation des techniques d' Alinhac-Métivier [1],[2].

BIBLIOGRAPHIE.

[1] S.ALINHAC-G.METIVIER,Propagation de l'analyticité des solutions d'équations hyperboliques non-linéaires, Invent.Math. 75(1984), 189-204.

[2] S.ALINHAC-G.METIVIER,Propagation de l'analyticité des solutions d'équations non-linéaires de type principal, Comm.Partial Differential Equations 9(1984), 523-537.

[3] P.GODIN, Analytic regularity of uniformly stable shock fronts with analytic data, à paraître.

[4] A.MAJDA, The stability of multi-dimensional shock fronts, Mem.Amer.Math. Soc., 275(1983).

[5] A.MAJDA, The existence of multi-dimensional shock fronts, Mem.Amer.Math. Soc., 281(1983)

[6] G.METIVIER, Interaction de deux chocs pour un système de deux lois de conservation, en dimension deux d'espace, à paraître dans Trans. Amer. Math.Soc.