JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

GUY MÉTIVIER

Problèmes de Cauchy et ondes non linéaires

Journées Équations aux dérivées partielles (1986), p. 1-29

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1986____A1_0>

PROBLEMES DE CAUCHY ET ONDES NON LINEAIRES

par

Guy METIVIER
UFR de Mathématiques
Université de Rennes I.

Ces exposés ont été conçus comme une introduction (pour non specialistes) à l'étude de problèmes d'ondes pour les équations hyperboliques non linéaires. On ne trouvera pas ci-dessous un survey de tous les résultats concernant l'étude des singularités des solutions des problèmes non linéaires ; on s'est strictement limité à l'étude de quelques problèmes d'ondes (singularités portées par des surfaces), en mettant d'libérément l'accent sur les singularités fortes.

La partie I constitue une introduction où sont présentés les problèmes et donnés quelques points de repères. La partie II est consacrée à l'introduction de la notion de stabilité uniforme des chocs et la partie III à l'étude des ondes discontinues pour les systèmes semilinéaires.

D'un point de vue plus technique, il faut insister sur l'importance que revètent les problèmes de Cauchy ou les problèmes mixtes hyperboliques non linéaires, dans l'étude des ondes fortes. C'est sur une bonne comprehension de problèmes de ce type que reposent les résultats présentés dans les parties II et III.

I - ONDES NON LINEAIRES

1- Position du problème.

1.1 Les équations : pour simplifier l'exposé on ne considérera que des systèmes du premier ordre, les résultats présentés ici ayant tous des analogues pour les équations (ou systèmes) d'ordre supérieur. On fera cependant de façon essentielle la distinction entre deux cas de figure différents :

(1.1.1) $$\partial_t u + \sum_{j=1}^{n} A_j(t, x)\partial_{x_j} u = F(t, x, u)$$ Cas semilinéaire

(1.1.2) $$\partial_t u + \sum_{j=1}^{n} A_j(t, x, u)\partial_{x_j} u = F(t,x, u)$$ Cas quasilinéaire

Les matrices A_j sont de taille $N \times N$, réelles et dépendent de façon C^∞ de leurs arguments. F est à valeurs dans $\mathbb{R}^N$ et est une fonction C^∞ de ses arguments.

Il faut aussi faire une place à part aux systèmes de lois de conservation, à cause de leur propriétés particulières et aussi à cause de leur importance pour les applications :

(1.1.3) $$\partial_t u + \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j} f_j(u) = 0$$

les f_j étant des applications C^∞ de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$.

Tous les systèmes envisagés seront supposés suffisemment hyperboliques (par exemple strictement hyperboliques) dans la direction du temps t. Nous noterons $\lambda_k = \lambda_k(t, x, \xi)$ ou $\lambda_k(t, x, u, \xi)$ les valeurs propres (toutes réelles) de $\sum_{j=1}^{n} \xi_j A_j$.

1.2 Solutions : Les équations étant non linéaires, il nous faut préciser dans quels espaces seront prises les solutions.

Cas semilinéaire : nous ne nous intéresserons qu'à des solutions (localement) bornées. Les deux membres de (1.1.1) ont alors un sens clair, et on ne peut pas faire beaucoup mieux sans hypothèses particulières sur la non linéarité F.

Cas quasilinéaire : pour donner un sens aux produits $A_j(t, x, u)\partial_{x_j}u$, nous supposons u Lipschitzienne. C'est raisonnable, mais pas strictement indispensable.

Systèmes de lois de conservation : pour les solutions assez régulières (Lipschitz) le sytème (1.1.3) prend la forme (1.1.2) avec $A_j = f'_j(u)$, matrice jacobienne de f_j. Par contre l'équation (1.1.3) garde tout son sens lorsque $u \in L^\infty_{loc}$, les dérivations étant prises au sens des distributions. La tradition veut qu'on parle alors de solutions faibles.

1.3 Ondes régulières par morceaux : de façon traditionnelle (Cf Courant - Hilbert [13]) une "onde" est modélisée de la façon suivante : il s'agit d'une solution u du système, singulière sur une surface Σ (le front de l'onde) et régulière en dehors de Σ . Traditionnellement les singularités envisagées sont des sauts de u ou de ses dérivées, u étant supposée régulière jusqu'au bord de part et d'autre de Σ , la surface Σ étant elle même supposée lisse.

Selon les cas de figure, on peut apporter les précisions suivantes :

Cas semilinéaire : la seule restriction posée étant d'être localement bornée, on peut effectivement envisager des sauts de la fonction u elle même, et a fortiori des sauts des dérivées. Dans tous les cas la surface Σ est caractéristique : si $\phi = 0$ en est une équation, on a :

(1.3.1) $\partial_t \phi + \lambda_k(t, x, d_x \phi) = 0$ sur Σ

pour un certain indice k. On remarque donc que la géométrie des fronts d'onde est fixée à l'avance, c'est à dire qu'elle ne dépend pas des valeurs de la solution u.

Cas quasilinéaire : u étant Lipschitzienne, les sauts ne peuvent plus intervenir qu'à partir des dérivées premières. La surface Σ est toujours caractéristique :

(1.3.2) $\partial_t \phi + \lambda_k(t, x, u(t, x), d_x \phi) = 0$ sur Σ

mais la différence fondamentale est que maintenant la géométrie des caractéristiques dépend de u.

Lois de conservation : en plus des sauts des dérivées premières, comme précédemment, on peut à nouveau envisager des sauts de la solution u elle même. On est alors dans la situation suivante : u est solution régulière (forte) du sytème en dehord de Σ , et le fait que u soit solution faible équivaut alors à la condition de saut (dite de Rankine-Hugoniot) :

(1.3.3) $\partial_t \phi . [u] + \sum_{j=1}^{n} \partial_{xj} \phi \left[f_j(u) \right] = 0$ sur Σ

où v désigne le saut de la fonction v le long de Σ.

Notans u^+ et u^- les limites de u sur Σ , prises de part et d'autre de Σ , on est maintenant en présence de deux systèmes de caractéristiques : celui associé aux valeurs propres $\lambda_k(u^+)$ et celui associé au $\lambda_k(u^-)$. Dans certains cas (valeurs propres linéairement dégénérées) on peut avoir :

(1.3.4) $\lambda_k(u^+, d_x \phi) = \lambda_k(u^-, d_x \phi) = -\partial_t \phi$ sur Σ

On est alors en présence d'une discontinuité de contact, et Σ est caractéristique pour l'état u^+ comme pour u^- .

Dans d'autres cas (valeurs propres vraiment non linéaires). Il se peut que Σ ne soit caractéristique ni pour l'état u^+, ni pour l'état u^-. C'est le cas des chocs qui sont des discontinuités de ce type, vérifiant en outre d'autres conditions, parfois appelées conditions d'entropie, et sur lesquelles nous reviendrons ultérieurement.

1.4 Ondes conormales : pour des raisons que nous tenterons d'analyser par la suite, le cadre des ondes régulières par morceaux n'est pas toujours le plus pratique. Au contraire, J.M. Bony [7] a montré qu'une classe de singularités plus vaste que les sauts était bien adaptée aux problèmes d'ondes non linéaires : il s'agit des singularités conormales.

Σ étant une surface régulière dans $\mathbb{R}^{n+1}$, notons μ_Σ(ou μ) l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^{n+1}$, tangents à Σ . Notant H^s l'espace de Sobolev usuel d'ordre s, Bony a introduit les espaces $H^{s,k}_\Sigma$ des fonctions $u \in H^s$ telles que pour toute suite $M_1, \ldots, M_\ell$ de $\ell \leqslant k$ champs de vecteurs de μ, on ait :

(1.4.1) $M_1 \circ \ldots \circ M_l \; u \in H^s$

Bien entendu, tout ceci est local au voisinage d'un point de Σ .

Exemple : dans des coordonnées où Σ est d'équation $x_1 = 0$, $H^{s,k}_\Sigma$ est l'ensemble des u tels que (localement) :

(1.4.2) $x_1^{\alpha_1} \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n} u \in H^s$ pour tout les $|\alpha| \leqslant k$.

En outre $(x_{1_+})^\lambda$ est toujours une fonction conormale, et n'est C^∞ par morceaux que si $\lambda \in \mathbb{N}$.

1.5 Quelques problèmes : pour ce qui concerne les ondes non linéaires, on peut énoncer trois problèmes de base :

a) Propagation d'une onde : étant donnée une onde (régulière par morceaux ou conormale) dans le passé $t<0$, peut-on prévoir son évolution dans l'avenir, en particulier va-t-elle rester une onde du même type ? Il s'agit là d'un problème de stabilité.

b) Interaction d'ondes : décrire les phénomènes qui surgissent lors de la rencontre de deux (ou plusieurs) ondes. On voit apparaître là des phénomènes typiquement non linéaires, d'interaction et de création de nouvelles singularités (ondes).

c) Reflexion d'une onde sur un obstacle.

2. Systèmes semi-linéaires

Bien entendu, il ne s'agit pas de faire un tour complet des résultats existants, mais de donner quelques points de repère.

2.1 Cas de la dimension un d'espace. ($n=1$)

Comme d'habitude pour les problèmes hyperboliques, la dimension un d'espace donne lieu à des méthodes particulières.
Ces méthodes ont permis à J. RAUCH et M. REED de nettoyer complètement les problèmes de propagation et d'interaction, non seulement de singularités isolées comme les ondes décrites ci-dessus, mais aussi dans des cas beaucoup plus généraux. ([39] . [40] . [41]). Pour ce qui concerne les problèmes de réflexion mentionnons les travaux de B. BERNING - M. REED [5] et M. OBERGUGGENBERGER [33] et [34].

2.2 Singularités faibles.

Dans le cas multidimensionnel ($n > 1$) la propagation d'une onde et l'interaction de deux ondes ont d'abord été étudiées par J.M. Bony [7], dans le cadre des ondes conormales. Typiquement, les résultats sont énoncés de la manière suivante :
(2.2.1) Dans un domaine de détermination Ω, on considère soit une surface caractéristique Σ, soit N surface caractéristiques $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_N$ qui se coupent deux à deux transversalement le long de la même variété Δ de codimension deux ; dans ce cas on note $\Sigma = \Sigma_1 \cup \ldots \cup \Sigma_N$. Alors :

Théorème 1 (Bony [7]). Soit $u \in H^s(\Omega)$ $s > \frac{n+1}{2}$, une solution du système semi-linéaire (1.1.1). Si u est $H^{s,k}_{\Sigma}$ dans le passé $\{t < 0\} \cap \Omega$, alors $u \in H^{s,k}_{\Sigma}(\Omega)$.

L'espace $H^{s,k}_{\Sigma}$ lorsque $\Sigma = \Sigma_1 \cup \ldots \cup \Sigma_N$ sera décrit précisément au chapitre III.

Ce théorème initial a été suivi de plusieurs autres ; par exemple pour l'interaction de trois ondes (ou plus) J.M. Bony [9] [10] R. MELROSE - N. RITTER [27] [28]. Pour les problèmes de réflexion M. BEALS - G. METIVIER [3] [4]. Des problèmes importants restent ouverts, comme le problème des caustiques ou le problème des rayons rasants.

Par ailleurs, dans le cas d'une seule onde Σ, J. RAUCH et M. REED [44] ont complété le théorème 1 en montrant que si u est C^∞ par morceaux dans $\Omega_\eta\{t < 0\}$, alors u reste C^∞ par morceaux dans tout Ω.

Remarque 1 : dans les résultats mentionnés ci-dessus, on suppose toujours la solution u donnée sur Ω. Ceci est raisonnable car on dispose par ailleurs de théorème d'existence de solutions H^s ($s > n/2$), par résolution du problème de Cauchy semi-linéaire (S. MIZOHATA [32]).

Remarque 2 : les fonctions de $H^{s,k}_{\Sigma}$ sont (pour k grand) de classe $C^{s-1/2}$ (avec la convention habituelle si $s-1/2 \in \mathbb{N}$). Puisque s est grand, c'est que les singularités (sauts) portent sur des dérivées d'ordre élevé. Il s'agit donc de singularités faibles.

2.3 Vers des singularités fortes.

Les résultats du type du théorème 1 reposent sur deux ingrédients :

1). Un résultat de propagation de régularité conormale pour le problème linéaire $L u = f$.

2). Une propriété d'algèbre : si F est une fonction C^∞ de ses arguments et si $u \in H^{s,k}$ alors $F(u) \in H^{s,k}$.

La propagation de la régularité $H^{s,k}_{\Sigma}$ pour le problème linéaire n'impose aucune restriction sur s et k. Par contre la propriété d'algèbre n'est vraie que si *si* $s > 1/2$, $s+k > \frac{n+1}{2}$ *dans le cas d'une seule surface, ou si* $s > 1$, $s+k > \frac{n+1}{2}$ *lorsque* $\Sigma = \Sigma_1 \cup \dots \cup \Sigma_N$.

On peut donc "généraliser" le théorème 1 en partant d'une solution $u \in H_\Sigma^{s,k_o}(\Omega)$ *avec* $s > 1/2$ *(ou* $s > 1$ *suivant les cas) et* $s+k_o > (n+1)/2$*, et en propageant la régularité* $H_\Sigma^{s,k}$ *pour* $k > k_o$ *du passé vers l'avenir. Mais cette généralisation serait factice sans théorème d'existence de solutions* H^{s,k_o}.
Comme on ne peut guère espérer de théorème d'existence dans H^s *pour* $s < n/2$, *on voit qu'on est forcé à changer assez nettement de point de vue en mélangeant existence et régularité conormale, et en construisant directement des solutions dans un espace* $H^{s,k}$.
Par exemple considérons la situation suivante :

(2.3.1) Soit Δ *une hypersurface régulière dans* $\{t = 0\}$.
Soit $\Sigma_1, \dots, \Sigma_N$ *les* N *surfaces caractéristiques de* L *issues de* Δ.

Théorème 2 *(N. RITTER [45]). Soit* $u_o \in H_\Delta^{s,k}(\mathbb{R}^n)$ *avec* $s > 1$, $s+k > (n+1)/2$. *Alors le problème de Cauchy*

(2.3.2) $L\,u = F(f, x, u) \qquad u_{|t=o} = u_o$

possède (localement) une (unique) solution $u \in H_\Sigma^{s,k}$.

On remarque cependant que les fonctions de $H_\Sigma^{s,k}$ *sont toujours continues lorsque* $s > 1/2$ *si* Σ *est une seule surface, ou* $s > 1$ *si* $\Sigma = \Sigma_1 \cup \dots \cup \Sigma_N$, *et* $s+k > \frac{n+1}{2}$. *Travailler dans des algèbres* $H^{s,k}$ *ne permet donc pas d'étudier les discontinuités.*

2.4 *Ondes discontinues.*

On peut d'abord essayer de résoudre le problème de Cauchy (2.3.2) avec une donnée u_o C^∞ *jusqu'au bord de part et d'autre de* Δ, *avec des sauts le long de* Δ. *On s'attend alors à ce que la solution présente des sauts sur* Σ. *C'est ce qu'ont fait J. RAUCH et M. REED [43] pour les systèmes* 2×2 $(N = 2)$ *dans la catégorie des solutions* C^∞ *par morceaux.*

Pour les systèmes généraux (N quelconque) on peut énoncer.

Théorème 3 *(G. METIVIER [30]). Soit* Δ *comme en (2.3.1) et soit* $u_o \in L^\infty \cap H_\Delta^{o,k}(\mathbb{R}^n)$ *avec* $k > (n+5)/2$. *Alors le problème de Cauchy (2.3.2) possède (localement) une (unique) solution* $u \in L^\infty \cap H_\Sigma^{o,k}$.

Concernant la démonstration de ce théorème, on peut remarquer que si la propriété d'algèbre pour $L^\infty \cap H_\Sigma^{o,k}$ *est relativement facile à obtenir, la propagation dans* $L^\infty \cap H^{o,k}$ *est elle plus délicate. En fait, la propagation* $H^{o,k}$ *étant bien établie il reste à propager des estimations* L^∞ *; ceci est impossible en général (en multidimension !), mais peut être fait pour des fonctions sont on sait à priori qu'elles sont* $H^{o,k}$ $(k > (n+5)/2)$.

On peut ensuite donner l'analogue du théorème 1 pour les ondes dans $L^\infty \cap H^{o,k}$ *(propagation, intéraction, réflexion) (G. METIVIER [31]). Renvoyant au chapitre III pour des énoncés précis, contentons nous de donner maintenant la forme générale des résultats : revenons à la situation décrite en (2.2.1) et considérons une solution* $u \in L^\infty \cap H_\Sigma^{o,k}$ *dans le passé* $\Omega_\eta\{t < 0\}$. *Alors* u *peut être prolongée (de manière unique) en solution* $L^\infty \cap H_\Sigma^{o,k}$ *sur* $\Omega_\eta\{t < T\}$ *pour un certain* $T > 0$. *En outre, ou bien* u *peut être prolongée à* Ω *tout entier, ou bien si* T_* *est un temps maximal d'existence, on a :*

(2.4.1) $\displaystyle \limsup_{t \nearrow T_*} \|u(t)\|_{L^\infty} = +\infty$

3- Système quasilinéaires.

3.1 Quelques références

La litterature concernant les systèmes quasilinéaires et les systèmes de lois de conservation en dimension un d'espace est phénoménale. Donnons seulement quelques points de repère classiques :
P. D. LAX [20] pour la résolution du problème de Riemann, J. GLIMM [16] pour l'existence globale de solutions faibles, O.A. OLEINIK [35] et R. DIPERNA [14] pour l'unicité, F. JOHN [17] pour la formation des singularités... Sans oublier bien sûr R. COURANT - K.O. FRIEDRICHS [12]. On trouvera de très nombreuses autres références dans l'ouvrage de J.A. SMOLLER [46].

Par contre l'étude systématique des systèmes de lois de conservation en multi dimension n'en est qu'à ses débuts. L'ouvrage de A. MAJDA [24] constitue une excellence introduction à ces problèmes, notamment pour ce qui concerne les chocs. On y trouvera aussi de nombreuses références, y compris pour les problèmes monodimensionels.

3.2 Singularités faibles

En multidimension d'espace, S. ALINHAC ([1] [2]) a démontré l'analogue quasilinéaire du théorème 1. Sans rentrer dans les détails, mettons l'accent sur la difficulté nouvelle rencontrée : la solution u est donnée dans un espace H^s, et par conséquent les surfaces caractéristiques qui dépendent de u (cf(1.3.2)) ont une régularité limitée dans Ω, même si on les suppose C^∞ dans le passé. Cela rend la définition (1.4.1) des espaces $H^{s,k}$ très problématique !. En fait, la règle du jeu consiste à gagner en même temps de la régularité (conormale) sur u et les Σ_j.

3.3 Singularités fortes

Il n'est pas clair du tout, ce que pourrait être l'analogue quasilinéaire du théorème 3. Il pourrait s'agir d'un résultat portant sur les discontinuités des dérivées premières de solutions Lipschitziennes.

En fait, la théorie monodimensionelle des systèmes de loi de conservation considère des singularités encore plus fortes :
ondes de choc (de compression), ondes de raréfaction (de détente) et discontinuités de contact. En multidimension, si l'on dispose maintenant de résultats concernant les chocs, l'étude des autres singularités reste à faire. Notons d'ailleurs que la liste des singularités existantes n'est pas arrêtée. (cf les Mach Stems de A. MAJDA - R. ROSALES [26]).

Mettons maintenant l'accent sur la difficulté qui surgit immédiatement dans l'étude de ces singularités fortes : comme dans le cas semi linéaire les problèmes se posent naturellement en terme d'existence, et alors, les surfaces Σ qui dépendent de la solution sont elles mêmes des inconnues. On est donc immédiatement confronté à des problèmes à frontière(s) libre(s).

3.4 Chocs

Paradoxalement, dans l'étude des singularités fortes, c'est le cas des chocs, qu'on aurait pu croire le plus difficile, qui a reçu le premier une réponse (A. MAJDA [22] [23]).
En fait cela s'explique par le fait que les chocs jouissent de la propriété particulière que leur front Σ n'est pas caractéristique.

A. MAJDA 23 a montré l'existence de chocs multidimensionels par résolution d'un problème de Cauchy. Pour simplifier, énonçons ici le corollaire suivant :

Théorème 4 (A. MAJDA [23]). Considérons dans $\{t < 0\}$ une surface et une solution (faible) de (1.1.3) u, qui soit H^s de part et d'autre de Σ (s grand). On suppose que cette singularité est un "choc uniformément stable" (cf chapitre II). Alors Σ se prolonge à des temps > 0, ainsi que u, donnant lieu à une solution (faible) de (1.1.3).

La méthode de Majda consiste à considérer le problème comme un problème mixte à frontière libre Σ , la condition de saut (1.3.3) étant prise comme condition aux limites. L'hypothèse d'uniforme stabilité s'écrit alors comme une condition de Lopatinski uniforme pour le problème mixte hyperbolique.

En outre, A. MAJDA [22] a explicité cette condition d'uniforme stabilité dans des exemples physiques.

Un des problèmes iportants qui se posent est le problème d'interaction de deux chocs. Il a été résolu pour les systèmes de deux lois de conservation (G. METIVIER [29]). Pour des systèmes de taille plus élevée, l'intéraction va créer de nouvelles ondes qui ne seront pas en général des chocs, et on voit qu'il faut d'abord comprendre les phénomènes d'ondes de raréfaction ou de discontinuité de contact.

4. Conclusion

Au cours de ce rapide et sélectif survey, on a vu qu'apparaissent de manière naturelle, dans l'étude des ondes "fortes", des problèmes d'existence soit sous forme de problème de Cauchy, soit sous forme de prolongement d'une solution à travers une surface. Dans la suite nous allons détailler deux aspects. Au chapitre II, qui est fortement inspiré de A. MAJDA [24], nous rapellerons d'abord les théorèmes d'existence de solutions régulières ; nous verrons ensuite comment les versions de ces théorèmes pour les problèmes mixtes constituent la clé de l'étude des chocs uniformément stables.

Au chapitre III nous détaillerons l'étude des ondes discontinues pour les systèmes semi linéaires.

II - ONDES DE CHOC MULTIDIMENSIONNELLES

Le but de ce chapitre est d'introduire la notion de stabilité uniforme pour les chocs, liée à l'étude du problème mixte hyperbolique non linéaire avec condition de Lopatinski uniforme. Pour une présentation complète du problème des chocs, on renvoie à nouveau à A. MAJDA [24].

1- Solutions régulières du problème de Cauchy .

1.1 Notations, résultats

Considérons le système quasilinéaire :

$$(1.1.1) \qquad \partial_t u + \sum_{j=1}^{n} A_j(t, x, u)\partial_{x_j} u = F(t, x, u)$$

où les A_j *sont des matrices réelles* $N \times N$, *fonctions* C^∞ *de* (t, x, u) $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^N$, *et* F *est une fonction* C^∞ *de* $\mathbb{R}^{n+1}\times\mathbb{R}^N$ *dans* $\mathbb{R}^N$. *On suppose aussi que les* A_j *et* F *ne dépendent pas de* (t, x) *pour* $|t| + |x|$ *grand, et que* $F(t, x, 0) \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$. *En fait, les hypothèses pourraient être localisées autour d'un point* (t^o, x^o, u^o).

Nous faisons l'hypothèse de symétrisabilité suivante :

(1.1.2) Il existe une matrice $R(t, x, u, \xi)$, C^∞ *sur* $\mathbb{R}^{n+1}\times\mathbb{R}^N\times(\mathbb{R}^n\setminus 0)$, *homogène de degré 0 en* ξ, *indépendante de* (t, x) *pour* $|t| \times |x|$ *grand, et telle que :*

i) R *est symétrique définie positive.*

ii) $R(t, x, u, \xi) \sum_{j=1}^{n} \xi_j A_j(t, x, u)$ *est symétrique.*

Cette condition permet d'englober le cas des systèmes hyperboliques symétriques au sens de Friedrichs [15] (cas où R *peut être choisi indépendant de* ξ*) et le cas des systèmes strictement hyperboliques (cas où les valeurs propres de* $\sum_{j=1}^{n} \xi_j A_j(t, x, u)$ *sont toujours toutes réelles et simples).*

Sous les hypothèses précédentes on énonce :

<u>Théorème 1</u> : soit $u_0 \in H^\mu(\mathbb{R}^n)$ *avec* $\mu > \frac{n}{2} + 1$. *Alors il existe* $T > 0$ *et une unique fonction* $u \in C^0([0, T] ; H^\mu(\mathbb{R}^n))$ *solution de (1.1.1) sur* $]0, T[\times \mathbb{R}^n$, *avec donnée de Cauchy :*

$$(1.1.3) \qquad u_{|t=0} = u_0$$

Notons alors T_* *la borne supérieure des* T *tels que la solution* u *existe dans* $C^0([0, T] ; H^\mu(\mathbb{R}^n))$. *On a alors.*

<u>Théorème 2</u> : ou bien $T_* = +\infty$, *ou bien*

$$(1.1.4) \qquad \limsup_{t\to T_*} \{ \|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + \|\partial_x u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \} = +\infty$$

Dans cet énoncé $u(t)$ *désigne la fonction* $x \to u(t, x)$ *et* $\partial_x u = (\partial_{x_1} u, \dots, \partial_{x_n} u)$

Notons que le cas où $T_* < +\infty$, $\|u(t)\|_{L^\infty}$ *est borné lorsque* $t \longrightarrow T_*$ *et ou* $\|\partial_x u(t)\|_{L^\infty} \longrightarrow +\infty$, *correspond précisément à la formation de chocs.*

Ces théorèmes sont démontrés par Majda [24] (et aussi le théorème 1 par KATO [18]) dans le cas des sytèmes symétriques. Le théorème 1 est aussi démontré dans l'hypothèse (1.1.2) par M. TAYLOR [47], mais sans contrôle précis de l'indice μ. *Comme de toutes façons cela constitue un bon exercice d'introduction aux techniques d'hyperbolique non linéaire, nous allons détailler quelque peu la preuve de ces théorèmes.*

1.2 Le problème linéarisé

Introduisons les espaces $W_T^\mu = L^\infty([0, T], H^\mu) \cap C_W([0, T], H^\mu)$, où $C_W([0, T], H^\mu)$ désigne l'espaces des fonctions continues sur $[0, T]$ à valeurs dans H^μ muni de sa topologie faible. W_T^μ est muni de la norme de $L^\infty([0, T]; H^\mu)$. On introduit aussi l'espace $X_T = \{v \in W_T^\mu \ / \ \partial_t u \in W_T^{\mu-1}\}$, muni de la norme évidente. Alors $X_T \subset C^1([0, T] \times \mathbb{R}^n)$ et nous noterons.

(1.2.1) $$|||v|||_T = \sup_{t\in[0,T]} \{\|v(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + \|\partial_x v(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\}.$$

Pour $v \in X_T$ considérons l'opérateur linéaire

$$L_v = \partial_t + \sum A_j(t, x, v(t, x))\partial_{xj}$$

et le problème de Cauchy :

(1.2.2) $$\begin{cases} L_v u = f \\ u_{|t=0} = g \end{cases}$$

Théorème 3 : étant donnés $f \in W_T^\mu$ et $g \in H^\mu(\mathbb{R}^n)$, il existe une unique solution $u \in L^2([0, T]; H^\mu)$ du problème de Cauchy (1.2.5). En outre $u \in C^0([0, T]; H^\mu)$ et

(1.2.3) $$\|u(t)\|_\mu \leqslant K.e^{\lambda t} \|g\|_\mu + C\int_0^t e^{\lambda(t-s)}\|f(s)\|_\mu \, ds.$$

où K ne dépend que de $|||v|||_T$, alors que λ et C ne dépendent que de $\|v\|_{X_T}$

Dans (1.2.3), $\| \ \|_\mu$ désigne la norme de $H^\mu(\mathbb{R}^n)$.

Nous esquissons la preuve de ce théorème, en suivant des lignes très classiques.

1ère étape : *Inégalités d'énergie pour u régulière*

Pour avoir accès au calcul symbolique on remplace l'opérateur L_v par l'opérateur paradifférentiel $P = \partial_t + \sum T_{A_j(v)} \partial_{xj}$, où T_a désigne un opérateur paradifférentiel en (x, D_x) de symbole a, t étant considéré comme paramètre.

Lemme 1 : On a
$$\|(L_v u - Pu)(t)\|_\mu \leqslant K_0\|u(t)\|_\mu + K(\|v(t)\|_{L^\infty}) \|v(t)\|_\mu . \|\partial_x u(t)\|_{L^\infty}$$

En effet $A_j(v) = A_j(0) + \tilde{A}_j$, ou $A_j(0)$ est C^∞ et constante en dehors d'un compact, et ou $\|\tilde{A}_j(t)\|_\mu \leqslant K(\|v(t)\|_{L^\infty}) \|v(t)\|_\mu$.

Puisque $A_j - T_{A_j}$ est régularisant, il suffit de vérifier que pour $a \in H^\mu(\mathbb{R}^n)$ et $u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ on a $w = a\,u - T_a u \in H^\mu(\mathbb{R}^n)$, ce que résulte, avec les notations de Bony [6], des relations : $w = \sum \Delta_k a . S_{k+2}u$, $\|S_{k+2}u\|_{L^\infty} \leqslant \|u\|_{L^\infty}$; $\|\Delta_k a\|_{L^2} \leqslant 2^{-k\mu} \varepsilon_k$ avec $\|\varepsilon_k\|_{\ell^2} \leqslant K.\|a\|_\mu$.

R étant donné en (1.1.2) notons $r(t, x, \xi) = R(t, x, v(t, x), \xi)$, $(1 + |\xi|^2)^\mu$. Pour tout $t \in [0, T]$, r est un symbole en (x, ξ) Lipschitzien en x ; le calcul paradifférentiel pour de tels symboles, donne lieu a un càlcul symbolique pour les symboles principaux avec restes de degré un de moins. On a alors :

Lemme 2 : il existe $c = c(|||v|||_T) > 0$ et $K_1 = K_1(|||v|||_T)$ tels que :
$$\forall t \in [0, T] \qquad Re(T_r u(t), u(t))_{L^2(\mathbb{R}^n)} \geqslant c\|u(t)\|_\mu^2 - K_1\|u(t)\|_{\mu-1/2}^2$$

Introduisant $\tilde{r} = r + K_1(1 + |\xi|^2)^{\mu-1/2}$ on a alors :

$$Re(T_{\tilde r} u(t),\ u(t))_{L^2} \geqslant e(\ |||v|||_T)\ \|u(t)\|_\mu^2$$

$$Re(T_{\tilde r} u(0),\ u(0))_{L^2} \leqslant K(\ |||v|||_T)\ \|u(0)\|_\mu^2$$

et aussi

$$Re(T_{\frac{\partial \tilde r}{\partial t}}\ u(t),\ u(t))_{L^2} \leqslant C(\ \widetilde{|||v|||}_T)\ \|u(t)\|_\mu^2$$

(1.2.4) $\widetilde{|||v|||}_T = |||v|||_T + \underset{t\in[0,T]}{Sup} \|\partial_t v(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$. *On a :*

$$Re(T_{\tilde r} u(t),\ u(t)) - Re(T_{\tilde r} u(0),\ u(0)) =$$
$$= \int_0^\tau \{Re(T_{\frac{\partial \tilde r}{\partial t}}\ u(s),\ u(s)) + Re((T_{\tilde r} + T^*_{\tilde r})\partial_t u(s),\ u(s))\}ds$$

Ecrivant que $\partial_t = P - T_A$ *où* $A(t,\ x,\ \xi) = \sum i\ \xi_j\ A_j(t,\ x,\ v(t,\ x))$, *on tire de (1.1.2) et du calcul symbolique pour les opérateurs paradifférentiels à coefficients Lipschitziens, que :*

$$|Re((T_{\tilde r} + T^*_{\tilde r})T_A\ u(s),\ u(s))| \leqslant K(\ |||v|||_T)\|u(s)\|_\mu^2\ .$$

Regroupant les différentes estimations, on a montré que :

(1.2.5) $$\|u(t)\|_\mu^2 < K\ \|u(0)\|_\mu^2 + C\ \int_0^\tau \|u(s)\|_\mu\ (\|u(s)\|_\mu + \|\partial_x u(s)\|_{L^\infty}\ \|v(s)\|_\mu)ds$$

où $K = K(\ |||v|||_T)$ *et* $C = C(\ \widetilde{|||v|||}_T)$. *Majorant* $\|\partial_x u\|_{L^\infty}$ *par* $\|u\|_\mu$ *(puisque* $\mu > \frac{n}{2}+1$*), l'estimation (1.2.3) en résulte.*

$2^{è}$ *étape :* *__Existence d'une solution faible.__*

L'adjoint de L_v *est* $L_v^* = -\partial_t - \sum \partial_{xj}(A_j^*(t,\ x,\ v(t,\ x)).)$

Introduisons $P^* = -\partial_t - \sum \partial_{xj}\ T_{A_j^*}$.

__Lemme 3__ : Il existe C (dépendant de v) tel que pour $\phi \in C_0^\infty([0,\ T]\times \mathbb{R}^n)$ *et* $t\in[0,\ T]$ *on ait :*

$$\|(L_v^* - P^*)\phi\ (t)\|_{-\mu} \leqslant C\ \|\phi(t)\|_{-\mu}.$$

En effet, il suffit de montrer que pour $0 \in H^\mu(\mathbb{R}^n)$ *et* $\phi\in H^{-\mu}(\mathbb{R}^n)$ *on a* $w = a\ \phi - T_a\phi \in L^1(\mathbb{R}^n) \subset H^{-\mu+1}$. *En fait, avec les notations de Bony [6] , on a* $w = \sum w_k$ *avec* $w_k = \Delta_k a\ .\ S_{k+2}\ \phi$ *et* $\sum \|w_k\|_{L^1} < +\infty$. *puisque* $\|\Delta_k a\|_{L^2} \leqslant 2^{-k\mu}\varepsilon_k$ *avec* $(\varepsilon_k) \in \ell^2$ *et que* $\|S_{k+2}\|\phi_{L^2} \leqslant 2^{k\mu}\varepsilon'_k$ *avec* $\varepsilon'_k \in P^2$ *(puisque* $-\mu < 0$*).*

Puisque R^{-1} *symétrise* L^*, *comme à la première étape on en déduit des inégalités d'énergie :*

$$\|\phi(t)\|_{-\mu} \leqslant C\{\ \|\phi(T)\|_{-\mu} + \int_t^T \|L_v^*\ \phi(s)\|_{-\mu} ds\}$$ *où C dépend ici de v et de T. Suivant le schéma habituel, on en tire :*

__Lemme 4__ : pour $f \in L^2([0,\ T];\ H^\mu)$ *et* $g \in H^\mu(\mathbb{R}^n)$, *le problème (1.2.2) possède une solution dans* $L^2([0,\ T],\ H^\mu)$.

$3^{è}$ *étape :* *__Faible = fort.__*

U étant solution dans $L^2([0,\ T];\ H^\mu)$, *on régularise u par convolution avec* $j_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}j(x/\varepsilon)$, *où* $j\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ $j \geqslant 0$ *et* $\int j(x)dx = 1$. *Notons* J_ε *l'opérateur de convolution par* j_ε.

Il résulte du lemme 1 que l'opérateur $L_v - P$ *est borné de* $L^2([0,\ T];\ H^\mu)$ *dans lui même.*

En outre le calcul paradifférentiel (à symboles Lipschitziens) montre que $[J_\varepsilon, P]$ *est une famille bornée d'opérateurs de degré 0. On en déduit que* $[J_\varepsilon, L]$ *converge fortement vers 0 dans* $L^2([0, T], H^\mu)$.

En outre, $\partial_t u = f - \sum A_j \partial_{xj} u \in L^2([0, T], H^{\mu-1})$, *et* $J_\varepsilon u \in H^1([0, T]; H^\infty) \subset C^0([0, T]; H^\mu)$. *De plus* $J_\varepsilon u \to u$ *dans* $L^2([0, T]; H^\mu)$ *et comme on vient de le voir,* $L_v J_\varepsilon u \longrightarrow f$ *dans* $L^2([0, T]; H^\mu)$. *Appliquant les inégalités d'énergie (1.2.3) aux* $J_\varepsilon u$, *on conclut que la suite* u_ε *est de Cauchy dans* $C^0([0, T]; H^\mu)$, *que la limite* $u \in C^0([0, T]; H^\mu)$ *et vérifie aussi (1.2.3).*

1.3 Le schéma itératif.

Partant de $u_0(t, x) = u_0(x)$ *on définit par récurrence une suite* u_ν *en résolvant :*

$$(1.3.1) \qquad \begin{cases} L_{u_\nu} u_{\nu+1} = F(t, x, u_\nu) \\ u_{\nu+1} \,|_{t=0} = u_0 \end{cases}$$

En fait, introduisant $Y_T = C^0([0, T]; H^\mu) \cap C^1([0, T]; H^{\mu-1}) \subset X_T$, *on voit que* $u_0 \in Y_T$ *pour tout choix de T ; si* u_ν *est défini dans* Y_T, *alors* $f_\nu = F(t, x, u_\nu) \in C^0([0, T]; H^\mu)$ *et le théorème 3 donne* $u_{\nu+1} \in C^0([0, T]; H^\mu)$. *L'équation donne immédiatement que* $\partial_t u_{\nu+1} \in C^0([0, T]; H^{\mu-1})$ *et* $u_{\nu+1} \in Y_T$.

On voit donc que le schéma (1.3.1) définit une suite $u_\nu \in Y_T$, *pour but* $T > 0$.

Nous utiliserons le lemme d'interpolation suivant :

Lemme 5 : Soit $\mu' \in]\mu-1, \mu[$. *Il existe C tel que pour tout* $T > 0$ *tout* $u \in X_T$ *et tout* $t \in [0, T]$ *:*

$$\|u(t) - u(0)\|_{\mu'} \leq C\, t^{\mu-\mu'} \|u\|_{X_T}.$$

Choisissant $\mu' > \frac{n}{2} + 1$, *on en déduit qu'il existe* C_0 *et* $\varepsilon > 0$ *tels que pour tout T et tout* $u \in X_T$ *on ait :*

$$(1.3.2) \qquad |||u|||_T \leq \|u(0)\|_{Lip(\mathbb{R}^n)} + C_1 T^\varepsilon \|u\|_{X_T}.$$

Lemme 6 : il existe $T > 0$ *tel que la suite* u_ν *soit bornée dans* Y_T.

Preuve : soient $C_1(M)$ *et* $C_2(M)$ *des fonctions telles que* $\|v(t)\|_\mu \leq M$ *et* $\|u(t)\|_\mu \leq M$ *impliquent* $\|F(t,., v(t)\|_\mu \leq C_1(M)$ *et* $\|\sum A_j(t,., v(t)).\partial_{xj} u(t)\|_{\mu-1} \leq C_2(M)$.

Les constantes $K(M)$, $\lambda(M)$, $C(M)$ *étant celles de (1.2.3) on choisit successivement* $M_0 > \|u_0\|_{Lip(\mathbb{R}^n)}$, $M_1 > K(M_0)\|u_0\|_\mu$ *et* $M_2 = C_1(M_1) + C_2(M_1)$. *Enfin on fixe T assez petit pour que*

$$(1.3.3) \qquad \begin{cases} e^{T\lambda(M_1)} \{K(M_0)\|u_0\|_\mu + T\, C(M_1 + M_2)\, C_1(M_1)\} \leq M_1 \\ \|u_0\|_{Lip(R^n)} + C_1 T^\varepsilon (M_1 + M_2) \leq M_0 \end{cases}$$

On montre par récurrence sur ν *que*

$$(1.3.4) \qquad \|u_\nu\|_{C^0([0,T], H^\mu)} \leq M_1$$

(1.3.5) $\|\partial_t u_\nu\|_{C^0([0,T]\,;\,H^{\mu-1})} \leqslant M_2$

(1.3.6) $|||u_\nu|||_T \leqslant M_0$

Ces relations sont vraies pour $\nu = 0$. Si elles sont satisfaites à l'ordre ν, alors $\|u_\nu\|_{X_T} \leqslant M_1 + M_2$ et on tire du théorème 3 que (1.3.4) à l'ordre $\nu+1$ est vérifiée. Ecrivant $\partial_t u_{\nu+1} = f_\nu - \sum A_j(u_\nu)\,\partial_{xj} u_{\nu+1}$ (1.3.5) à l'ordre $\nu+1$ en résulte de par le choix de M_2.
Enfin, (1.3.2) fournit (1.3.6) au cran $\nu+1$, et le lemme est démontré.

Lemme 7 : La suite u_ν converge dans $C^0([0,T], H^{\mu-1})$.

Preuve : on écrit :

$$L_{u_\nu}(u_{\nu+1}-u_\nu) = f_\nu - f_{\nu-1} + (L_{u_\nu} - L_{u_{\nu-1}})u_\nu = g_\nu$$

Sachant que u_ν est bornée dans Y_T, on voit que

$$\|g_\nu(t)\|_{\mu-1} \leqslant C\,\|u_\nu(t) - u_{\nu-1}(t)\|_{\mu-1}$$

Les coefficients de L_{u_ν} sont bornés dans Y_T, et comme pour le théorème 3, on a des inégalités d'énergie dans $H^{\mu-1}$ pour u_ν avec des constantes indépendantes de ν. On en déduit que :

$$\|u_{\nu+1}(t) - u_\nu(t)\|_{\mu-1} \leqslant C\int_0^t e^{\lambda(t-s)}\,\|u_\nu(s) - u_{\nu-1}(s)\|_{\mu-1}\,ds$$

et le lemme en résulte immédiatement.

Preuve du théorème 1 : notons u la limite de la suite u_ν. Puisque u_ν est bornée dans Y_T (donc dans X_T) et que $u_\nu \longrightarrow u$ dans $C^0([0,T], H^{\mu-1})$, on en déduit que $u \in W_T^\mu$, et aussi que $u_\nu \to u$ dans $C^0([0,T]; H^{\mu'})$ pour tout $\mu' < \mu$. Le passage à la limite dans (1.3.1) n'offre aucune difficulté (prenant $\mu' > \frac{n}{2} + 1$) et u est solution de (1.1.1). On en tire que $\partial_t u \in W_T^{\mu-1}$ donc que $u \in X_T$. Appliquant le théorème 3 à l'opérateur L_u, on regagne la continuité et $u \in C^0([0,T]; H^\mu)$; le théorème 1 est donc démontré pour ce qui concerne l'existence de solution.

L'unicité résulte d'inégalités d'énergie L^2 ou $H^{\mu-1}$ pour l'opérateur L_u, appliquées à l'équation :

$$\begin{cases} L_u(u-v) = F(u) - F(v) + (L_u - L_v).v \\ u - v\,|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

si u et v sont deux solutions de (1.1.1) (1.1.3).

1.4 Principe de prolongement

Le théorème 2 résulte du lemme suivant :

Lemme 8 : Soit $u \in C^0([0,T[, H^\mu)$ solution de (1.1.1) (1.1.3). On suppose que $\sup_{t<T} \|u(t)\|_{Lip(\mathbb{R}^n)} < +\infty$. Alors $u \in C^0([0,T]; H^\mu)$ et peut être prolongée en solution dans $C^0([0,T']; H^\mu)$ pour un certain $T' > T$.

Preuve : notons $f = F(t,x,u)$. Alors, l'hypothèse sur u et l'équation (1.1.1) montrent que $|||u|||_{T''}$ est borné indépendemment de $T'' < T$. Pour l'opérateur L_u, on applique à la solution (forte) u sur $[0,T'']$ de (1.2.2) les inégalités d'énergie (1.2.5), et on voit que il existe C tel que pour tout t T on ait :

$$\|u(t)\|_\mu^2 \leqslant C\left\{\|u(0)\|_\mu^2 + \int_0^t \|u(s)\|_\mu^2\,ds.\right.$$

On voit donc que $u \in L^\infty([0, T]; H^\mu)$, *donc que* $u \in X_T$, *et le théorème 3 redonne à nouveau la continuité :* $u \in C^0([0, T]; H^\mu)$.

2- Problème mixte hyperbolique.

2.1 Condition de Lopatinski uniforme.

Considérons le problème :

$$(2.1.1)\quad \begin{cases} \partial_t u + \sum A_j(t, x, v, u)\partial_{xj} u = F(t, x, v, u) & \text{dans } x_n > 0 \\ B(t, x, v, u) = 0 & \text{sur } x_n = 0 \end{cases}$$

où $v = v(t, x)$ *est une fonction donnée. Les fonctions* A_j *et* F *sont des fonctions* C^∞ *sur* $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N$. *On suppose que* A_n *est inversible, et on appelle* N_0 *le nombre de valeurs propres* >0 *de* A_n. B *est une fonction* C^∞ *sur* $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}^{N_0}$. *On fait aussi les mêms hypothèses qu'au § 1.1 pour* $|t|+|x|$ *grand.*

L'introduction de la fonction v correspond à des raisons techniques.

On suppose le problème strictement hyperbolique : pour tout $(t, x, v, u) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N$ *et tout* $\xi \in S^{n-1}$ *la matrice* $\sum \xi_j A_j(t, x, v, u)$ *a N valeurs propres réelles distinctes. (Comme Majda l'a remarqué [22], cette hypothèse peut être affaiblie). Pour* $\tau \in \mathbb{C}$, $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$ *avec* $\mathrm{Im}\,\tau < 0$, *notons* $E(t, x, v, u, \tau, \xi')$ *le sous espace de* $\mathbb{C}^N$ *engendré par les vecteurs propres généralisés de* $A_n^{-1}(\sum \xi_j A_j + \tau Id)$ *associés aux valeurs propres de partie imaginaire* <0.

Cet espace se prolonge par continuité aux (τ, ξ') *tels que* $\mathrm{Im}\tau \leq 0$, $|\tau|+|\xi'| > 0$. *Sa dimension est constante, et en faisant* $\xi' = 0$ *on voit qu'elle est* N_0.

Notons $B(t, x, v, u)$ *la matrice* $N_0 \times N$ $\dfrac{\partial B}{\partial u}(t, x, v, u)$.

La condition de Lopatinski uniforme s'énonce :
(Cf KREISS [19], et aussi CHAZARAIN - PIRIOU [11], TAYLOR [47]).

(2.1.2) *pour tout* $(t, x, v, u, \tau, \xi') \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{C} \times \mathbb{R}^{n-1}$ *tels que* $\mathrm{Im}\tau \leq 0$ *et* $|\tau| + |\xi'| = 1$, $B(t, x, v, u)$ *est un isomorphisme de* $E(t, x, v, u, \tau, \xi')$ *sur* $\mathbb{C}^{N_0}$.

2.2 Quelques résultats

Enonçons d'abord un résultat concernant le problème de Cauchy pour (2.1.1) avec données initiales nulles :

Théorème 4 : Soit $\mu > \frac{n+1}{2} + 1$, *et soit* $v \in H^\mu(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ *tel que* $F(t, x, v, 0) = 0$ *et* $B(t, x, v, 0) = 0$ *pour* $t < 0$.
Alors, il existe $T > 0$ *et* $u \in H^\mu(\{x_n > 0, t < T\})$ *solution de (2.1.1) vérifiant* $u = 0$ *pour* $t < 0$.

On peut aussi résoudre le problème de Cauchy pour (2.1.1) (sans v en général!) avec des données non nulles. Comme d'habitude, un certain nombre de conditions de compatibilités sont requises sur l'arête $t = x_n = 0$.

En fait, on construit la solution sous la forme $v + u$, *avec* $u = 0$ *pour* $t < 0$, v *étant déterminée par son développement de Taylor sur* $t = 0$. *On voit alors pourquoi il est naturel d'introduire une fonction v dans le problème (2.1.1).*

Les conditions de compatibilités sont automatiquement satisfaites si la donnée de Cauchy sur $t = 0$ *provient d'une solution dans le passé* $t < 0$. *On peut alors énoncer un théorème de prolongement d'une solution* H^μ *donnée dans* $t < 0$.

On peut aussi énoncer un résultat analogue au théorème 2.

2.3 *Quelques remarques*

Beaucoup reste à faire dans l'étude du problème mixte hyperbolique non linéaire. Par exemple a-t-on la même régularité sur la solution que sur les données de Cauchy comme dans le cas linéaire (RAUCH [36], RAUCH - MASSEY [38]) ?

L'étude des problèmes à bord caractéristique aurait un intérêt évident (voir MAJDA - OSHER [25] ou RAUCH [37] dans le cas des problèmes linéaires.

Enfin la condition de Lopatinski uniforme n'est pas toujours satisfaite, par exemple pour le système de l'élasto dynamique avec condition de Neumann. Signalons à ce sujet le travail de M. TOUGERON qui a résolu le problème mixte pour ce système en dimension deux d'espace. [48].

3- *Chocs uniformément stables.*

3.1 *Chocs plans*

Considérons un système de lois de conservation :

(3.1.1) $$\partial_t u + \sum \partial_{xj} f_j(u) = 0$$

Soit Σ un hyperplan dans $\mathbb{R}^{n+1}$ de normale $(\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_n)$. Soit u^+ et u^- deux points de $\mathbb{R}^N$, $u^+ \neq u^-$, et soit u la fonction qui vaut u^+ d'un côté de Σ et u^- de l'autre côté. Alors u est solution faible de (3.1.1) si et seulement si :

(3.1.2) $$\nu_0 (u^+ - u^-) + \sum \nu_j (f_j(u^+) - f_j(u^-)) = 0$$

On voit que $|\nu_1| + \dots + |\nu_n| \neq 0$, et quitte à changer de base dans R^n on peut supposer que Σ est déquation $x_n = \sigma t$. Alors la condition de saut s'écrit :

(3.1.3) $$\sigma(u^+ - u^-) = f_n(u^+) - f_n(u^-)$$

Notons $\lambda_k(u)$ les valeurs propres ordonnées en croissant et $r_k(u)$ les vecteurs propres de la matrice $A_n(u) = f'_n(u)$. Supposons ici pour simplifier que $\lambda_k \neq \lambda_j$ si $j \neq k$.

Définition : la valeur propre λ_k est vraiment non linéaire [resp linéairement dégénérée] si on a $r_k(u).\mathrm{grad}_u \lambda_k(u) \neq 0$ [resp $r_k(u).\mathrm{grad}_u \lambda_k(u) \equiv 0$].

Lemme 9 : (Lax [20]) il existe au voisinage de $(u^0, u^0, \lambda_k(u^0))$ dans $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ une variété de dimension N+1 de solutions de (3.1.3). On peut la paramétrer par :

(3.1.4) $$\begin{aligned} u^+ &= U(u^-, \varepsilon) = u^- + \varepsilon r_k(u^-) + O(\varepsilon^2) \\ \sigma &= S(u^-, \varepsilon) = \lambda_k(u^-) + \tfrac{1}{2} \varepsilon r_k(u^-)\, \mathrm{grad}\, \lambda_k(u^-) + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

Condition de choc (Lax [20]). On dit que la solution définie par u^+, u^- et le plan $x_n = \sigma t$, (u^+, u^-, σ) vérifiant (3.1.3), est un k-choc si l'on a

(3.1.5) $$\begin{cases} \lambda_k(u^+) < \sigma < \lambda_k(u^-) \\ \lambda_{k-1}(u^-) < \sigma < \lambda_{k+1}(u^+) \end{cases}$$

On convient bien sûr que $\lambda_{-1} = -\infty$ et $\lambda_{+1} = +\infty$.

Dans le cas où λ_k est vraiment non linéaire, lorsque $u^+ - u^-$ est petit, cela revient à prendre dans (3.1.3) $\varepsilon < 0$, si l'on fait la normalisation R_k-grad $\lambda_k = 1$. Dans ce das Lax [21] a montré que (3.1.4) équivaut à toutes les conditions d'entropie raisonnables.

3.2 Equations des chocs multidimensionnels

Soit Σ *une surface (localement d'équation* $x_n = \phi(t, x')$*, où l'on note* $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$*. Soit* u^+ *[resp* u^-*] une fonction définie pour* $x_n > \phi$ *resp* $x_n < \phi$ *, et soit u la fonction qui vaut* u^+ *pour* $x_n > \phi$ *et* u^- *pour* $x_n < \phi$ *. On écrit que u est solution faible de (3.1.1) en disant que* u^+ *et* u^- *sont solutions régulières de part et d'autre de* Σ *et en ajoutant la condition de saut :*

$$(3.2.1) \qquad \frac{\partial\phi}{\partial t}[u] + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial\phi}{\partial x_j}[f_j(u)] - [f_n(u)] = 0$$

Le problème apparait donc comme un problème à frontière libre où les inconnues sont u^+*,* u^- *et* ϕ*. De manière classique, on fixe la frontière libre en effectuant le changement de variables* $\tilde{x}_n = x_n - \phi(t, x')$*, et on obtient alors les équations :*

$$(3.2.2) \qquad \partial_t \tilde{u}^\pm + \sum_{j=1}^{n-1} A_j(\tilde{u}^\pm)\partial_{x_j} \tilde{u}^\pm + A_n(\tilde{u}^\pm, d\,\phi)\partial_{\tilde{x}_n} \tilde{u}^\pm = 0 \qquad \text{dans } \pm x_n > 0$$

où $A_n(u, d\,\phi) = A_n(u) - \sum \partial_{x_j}\phi\, A_j(u) - \partial_t\phi\, Id.$

La condition de saut (3.2.1) reste inchangée. On l'écrit sous la forme :

$$(3.2.3) \qquad g(\tilde{u}^+, \tilde{u}^-, d\,\phi) = 0 \text{ sur } \tilde{x}_n = 0$$

Pour se ramener à la situation habituelle des problèmes mixtes, on change $\tilde{x}_n$ *en* $-\tilde{x}_n$ *pour* $\tilde{u}^-$*, et on peut alors écrire les équations la forme :*

$$(3.2.4) \qquad \begin{cases} L(u^\pm, d\,\phi)\,.\,u^\pm = 0 & \text{dans } \tilde{x}_n > 0 \\ g(\tilde{u}^+, \tilde{u}^-, d\,\phi) = 0 & \text{sur } \tilde{x}_n = 0 \end{cases}$$

(3.2.5) *Remarque* *: si* $(u^+, u^-, \text{et } \phi)$ *sont comme ci dessus, alors pour tout* $(t^0, x^0) \in \Sigma$ *,* $\hat{u}^\pm = u^\pm(t^0, x^0)$*, et l'hyperplan* $\hat{\Sigma}$ *tangent à* Σ *en* (t^0, x^0)*, d'équation* $x_n = d\,\phi_{(t^0, x^0)}(t, x')$ *vérifient (3.1.2) :* $(\hat{u}^\pm, \hat{\Sigma})$ *est le choc plan "tangent" au choc* $(u^\pm, \Sigma)$ *en* (t^0, x^0)*.*

3.3 Le problème linéarisé

Afin d'étudier le problème (3.2.4) il est naturel de commencer par étudier un problème linéarisé. Un premier moyen d'introduire une linéarisation est le suivant : considérons $(\hat{u}^\pm, \sigma)$ *vérifiant (3.1.3) et supposons que* $(u^\pm(\varepsilon), \phi(\varepsilon))$ *est une famille de solutions de (3.2.4) telle que pour* $\varepsilon = 0$*,* $u^\pm_\varepsilon = \hat{u}^\pm$*,* $\phi_\varepsilon = \sigma t$*. Différentiant (3.2.4) par rapport à* ε*, on obtient pour* $v^\pm = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} u^\pm_\varepsilon$ *et* $\Psi = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \phi_\varepsilon$ *des équations du type :*

$$(3.3.1) \qquad \begin{cases} \hat{L}^\pm v^\pm = \partial_t v^\pm + \sum \hat{A}_j^\pm \partial_{x_j} v^\pm = 0 & \text{Pour } x_n > 0 \\ \hat{G}(v^\pm, d\,\Psi) = \hat{b}_0\, \partial_t\Psi + \sum \hat{b}_j\, \partial_{x_j}\Psi + \hat{M}(v^+, v^-) = 0 & \text{pour } x_n = 0 \end{cases}$$

où $\hat{A}_j^\pm = A_j(u^\pm)$ *pour* $j = 1, \ldots, n-1$*,* $\hat{A}_n^\pm = \pm(A_n(\hat{u}^\pm) - \sigma)$

$\hat{b}_0 = [\hat{u}]$ *,* $\hat{b}_j = [f_j(\hat{u})]$ *pour* $j = 1, \ldots, n-1$ *et*

$\hat{M}(v^+, v^-) = \hat{A}_n^- v^- - \hat{A}_n^+ v^+$*.*

De façon classique, étudier la stabilité de la solution définie par $(\sigma, \hat{u}^\pm)$*, signifie étudier le problème*

$$(3.3.2) \qquad \begin{cases} \hat{L}^\pm v^\pm = f^\pm \\ \hat{G}(v^\pm, d\,\Psi) = g. \end{cases}$$

D'autre part, reprenant le schéma itératif du § 1, on peut chercher à résoudre (3.2.4) par le schéma suivant :

$$(3.3.3)\qquad \begin{cases} L(u^{\pm}_{\nu}\ , d\,\phi_{\nu})\ u^{\pm}_{\nu+1} = 0 \text{ dans } x_n > 0. \\ d_w \mathcal{G}(w_{\nu})\ (w_{\nu+1} - w_{\nu}) = -G(w_{\nu}) \quad \text{sur } x_n = 0 \end{cases}$$

où $w_{\nu} = (u^{+}_{\nu}, u^{-}_{\nu}, d\,\phi_{\nu})$

Notant $u = u_{\nu}$, $v = u_{\nu+1}$, $\phi = \phi_{\nu}$ *et* $\Psi = \phi_{\nu+1}$, *on voit apparaitre des problèmes linéaires du type :*

$$(3.3.4)\qquad \begin{cases} L^{\pm} v^{\pm} = \partial_t v^{\pm} + \sum A_j^{\pm}\, \partial_{xj} v^{\pm} = f \qquad \text{dans } x_n > 0 \\ G(v^{\pm}, d\Psi) = b_0\, \partial_t \Psi + \sum b_j\, \partial_{xj}\Psi + M(v^{+}, v^{-}) = g \text{ sur } x_n = 0 \end{cases}$$

où les coefficients $A_j^{\pm}$, b_j *et* M *sont des fonctions de* $(u^{\pm},\phi)$

(3.3.5) *Remarque : Soit* (t^0, x^0) $\{x_n = 0\}$, *et soit* $\hat{u}^{\pm} = u^{\pm}(t^0, x^0)$.

Si la différentielle de ϕ *en* (t^0, x^0) *est* σt, *on voit que le système déduit de (3.3.4) en figeant les coefficients en* (t^0, x^0), *est précisément le système intervenant en 3.3.1.*

3.4 *Stabilité uniforme*

Supposant le système strictement hyperbolique (voir Majda [22] pour un affaiblissement de cette condition), et $\{x_n = 0\}$ *non caractéristique pour* L^+ *et* L^-, *on note* $E^{\pm}(t, x, \tau,\xi')$, *pour* $\operatorname{Im}\tau < 0$, $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$, *l'espace propre généralisé associé aux valeurs propres de partie imaginaire <0 de* $(A_n^{\pm})^{-1}\ (\sum \xi_j A_j^{\pm} + \tau\, Id)$. *Cet espace se prolonge par continuité aux* (τ, ξ') *tels que* $\operatorname{Im}\tau < 0$, $|\tau| + |\xi'| \neq 0$.

Définition : (Majda [22]) le problème (3.3.4) est uniforme stable en (t^0, x^0) *si pour tout* (τ, ξ'), $\operatorname{Im}\tau < 0$, $|\tau| + |\xi'| = 1$, *l'application*

$(\lambda, w^+, w^-) \longrightarrow \lambda(\tau b_0 + \sum \xi_j b_j) + M(w^+, w^-)$ *est un isomorphisme de* $\mathbb{R} \times E^+(t^0, x^0,\tau, \xi') \times E^-(t^0, x^0,\tau, \xi')$ *sur* $\mathbb{C}^N$.

Cette définition contient deux volets : faisant $w^+ = w^- = 0$ *on voit d'abord que l'on doit avoir :*

$$b(\tau,\xi) = \tau\, b_0 + \sum \xi_j\, b_j \neq 0$$

c'est à dire que le système des conditions aux limites de (3.3.4) est *elliptique* *en* Ψ. *Ensuite, introduisant* $\pi(\tau,\xi)$ *le projecteur orthogonal sur* $[b(\tau,\xi)]^{\perp}$, *la condition traduit la condition de Lopatinski uniforme pour le système de conditions aux limites (pseudodifférentielles)* $\pi(D_t, D_x)\ .\ M$.

(3.4.1) *Remarque : Compte tenu des remarques (3.2.5) et (3.3.5) on voit que le choc* (u^+, u^-, Σ) *est uniformément stable en* (t^0, x^0) *si et seulement si le choc plan tangent* $(\hat{u}^+, \hat{u}^-, \hat{\Sigma})$ *l'est.*

Lemme 10 (Majda [22]) pour le problème (3.3.1), la condition de stabilité uniforme implique les conditions de choc (3.1.5) pour un certain $k \in \{1,\dots,N\}$.

En effet, dire que $x_n = 0$ *n'est pas caractéristique revient à dire que* $\lambda_k(\hat{u}^{\pm}) \neq \sigma$ *pour tout* k. *On peut alors écrire*

$$\lambda_k(\hat{u}^+) < \sigma < \lambda_{k+1}(\hat{u}^+)$$
$$\lambda_{j-1}(\hat{u}^-) < \sigma < \lambda_j(\hat{u}^-)$$

avec j et $k \in \{1, \ldots, N\}$. Quand $\xi' = 0$ $E^+(\tau, \xi')$ est de dimension $N-k$, et $r_\ell(\hat{u}^+)$, $\ell = k+1 \ldots N$ en est une base ; $E^-(\tau, \xi')$ est de dimension $j-1$ et $r_\ell(\hat{u}^-)$, $= 1, \ldots, j-1$ en est une base. La condition de stabilité implique que la dimension de $E^+ \times E^-$ est $N-1$, par conséquent on a $j=k$ et (3.1.5) a lieu.

En outre, on voit que cette condition équivaut, lorsque $\xi' = 0$, à dire que $(u^+ - u^-, r_j(\hat{u}^-), r_\ell(\hat{u}^+)$ pour $j = 1, \ldots, k-1, \ell = k+1, \ldots, N$ sont indépendants. Compte tenu de (3.1.4) cela est vrai lorsque $\hat{u}^+ - \hat{u}^-$ est assez petit (on parle alors de chocs faibles), et on a :

<u>Lemme 11</u> (Majda [22]) en dimension $n = 1$, les chocs faibles (vérifiant les conditions de choc) associés à une valeur propre vraiment non linéaire sont uniformément stables.

On peut aussi montrer :

<u>Lemme 12</u> (Métivier [29]) en dimension $n = 2$, pour les systèmes 2×2, les chocs faibles associés à des valeurs propres vraiment non linéaires sont uniformément stables.

Enfin, on renvoie à MAJDA [22] pour une explicitation de la condition de stabilité uniforme pour des exemples physiques.

III - ONDES DISCONTINUES POUR LES SYSTEMES SEMILINEAIRES

1- Conormal ou régulier par morceaux ?

1.1 Un problème de stabilité

Considérons l'opérateur

$$(1.1.1) \qquad L\,u = \partial_t u + \sum A_j(t,x)\partial_{x_j} u$$

et supposons que $\Sigma = \{x_n = 0\}$ soit caractéristique pour L.

On suppose toujours que les matrices A_j sont C^∞, réelles, et que L est strictement hyperbolique dans la direction du temps.

Nous nous posons ici la question de savoir dans quels espaces de fonctions singulières sur Σ le problème de Cauchy suivant est bien posé :

$$(1.1.2) \qquad \begin{cases} L\,u = f \\ u_{|t<0} = 0 \end{cases}$$

f étant donnée, nulle pour $t < 0$. En fait f est donnée au moins L^2 et la solution u de (1.1.2) existe toujours (localement) dans L^2. Il s'agit donc d'un problème de régularité.

Un des points de départ du travail de Bony [7] consiste à dire que dans les espaces conormaux $H^{s,k}_\Sigma$, tout se passe bien :

[Proposition 1 Au voisinage de l'origine, si $f \in H^{s,k}_\Sigma$ ($s \geqslant 0$, $k \geqslant 0$), alors $u \in H^{s,k}_\Sigma$.

Maintenant, ainsi qu'on l'a expliqué au chapitre I, il est naturel de poser le problème (1.1.2) dans des espaces de fonctions régulières par morceaux. On introduit donc les espaces $p\text{-}H^s$ [resp $p\text{-}C^k$] des fonctions de L^2 [resp L^∞] dont les restrictions à $x_1 > 0$ et à $x_1 < 0$ sont H^s [resp C^k jusqu'au bord $x_1 = 0$].

On peut considérer le problème (1.1.2) comme un problème de transmission au travers d'une surface caractéristique, et l'on est ainsi renvoyé à l'étude des problèmes mixtes à bord caractéristique (voir par exemple Majda - Osher [25] , Rauch [37] . En particulier le travail de Majda-Osher montre que, en général en multidimension pour $f \in p\text{-}H^s$ la solution u n'est pas $p\text{-}H^s$ mais au mieux $p\text{-}H^{s'}$ avec s' de l'ordre de $s/2$. Ce fait constitue un obstacle essentiel, dans le cas multidimensionnel, à une étude par itération de l'équation $Lu = F(u)$.

Néanmoins, comme l'ont remarqué Rauch et Reed [42] [44], une fois gagnée la régularité conormale, c'est à dire en particulier la régularité tangentielle pour le problème mixte, le retour à l'équation permet de gagner une certaine régularité normale, suivant la règle qu'il faut deux dérivées tangentielles pour obtenir une dérivée normale :

[Proposition 2 : si $f \in p\text{-}H^s \cap H^{0,m}_\Sigma$ au voisinage de 0, alors $u \in p\text{-}H^s \cap H^{0,m}_\Sigma$, pourvu que $m \geqslant 25$.

1.2 Un contre exemple

Pour illustrer l'instabilité du problème (1.1.2) dans les espaces $p\text{-}H^s$, nous reprenons l'exemple B.3 de Majda-Osher [25]. Dans $\mathbb{R}^3$, avec les coordonnées (t, x, y), considérons : le problème :

$$(1.2.1) \qquad \begin{cases} \partial_t u - \partial_y v = f \\ \partial_t v + \partial_x v - \partial_y u = 0 \end{cases}$$

où $f = 0$ pour $x < 0$ ou $t < 0$ et $f = t^m \phi(y)$ pour $x > 0$, $t > 0$. $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ sera choisie ultérieurement.

La vitesse finie de propagation montre que la solution (u,v) de (1.2.1) est nulle pour $x<0$. En outre v est continue en x à valeurs H^{-1} en (t, y) et la trace de v sur $x = 0$ est nulle.

Pour $x>0$, on a $\partial_t \partial_x v = \partial_y f + (\partial_y^2 - \partial_t^2)v$ et pour $k>1$.

$$(1.2.2) \qquad (\partial_t \partial_x)^k v = (\partial_y^2 - \partial_t^2)^k v + (\partial_y^2 - \partial_t^2)^{k-1} \partial_y f$$

$$\partial_t^{k-1} \partial_x^k u = (\partial_y^2 - \partial_t^2)^k \partial_y v + (\partial_y^2 - \partial_t^2)^{K-1} \partial_y^2 f$$

Supposons que $(u, v) \in p.H^s$, et notons, pour $k \leq s - 1/2$ u_k la trace de $\partial_x^k u$ en $x = 0$, prise du côté $x>0$. (on suppose ici pour éviter les discussions inutiles que $s-1/2 \in \mathbb{N}$).

Alors (1.2.3) montre que

$$(1.2.4) \qquad \partial_t^{k+1} u_k = (\partial_y^2 - \partial_t^2)^{k-1} \partial_y^2 (t^m \phi(y))$$

Puisque $u_k = 0$ pour $t<0$, on en tire que :

$$(1.2.5) \qquad u_k = \sum p_j(t). \partial_y^{2j} \phi$$

pour certains polynômes p_j, tous non nuls.

On fixe maintenant un entier m pair, et ϕ tel que $\phi \in H^m(\mathbb{R})$ et $\phi \notin H^{m+1}$ au voisinage de 0.

Alors (1.2.5) montre que u_k ne peut pas appartenir à L^2 si $k = \frac{m}{2} + 1$; par conséquent $u \notin p.H^{m/2+3/2}$ alors que $f \in p.H^m$.

2- Stabilité d'une onde discontinue.

2.1 Résultats

On considère toujours un système L de la forme (1.1.1), on se donne au voisinage de l'origine une surface caractéristique Σ, et quitte à effectuer un changement de variables (qui préserve le temps) nous supposerons que Σ est d'équation $x_n = 0$. Considérons d'abord le problème :

$$(2.1.1) \qquad \begin{cases} Lu = F(t, x, v, u) \\ u|_{t<0} = 0 \end{cases}$$

où F est une fonction C^∞ de ses arguments. On se place sur un domaine de la forme :

$$(2.1.2) \qquad \Omega = \{(t, x) \,/\, -T_0 < t < T_0 - \varepsilon |x|\}$$

où T_0 et ξ sont assez petits.

Théorème 1 : Si $v \in L^\infty \cap H_\Sigma^{0,m}(\Omega)$ avec $m > \frac{n}{2}+\frac{3}{2}$, et si $F(t, x, v(t, x), 0) = 0$ pour $t<0$, alors il existe $T \in]0, T_0[$ et $u \in L^\infty \cap H_\Sigma^{0,m}(\Omega_T)$ sa solution de (2.1.1).

On a noté $\Omega_T = \Omega \cap \{t < T\}$. Par ailleurs l'unicité des solutions de (1.1.1) dans $L^\infty(\Omega_T)$ résulte des inégalités d'énergie L^2 pour L.

On peut alors s'intéresser au problème :

$$(2.1.3) \qquad Lu = F(t, x, u)$$

et on peut énoncer :

Théorème 2 : Soit $u \in L^\infty \cap H^{0,m}(\Omega_{T_1})$ une solution de (2.1.3) sur Ω_{T_1} avec

$T_1 \in]T_0, T_0[$ et $m > \frac{m+3}{2}$.
Alors il existe $T_* \in]T_1, T_0]$ et une solution v de (2.1.3) sur Ω_{T_*} qui prolonge u et telle que $v \in L^\infty_\Sigma H^{0,m}(\Omega_T)$ pour tout $T < T_*$. En outre, ou bien $T_* = T_0$, ou bien $\|u\|_{L^\infty(\Omega_T)} \longrightarrow +\infty$ quand $T \longrightarrow T_*$.

Une fois obtenue la régularité conormale, on peut comme Rauch-Reed [44] étudier la régularité C^∞ par morceaux :

Théorème 3 : Soit $u \in L^\infty(\Omega_T)$ solution de (2.1.3). On suppose que $u \in p.C^\infty$ sur $\bar{\Omega}_{T_1}$ $(T_1 \in]T_0, T_0[)$.
Alors $u \in p\text{-}C^\infty$ sur $\bar{\Omega}_T$.

2.2 *Preuve du théorème 1.* (Esquisse)

Par changement de variables, on peut supposer que les surfaces x_n = Constante sont toutes caractéristiques. Après diagonalisation de la matrice A_n (et changement linéaire d'inconnues u) on se rame au cas où :

(2.2.1) la matrice A_n est diagonale, le premier élément de cette diagonale est identiquement 0, et les autres sont $\neq 0$.

On résout alors (2.1.1) par le schéma itératif :

(2.2.2)
$$\begin{cases} L\, u_{\nu+1} = F(t, x, v, u_\nu) \\ u_{\nu+1}\big|_{t<0} = 0 \end{cases}$$

où l'on démarre avec $u_0 = 0$

La preuve du théorème 1 repose sur les trois lemmes suivants.

Lemme 1 : Etant donnés R et $T'_0 \in]0, T_0[$, il existe C tel que pour tout $T \in]-T'_0, T'_0[$ et tout $u \in L^\infty \cap H^{0,m}_\Sigma(\Omega_T)$ vérifiant $\|u\|_{L^\infty(\Omega_T)} \leqslant R$, on ait $f = F(t, x, v, u) \in L^\infty \cap H^{0,m}_\Sigma(\Omega_T)$ avec :

$$\|f\|_{L^\infty} \leqslant C$$
$$\|f\|_{H^{0,m}(\Omega_T)} \leqslant C\,\{1 + \|u\|_{H^{0,m}(\Omega_T)}\}$$

Lemme 2 : Soit $f \in H^{0,m}_\Sigma(\Omega_T)$, telle que $f = 0$ pour $t < 0$. Alors la solution $u \in L^2(\Omega_T)$ du problème

(2.2.3) $\quad Lu = f. \qquad u\big|_{t<0} = 0$

est dans $H^{0,m}_\Sigma(\Omega_T)$ et vérifie :

(2.2.4) $\quad \|u\|_{H^{0,m}(\Omega_T)} \leqslant C_1\, T\, \|f\|_{H^{0,m}(\Omega_T)}$

où C_1 est indépendante de T et f.

Lemme 3 : Soit $f \in L^\infty \cap H^{0,m}_\Sigma(\Omega_T)$ avec $m > (n+3)/2$. telle que $f\big|_{t<0} = 0$.
Alors la solution $u \in H^{0,m}(\Omega_T)$ de (2.2.3) est bornée et vérifie :

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega_T)} \leqslant C_2\, T\,\{\|f\|_{L^\infty(\Omega_T)} + \|f\|_{H^{0,m}(\Omega_T)}\} + C_3 \|u\|_{H^{0,m}_\Sigma(\Omega_T)}$$

Le lemme 1 exprime que $L^{\infty} \cap H^{0,n}_{\Sigma}(\Omega_T)$ est une algèbre.

Par un théorème d'extension, on se ramène au cas où les fonctions sont définies sur $\mathbb{R}^{n+1}$; dans ces cas les inégalités de type Gagliardo-Mirehberg nécessaires pour l'obtention des estimations s'obtiennent facilement (Cf. Melrose-Ritter [27] section 5).

Le lemme 2 précise la propostion 1 de tout à l'heure; Il résulte aisément des inégalités d'énergie L^2 et d'un argument de commutation de L avec les générateurs de μ_{Σ} : $x_n \partial_{x_n}$, ∂_t, $\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_{n-1}}$.

Donnons maintenant la preuve du lemme 3. D'après (2.2.1) puisque $u \in H^{0,m}_{\Sigma}$ on a, pour $j \geqslant 2$;

(2.2.5) $$\|\partial_t^{\alpha_0} \partial_x^{\alpha} u_j\|_{L^2} \leqslant C \|u\|_{H^{0,m}} + \|f\|_{H^{0,m-1}}$$

pour $\alpha_0 + |\alpha| \leqslant m,\quad \alpha_n \leqslant 1$.

Puisque $f = 0$ pour $t< 0$ et que $\partial_t \in \mu_{\Sigma}$ on a $\|f\|_{H^{0,m-1}} \leqslant T \|f\|_{H^{0,m}}$. On tire alors de (2.2.5) puisque $m > (n+3)/2$, que l'on a pour $j = 2, \dots, N$:

(2.2.6) $$\|u_j\|_{L^\infty} + \|\partial_t u_j\|_{L^\infty} + \sum \|\partial_{x_\ell} u_j\|_{L^\infty} \leqslant C \|u\|_{H^{0,m}} + T \|f\|_{H^{0,m}}$$

Maintenant, la première équation de (2.2.3) s'écrit sous la forme :

(2.2.7) $$X u_1 = f_1 + \text{Combinaison linéaire des } u_j,\ \partial_t u_j,\ \partial_{x_\ell} u_j,\ j \geqslant 2,\ \ell \leqslant n-1.$$

où $X = \partial_t + \sum \alpha_\ell \partial_{x_\ell} \cdot + \beta$

(2.2.6) donne un contrôle dans L^{∞} du membre de droite de (2.2.7), et en intégrant le champs X on obtient que $u_1 \in L^{\infty}$.

Il résulte des trois lemmes, que pour T assez petit, le schéma itératif (2.2.2) définie une suite bornée dans $L^{\infty} \in H^{0,m}_{\Sigma}(\Omega_T)$. La suite étant bornée dans L^{∞} on en obtient la convergence dans L^2, en écrivant que

(2.2.8) $$\begin{cases} |L(u_{\nu+1} - u_\nu)| \leqslant C\, |u_\nu - u_{\nu-1}| \\ u_{\nu+1} - u_\nu \big|_{t<0} = 0 \end{cases}$$

et en utilisant les inégalités d'énergie L^2.

On montre alors que la limite $u \in L^{\infty} \cap H^{0,m}_{\Sigma}(\Omega_T)$, et que u est solution de 2.1.1.

2.3 Preuve du théorème 2

Soit u solution de (2.1.3) sur Ω_{T_1}. Soit $f = F(t, x, u)$.

Soit $\tilde{f}$ un prolongement de f, $\tilde{f} \in L^{\infty} \cap H^{0,m}_{\Sigma}(\Omega_{T_0})$ (un tel prolongement existe!). On peut alors résoudre le problème linéaire.

(2.3.1) $$\begin{cases} L v_0 = \tilde{f} \\ v_0 \big|_{t<1} = u \end{cases}$$

par exemple en cherchant v_0 sous la forme $\chi u + v^1$, où $\chi(t) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ est nul pour $t > T'_1$, et vaut 1 pour $t < T''_1$, avec $-T_0 < T''_1 < T'_1 < T_1$, et où v^1 est solution de

(2.3.2) $$\begin{cases} L v^1 = (1-\chi)\tilde{f} - (\partial_t \chi) u. \\ v^1 \big|_{t< T''_1} = 0. \end{cases}$$

Bien sûr, les fonctions χ_u et $(\partial_t\chi)u$ sont prolongées par 0 pour $t > T_1$. L'unicité locale fait que $v^1 = (1-\chi)u$ pour $t < T_1$ et $v_0 = \chi u + v^1$ est bien solution de (2.3.1) et prolonge u.

Une fois trouvée v_0 solution de (2.3.1), on cherche v solution de (2.1.3) sous la forme $v_0 + w$

$$(2.3.3) \quad \begin{cases} L\, w = F(t, x, v_0 + w) - \tilde{f}(t, x) \\ w|_{t < T_1} = 0 \end{cases}$$

Cette équation est bien de la forme (2.1.1) avec v_0 et $\tilde{f}$ dans le rôle de v et la condition $w|_{t< T_1} = 0$ remplaçant la condition $w|_{t<0} = 0$.

Le théorème 1, qui accepte sans difficulté cette modification donne donne donc l'existence d'un prolongement v, solution de (2.1.3), dans $L^\infty \cap H^{0,m}_\Sigma(\Omega_T)$ pour un certain $T > T_1$.

La fin de la preuve du théorème 2 résulte par un argument trinal de connexité du lemme 4 suivant, qui est lui même une conséquence immédiate des lemmes 1 et 2 ci dessus.

<u>Lemme 4</u> : Soit $u \in L^\infty(\Omega_{T_1})$ une solution de (2.1.3).
On suppose que pour tout $T' < T_1$, $u \in H^{0,m}_\Sigma(\Omega_{T'})$.
Alors $u \in H^{0,m}_\Sigma(\Omega_{T_1})$ et u peut être prolongée en tant que solution de (2.1.3) dans $L^\infty \cap H^{0,m}_\Sigma(\Omega_T)$ pour un certain $T > T_1$.

2.4 <u>Preuve du théorème 3</u>

Puisque $u \in p\text{-}C^\infty$ sur $\bar{\Omega}_{T_1}$ $u \in H^{0,m}_\Sigma(\Omega_{T_1})$ pour tout m. Le théorème 2 implique que $u \in H^{0,m}_\Sigma(\Omega_T)$ pour tout T.

En fait, la preuve du lemme 3 ci dessus, sous l'hypothèse (2.2.1), montre que u_j, $\partial_t u_j$, $\partial_{x_\ell} u_j$ sont continus pour $j = 2,\dots,N$, $\ell = 1, \dots, n-1$. La première équation s'écrit alors sous la forme.

$$(2.4.1) \qquad X_1\, u_1 = g(t, x, u_1)$$

où $g(t, x, u_1)$ est une fonction continue de ses arguments.

Il est facile de voir que si u_1 est $p\text{-}C^0$ pour $t < T_1$, alors u_1 reste $p\text{-}C^0$ pour tout t.

Maintenant, commutant l'équation aux champs de μ_Σ, on voit que l'argument donné pour u vaut pour toutes les dérivées conormales de u, (dont on sait qu'elles sont dans L^2).
On conclut donc que u, $\partial_t u$, ∂_{x_ℓ} pour $\ell = 1, \dots, n-1$ sont $p\text{-}C^0$, de même que $F(t, x, u)$ L'équation donne alors que $\partial_{x_n} u_j \in p\text{-}C^0$ pour $j = 2,\dots,N$, c'est à dire que $u_j \in p\text{-}C^1$. De même on obtient que $\partial_t u_j$, $\partial_{x_\ell} u_j$, $\ell \leqslant m-1$ sont $p\text{-}C^1$, et reportant dans la première équation on voit que dans (2.4.1) g est une fonction $p\text{-}C^1$ en (t, x) (et toujours C^∞ en u_1). On conclut que u_1, et donc finalement que $u \in p\text{-}C^1$.

Il est maintenant clair que par récurrence on termine la preuve du théorème 3.

3- Intéraction de deux ondes discontinues

3.1 Résultats

On considère maintenant deux surfaces caractéristiques Σ_1 et Σ_2 qui se coupent transversalement le long de Δ. En fait nous supposons que passent par Δ N surfaces caractéristiques lisses, 2 à 2 transverses. On notera $\Sigma = \Sigma_1 \cup \ldots \cup \Sigma_N$.

Dans cette situation on définit $H^{0,m}_{\Sigma}$ comme étant la somme (non directes) pour j variant de 1 à N des espaces $H^{0,m}_{\Sigma_j \cup \Delta}$, où ce dernier espace désigne l'ensemble des $u \in L^2$ tels que $M_1 \ldots M_k u \in L^2$ pour toute suite $M_1, \ldots, M_k$ de $k \leq m$ champs de vecteurs tangents à la fois à Σ_j et à Δ.

Nous nous plaçons toujours dans un (petit) domaine de détermination :

$$(3.1.1) \qquad \Omega = \{(t, x) \ / \ -T_0 < t < T_0 - \xi |x|\}.$$

Pour $T \in]-T_0, T_0[$, $\Omega_T = \Omega \cap \{t < T\}$.

On a le théorème de régularité suivant :

Théorème 4: Soit $u \in L^\infty(\Omega_T)$ une solution de

$$(3.1.2) \qquad Lu = F(t, x, u)$$

Alors, si $u \in H^{0,m}_{\Sigma}(\Omega_{T_1})$ pour un $T_1 \in]-T_0, T[$, $u \in H^{0,m}_{\Sigma}(\Omega_T)$.

En fait, nous somme davantage inéressés par un théorème de prolongement de sa solution. Malheureusement ce problème n'a pu être résolu sans une certaine hypothèse de compatibilité entre la géométrie de Σ et celle des surfaces t = Cte tout se passe bien lorsque Δ est transverse à ces surfaces, ou alors lorsque Δ est contenu dans une de ces surfaces $\{t = t_0\}$. Nous reviendrons au § 3.3 sur la nature assez profonde de la difficulté.

De toutes façons il apparait indispensable de remplacer les surfaces $t = C^{te}$ par une famille de surfaces spatiales $(\{\phi_\lambda = 0\}_\lambda$, en supposant que soit Δ est contenue dans $\{\phi_{\lambda_0} = 0\}$, soit que Δ est transverse à ces surfaces. On pourrait aussi considérer des ouverts intersections de la forme $\{\phi_\lambda < 0, \Psi_\lambda < 0\}$, les familles ϕ_λ et Ψ_λ étant de deux types différents. Nous nous contenterons ici de donner des modèles, et, Ω étant l'ouvert (3.1.1), nous supposerons soit que

Cas I $\qquad \Delta = \{t = x_n = 0\}$.

soit que

Cas II $\qquad \Delta = \{x_1 = x_n = 0\}$.

On peut alors énoncer :

Théorème 5 : soit $u \in L^\infty \cap H^{0,m}_{\Sigma}(\Omega_{T_1})$ une solution de (3.1.2) avec $T_1 \in]-T_0, T_0[$ et $m > \frac{n+5}{2}$. Alors, il existe $T_* \in]T_1, T_0]$ et une solution v de (3.1.2) sur Ω_{T_*}, telle que v prolonge u et $v \in L^\infty \cap H^{0,m}_{\Sigma}(\Omega_T)$ pour tout $T < T_*$. En outre, ou bien $T_* = T_0$, ou bien $\lim_{T \to T_*} \|u\|_{L^\infty(\Omega_T)} = +\infty$.

Notons aussi que la démonstration du théorème 5 fournit une minoration de T_* en fonction de T_1 et de la norme de u dans $L^\infty \cap H^{0,m}_{\Sigma}(\Omega_{T_1})$.

En fait $T_* \to T_0$ *lorsque cette norme tend vers 0. Dans le cas I, ceci montre par exemple que si u est donné assez petit avant l'interaction, i:e.* $T_1 < 0$, *u va encore exister après l'intéraction.*

3.2 Esquisse de démonstration

Le schéma de la preuve du théorème 5 est identique à celui du théorème 2 : les lemmes 1, 2 et 3 sont encore valables avec les nouveaux espaces $H^{0,k}_{\Sigma}$ *associés à* $\Sigma = \bigcup_{j=1}^{N} \Sigma_j$.

En fait le lemme 1 repose sur le résultat suivant :

Lemme 5 : pour tout $T \in]-T_0, T_0[$, *il existe un opérateur de prolongement* R_T *de* $L^\infty(\Omega_T)$ *dans* $L^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ *et de* $H^{0,m}_{\Sigma}(\Omega\ )$ *dans* $H^{0,m}_{\tilde{\Sigma}}(\Omega_T)$. *En outre ces opérateurs sont uniformément bornés si T est restreint à un interval compact de* $]-T_0, T_0[$.

Le détail de la preuve de ce lemme est donné dans [31]. $\tilde{\Sigma}$ *y note* $\tilde{\Sigma}_j \cup \ldots \cup \tilde{\Sigma}_N$, *où* $\tilde{\Sigma}_j$ *est un prolongement lisse de* Σ_j *tel que* $\tilde{\Sigma}_j \cap \tilde{\Sigma}_k = \hat{\Delta} = \{t = x_n = 0\}$ *si* $j \neq k$.

En fait c'est pour obtenir l'existence de ce prolongement qu'on est amené à se placer dans une des situations I ou II.

La démonstration du lemme 2 est assez technique : la régulante $u \in H^{0,m}_{\Sigma}$ *résulte de Bony [7], mais l'obtention de l'inégalité précisée (2.2.4) demande un peu de travail.*

Nous nous concentrons maintenant sur le lemme 3, en considérant le cas I, (le cas II se traite de manière identique).

Notons Λ° *l'espace des fonctions a* C^∞ *en dehors de* Δ *telles que* $(|t|+|x_n|)^{j+\alpha_n} \partial_t^j \partial_x^\alpha a$ *soit borné pour tous les multi indices* (j,α). Λ^1 *est l'espace des fonctions de* Λ° *dont les dérivées premières sont aussi dans* Λ°.

On peut supposer que, dans Ω , Σ_j *est d'équation* $x_n = \phi_j(t, x')$ *avec* $\phi_j|_{t=0} = 0$ *et* $\partial_t \phi_j \neq \partial_t \phi_k$ *si* $j \neq k$.

On fixe une partition de l'unité :

$$(3.2.1) \qquad 1 = \sum \chi_j(t, x_n)$$

où χ_j *est une fonction* C^∞ *et homogène de degré 0 en* $(t, x_n) \neq 0$, *telle que* $\mathrm{Supp}\ \chi_j \cap \Sigma_k = \Delta$ *si* $k \neq j$.

On introduit alors les champs de vecteurs

$$(3.2.2) \qquad \begin{cases} M^\ell = \partial_{x\ell} + \phi^\ell \partial_{x_n} \quad \text{où } \phi^\ell = \sum_{j=1}^{N} \chi_j \partial_{x\ell} \phi_j, \qquad \ell = 1,\ldots, n-1 \\ M^n = t\,\partial_t + \{x_n + \sum_{j=1}^{N} \chi_j (t\,\partial_t \phi_j - \phi_j)\}\,\partial_{x_n} \end{cases}$$

Ces champs sont à coefficients dans Λ^1 *; ils sont tangents à* $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_N$ *et à* Δ , *et on peut montrer que* $H^{0,m}_{\Sigma}$ *est l'espace des* $u \in L^2$ *tels que* $M^{\ell_1} \ldots M^{\ell_\nu} u \in L^2$ *pour toute suite* $(\ell_1,\ldots,\ell_\nu) \in \{1,\ldots,n\}^\nu$ *de longueur* $\nu \leq m$.

Par ailleurs, la multiplication par $a \in \Lambda^\circ$ *opère de* $H^{0,m}_{\Sigma}$ *dans* $H^{0,m}_{\Sigma}$, *et* $u \in H^{0,m}_{\Sigma}$ *si et seulement si* $\chi_j u \in H^{0,m}_{\Sigma j,\Delta}$. *Le lecteur notera que la décomposition*

$u = \sum \chi_j u$ respecte donc les espaces $H^{0,m}$, mais aussi L^∞.

On peut alors écrire l'opérateur L sous la forme :

$$(3.2.3) \qquad L = \partial_t + \tilde{A}_n \, \partial_{x_n} + \sum A_\ell M^\ell$$

avec $\tilde{A}_n = A_n - \sum \phi^\ell A^\ell$. $\tilde{A}_n$ peut être diagonalisée à l'aide de matrices à coefficients dans ^{1}, et finalement on peut écrire l'équation $Lu = f$ sous la forme :

$$(3.2.4) \qquad (\chi_j + c_{jj})\tilde{u}_j = \sum \sum b^\ell_{j,k} M^\ell \tilde{u}_k + \sum c_j k \, \tilde{u}_k + \tilde{f}_j$$

où $X_j = \partial_t + a_j \partial_{x_n} + \sum b^\ell_{jj} M^\ell$

avec a_j, $b^\ell_{j,k} \in \Lambda^1$ et $c_{j,k} \in \Lambda°$. En outre X_j est tangent à Σ_j.

Le lemme 3 résulte alors du

<u>Lemme 6</u> : si $\tilde{f} \in L^\infty \cap H^{0,m}_\Sigma$, et si $\tilde{u} \in H^{0,m}_\Sigma$, $m > \frac{n+5}{2}$, est solution de (3.2.4) avec $\tilde{u}_{|t<T_1} = 0$, alors $\tilde{u} \in L^\infty$.

Quant à ce lemme 6 il repose sur les estimations suivantes :

<u>Lemme 7</u> : pour $u \in H^{0,m}_\Sigma$, $m > \frac{n+1}{2}$ on a :

$$|u(t,x)| \leqslant C \, \delta(t,x)^{-1/2} \sum \delta_j(t,x)^{-1/2} \, \|u\|_{H^{0,m}} .$$

où δ [resp δ_j, $j = 1,\dots,N$] désigne la distance à Δ [resp Σ_j].

Pour finir ce paragraphe esquissons la preuve du lemme 6 :
Puisque $\tilde{f} \in H^{0,m}_\Sigma$ et $\tilde{u} \in H^{0,m}_\Sigma$, le membre droite de (3.2.4) est dans $H^{0,m-1}_\Sigma$, et peut être estimé grace au lemme 6. On en déduit une estimation de $\tilde{u}_j$ en entégrant le long des caractéristiques de X_j et on trouve que $u_j = 0(\delta_j^{-1/2})$.
(En fait $\sqrt{\delta_j}\, \tilde{u}_j$ est continue et nulle sur Σ_j). Un argument de commutation permet d'estimer de manière semblable $M^\ell \tilde{u}_j$, et reportant dans (3.2.4) on voit que le membre de droite est borné par $C \|f\|_{L^\infty} + C' \sum \delta_k^{-1/2}$.
Maintenant, l'integrale de $\delta_k^{-1/2}$ le long des caractéristiques de X_j est, pour $j \neq k$, bornée et on conclut que $\tilde{u}_j \in L^\infty$ comme annoncé.

3.3 <u>Une remarque à propos du lemme 5</u>

Nous voulons montrer ici sur un exemple, que si l'on ne fait pas d'hypothèse sur la position de par rapport aux surfaces $t = C^{te}$, on n'est plus assuré que $L^\infty \cap H^{0,m}$ soit une algèbre, ni qu'existe l'opérateur de prolongement du lemme 5.

Prenons toujours $\Delta = \{t = x_n = 0\}$ mais remplaçons la surface $t = 0$ par la surface $t = |X^2|$, et considérons l'ouvert $\mho = \{(t,x) \;/\; |x^2| < t < 1\}$. Soit

$$(3.3.1) \qquad u(t,x) = x_1 (t^2 + x_n^2)^{-1/4}$$

On vérifie que $u \quad L^\infty \cap H^{0,\infty}_\Delta(\mho)$, si $H^{0,\infty}_\Delta$ désigne l'espace des distributions de L^2 telles que $M_1 \dots M_k u \in L^2$ pour toute suite $M_1 \dots M_k$ de champs tangents à Δ.
Par conséquent, pour tout système $\Sigma_1, \dots, \Sigma_N$ d'hyperplans passant par Δ, $u \in H^{0,\infty}_\Sigma(\mho)$. Par contre $u^m \notin H^{0,m}_\Sigma(\mho)$ pour $m > \frac{n+3}{2}$ puisque
$\partial^m_{x_1} u^m = (t^2 + x_n^2)^{-m/4} \notin L^2(\mho)$. $L^\infty \cap H^{0,m}_\Sigma(\mho)$ n'est donc pas une algèbre.

3.4 Quelques compléments

Notons $p\text{-}C^0(\Omega_T)$ l'espace des fonctions continues jusqu'au bord sur chaque composante connexe de $\Omega_T \setminus \Sigma$.

Alors, on peut montrer que si $u \in L^\infty \cap H^{0,m}_\Sigma(\Omega_T)$ est solution de (3.1.2) avec $u_{|t<T_1} \in p\text{-}C^0(\Omega_{T_1})$ alors $u \in p\text{-}C^0(\Omega_T)$. Cela repose sur une analyse un peu plus fine de l'équation (3.2.4). En fait on montre que u_j est continue jusqu'au bord de par et d'autre de Σ_j. On retrouve le fait que le saut de u le long de Σ_j est "polarisé" dans la direction du j-ième vecteur propre du symbole

$\sum \nu_j^\ell A_\ell$, si $(-\lambda_j, \nu_j^1, \dots, \nu_j^1)$ est la normale à Σ_j.

En outre le saut $[\hat{u}_j]$ satisfait à l'équation :

$$(X_j + c_{jj})[\hat{u}_j] = g_j^+(u^+, [u_j]) = g_j^-(u^-, [\hat{u}_j]) \tag{3.4.1}$$

u^+ et u^- désignant les traces de u^+ et u^- de part et d'autre de Σ_j. En outre $g_j^+(u^+, 0) = g_j^-(u^-, 0) = 0$, si bien que si $[\hat{u}_j] = 0$ pour $t < T_1$, $[\hat{u}_j]$ reste nul.

En particulier on voit que si u n'a de sauts que sur Σ_1 et Σ_2 pour $t < T_1$ (deux ondes discontinues intéragissant), u va rester continue sur $\Sigma_j \setminus \Delta$ pour $j = 3, \dots, N$, c'est à dire que l'intéraction ne donne pas lieu à des sauts sur les autres surfaces $\Sigma_3, \dots, \Sigma_N$.

Bien sûr, ce résultat en dimension 1 est un cas particulier du travail de Rauch-Reed [40].

Quant à l'analogue du théorème 3, il reste à démontrer

Terminons par quelques remarques complémentaires : dans le cas I, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} Lu = F(t, x, u) \\ u_{|t=0} = g \end{cases} \tag{3.4.2}$$

où g est donné dans $L^\infty \cap H^{0,m}_\Delta$, a été résolu dans [30] permettant ainsi de construire des solutions discontinues.

Dans [31] on s'est aussi intéressé à des problèmes aux limites :

$$\begin{cases} Lu = F(t, x, u) & \text{pour } x_n > 0 \\ Bu_{|x_n=0} = g \end{cases} \tag{3.4.3}$$

le système (L, B) vérifiant une condition de Lopatinski uniforme.
On a ainsi résolu le problème mixte :

$$\begin{cases} Lu = F(t, x, u) & \text{pour } x_n > 0,\ t > 0 \\ Bu_{|x_n=0} = g & u_{|t=0} = u_0 \end{cases} \tag{3.4.4}$$

Lorsque u_0 et g sont bornées et conormales par rapport à $\Delta = \{t = x_n = 0\}$. Aucune condition de compatibilité n'est requise sur g et u_0. La solution u développe alors des singularités conormales le long des surfaces caractéristiques issues de Δ.

Enfin dans [31] on a aussi étudié la réflexion des ondes discontinues : on peut, pour les solutions de (3.4.3), énoncer un résultat tout à fait analogue au théorème 5 en remplaçant partout les ouverts Ω_T par $\Omega_T^+ = \Omega_T \cap \{x_n > 0\}$.

Ce résultat est lui aussi valable aussi bien dans le cas I que dans le cas II.

Références

[1] S. ALINHAC : *Evolution d'une onde simple pour des équations non linéaires générales.*

[2] S. ALINHAC : *Interaction d'ondes simples pour des équations complètement non linéaires.*

[3] M. BEALS - G. METIVIER : *Progressing wave solution to certain non linear mixed problem ; Duke Math. J. (to appear).*

[4] M. BEALS - G. METIVIER : *Reflexion of transversal progressing waves in non linear strictly hyperbolic mixed problems ; Amer. J. Math (to appear).*

[5] J. BERNING - M. REED : *Reflection of singularities of one dimensional semilinear wave equations at boundanes ; J. Math. Anal. Appl. 72 (1979) pp 635-653.*

[6] J. M. BONY : *Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires ; Ann. Sc. de l'Ecole Norm. Sup. 14 (1981) pp 209-246.*

[7] J. M. BONY : *Interaction des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires ; Séminaire Goulaouic - Meyer - Schwartz, Ecole polytechnique ; Exposé n°22 (1979-80) et exposé n°2 (1981-82).*

[8] J. M. BONY : *Propagation et intéraction des singularités pour les solutions des équations aux dérivées partielles non linéaires ; Proc. Int. Conq. Math, Warszawa, (1983) pp 1133-1147.*

[9] J. M. BONY : *Interaction des singularités pour les équations de Klein - Gordon non linéaires ; Séminaire Goulaouic - Meyer - Schwartz, Ecole polytechnique ; exposé n°10 (1983-84).*

[10] J. M. BONY : *Second microlocalization and propagation of singularities for semilinear hyperbolic equations ;*

[11] J. CHAZARAIN - A. PIRIOU : *Introduction à la théorie des équations aux dérivées partielles ; Gauthier Villars, Paris (1981).*

[12] R. COURANT - K.O. FRIEDRICHS : *Supersonic Flow and Shock Waves ; Springer Verlag, New York 1949.*

[13] R. COURANT - D. HILBERT : *Methods of Mathematical Physics, Wiley - Interscience, New York 1962.*

[14] R. DI PERNA : *Uniquencess of solutions of hyperbolic conservation Paws ; Indiana V. Math. J. 28 (1979), pp 137-187.*

[15] K. O. FRIEDRICHS : *Symmetric hyperbolic linear differential equations ; Comm. Pure Appl; Math. 7 (1954) pp 345-392.*

[16] J. GLIMM : *Solutions in the large for non linear hyperbolic systems of equations ; Comm. Pure Appl. Math. 18 (1965) pp 95-105*

[17] F. JOHN : *Formation of singularities in one dimensional non linear wave propagation ; Comm. Pure Appl Math, 27 (1974) pp 377-405.*

[18] T. KATO : *The Cauchy problem for quasilinear symmetric hyperbolic systems ; Arch. Rat. Mech. Anal. 58 (1975).*

[19] H. O. KREISS : *Initial boundary value Problems for hyperbolic systems ; Comm. Pure Appl. Math, 23 (1970) pp 277-298.*

[20] P. D. LAX : *Hyperbolic systems of conservation laws II ; Comm. Pure Appl. Math, 10 (1957), pp 537-566.*

[21] P. D. LAX : *Schock waves and entropy ; Contributions to non linear functional Analysis ; (E. A. Zarantonello Ed) Academic Press, New York (1971).*

[22] A. MAJDA : *The stability of multidimensional schock fronts ; Mem. Amer Math. Soc, n°275 (1983).*

[23] A. MAJDA : *The existence of multidimensional schock fronts ; Mem. Amer Math. Soc, n°281 (1983).*

[24] A. MAJDA : *Compressible fluid flow and systems of conservation laws in several space variables ; Applied Math. Sc, 53, Springer verlag (1984).*

[25] A. MAJDA - S. OSHER : *Initial boundary value problems for hyperbolic equations with uniformly characteristic boundary ; Comm. Pure Appl. Math, 28 (1975) pp 607-676.*

[26] A. MAJDA - R. ROSALES : *A theory for the spontaneous formation of Mach stems in reading shock fronts ; I the basic pertubation analysis ; SIAM J. Appl. Math (1984) pp 117-148.*

[27] R. MELROSE - N.RITTER : *Interaction of non linear progressing waves for semilinear wave equations ; Ann Math, 121 (1985) pp 187-213.*

[28] R. MELROSE - N. RITTER : *Interaction of non linear progressing waves for semilinear wave equations II ;*

[29] G. METIVIER : *Interaction de deux chocs pour un système de deux lois de conservation en dimension deux d'espace ; Trans. Amer. Math. Soc (à paraitre).*

[30] G. METIVIER : *The Cauchy problem for semilinear hyperbolic systems with discontinuous data ; Dube Maht. J. (à paraitre).*

[31] G. METIVIER : *Propagation, interaction and reflection of discontinuous progressing waves for semilinear systems ; (preprint).*

[32] S. MIZOHATA : *Lectures on the Cauchy problem ; Tata Inst., Bombay (1965).*

[33] M. OBERGUGGENBERGER : *Semilinear mixed hyperbolic sytstems in two variables : reflection and density of singularities (preprint).*

[34] M. OBERGUGGENBERGER : *Propagation and reflection of regularity of semilinear hyperbolic 2×2 systems in one space dimension ; (preprint).*

[35] O. A. OLEINIK : *Uniqueness and stability of the generalized solution of the Cauchy problem for a quasilinear equation Usp. Mat. Nauk 14 (1959) pp 165-170, English Tranl in Amer. Math. Soc. Transl., ser 2 33 (1964) pp 285-290.*

[36] J. RAUCH : *L^2 is a continuable condition for Kreiss ' mixed problems ; Comm. Pure Appl. Maht., 23 (1970) pp 221-232.*

[37] J. RAUCH : *Symmetric positive systems with boundary Characteristic of constant multiplicity ; Trans. Amer. Math. Soc. 291 (1985) pp 167-187.*

[38] J. RAUCH - F. MASSEY : *Differentiability of solutions to hyperbolic initial boundary value problems, Trans. Amer. Math. Soc, 189 (1974) pp 303-318.*

[39] J. RAUCH - M. REED : *Propagation of singularities for semilinear hyperbolic equations in one space variable, Ann of Math 111 (1980) pp 531-552.*

[40] J. RAUCH - M. REED : *Jump discontinuties of semilinear strictly hyperbolic systems in two variables : creation and propagation, Comm. Math. Phys, 81 (1981) pp 203-227.*

[41] J. RAUCH - M. REED : *Non linear microlocal analysis of semilinear hyperbolic systems in one space dimension, Duke Math. J. 49 (1982) pp 379-475.*

[42] J. RAUCH - M. REED : *Striated solutions to semilinear, two speed wave equations ; Indiana U; Math. J, 34 1985 pp 337-353.*

[43] J. RAUCH - M. REED : *Discontinuous progressing waves for semilinear systems ; Comm. Partial Diff. Equ. 10 (1985).*

[44] J. RAUCH - M. REED : *Classical, conormal, semilinear waves, Seminaire Ecole Polytechnique, Exposé n°5 (1985-86).*

[45] M. RITTER : *Progressing wave solutions to non linear hyperbolic Cauchy problems ; Ph. D. thesis, M. I. T. (1984).*

[46] J. SMOLLER : *Shock waves and Reaction Diffusion Equations ; Springer Verlag, New York (1983).*

[47] M. TAYLOR : *Pseudodifferential operators ; Princeton University Press, Princeton (1981).*

[48] M. TOUGERON : *Problème mixte avec condition de Neumann pour l'élasto-dynamique non linéaire (en préparation).*