

JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

BERNARD HELFFER

JOHANNES SJÖSTRAND

Effet tunnel pour l'opérateur de Schrödinger semi-classique. I

Journées Équations aux dérivées partielles, n° 2 (1985), p. 1-38

http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1985__2_A2_0

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

EFFET TUNNEL POUR L'OPERATEUR DE SCHRODINGER

SEMI-CLASSIQUE I

B. HELFFER

UER Mathématiques

Université de Nantes

2, Chemin de la Houssinière

44 072 - NANTES CEDEX - FRANCE

J. SJOSTRAND

UER Mathématiques

Université de Paris-Sud

91 405 - ORSAY CEDEX - FRANCE

Exposés présentés aux Journées "Equations aux Dérivées Partielles",
SAINT JEAN DE MONTS, 3-7 Juin 1985

0 - INTRODUCTION

Ceci est la première partie d'un survey d'une série de travaux des auteurs. La deuxième partie, consacrée à une théorie des résonances apparaîtra dans les comptes rendus du Colloque Nato sur l'Analyse Microlocale, Italie 1985 dans Reidel Publ. Co. Il s'agit de montrer comment des méthodes plus ou moins modernes en E.D.P. permettent d'obtenir des résultats rigoureux (bien que parfois "bien connus" par des physiciens) sur le comportement des valeurs propres quand $h \rightarrow 0$ de l'opérateur de Schrödinger $-h^2\Delta + V(x)$.

1 - ESTIMATIONS DE DECROISSANCE EXPONENTIELLE

Ces estimations développées par S. Agmon [1] dans un autre contexte jouent un rôle fondamental dans notre approche et dans le contexte semi-classique, B. Simon [2] a observé l'intérêt de ces inégalités. On suit ici la présentation de Helffer-Sjöstrand [3,4]. Dans la suite, M désignera soit une variété riemannienne compacte de dimension n , soit \mathbb{R}^n . Pour simplifier notre exposé au maximum, on supposera souvent que M est compacte mais on travaillera en coordonnées locales, comme si M était \mathbb{R}^n . Soit $V \in C^\infty(M; \mathbb{R})$.

THEOREME 1.1

Soit $\Omega \subset\subset M$ un ouvert à bord de classe C^2 , et soit Φ une fonction Lipschitzienne réelle sur $\bar{\Omega}$. Alors $\nabla\Phi$ est bien défini dans $L^\infty(\bar{\Omega}; \mathbb{R})$ et pour tout $u \in C^2(\bar{\Omega}; \mathbb{R})$ avec $u|_{\partial\Omega} = 0$ on a :

$$(1.1) \quad h^2 \int_{\Omega} \left| \nabla(e^{\Phi/h} u) \right|^2 dx + \int_{\Omega} (V(x) - (V\Phi(x))^2) e^{2\Phi/h} |u|^2 dx$$

$$= \int_{\Omega} e^{2\Phi/h} P u(x) u(x) dx$$

Si $0 \leq F_{\pm} \in L^{\infty}(\Omega)$ et $V - (\nabla\Phi)^2 = F_+^2 - F_-^2$ presque partout, alors

$$(1.2) \quad h^2 \left\| \nabla(e^{\Phi/h} u) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \left\| F_+ e^{\Phi/h} u \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \leq \left\| \frac{1}{(F_+ + F_-)} e^{\Phi/h} P u \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{3}{2} \left\| F_- e^{\Phi/h} u \right\|_{L^2(\Omega)}^2 .$$

Ici (1.1) s'obtient par des intégrations par parties (et une régularisation pour se ramener au cas où Φ est C^{∞}) et (1.2) résulte facilement de (1.1).

Pour illustrer l'utilisation de (1.2), supposons que M soit compacte, $u = u_h \in L^2(M)$, $\|u\|_{L^2(M)} = 1$, $(P - E(h))u = 0$, où $P = -h^2\Delta + V(x)$,

$\Delta =$ l'opérateur de Laplace et $E(h) \in \mathbb{R}$, $E(h) \rightarrow 0$, $h \rightarrow 0$. Soit

$K = \{x \in M ; V(x) \leq 0\}$ "la réunion des puits", soit $\int \max(V(x), 0) dx^2$ la métrique d'Agmon (où dx^2 désigne la métrique riemannienne sur M) et soit d la distance (dégénérée) associée à cette métrique. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$(1.3) \quad \left\| e^{d(K,x)/h} \nabla u(x) \right\|_{L^2(M)}^2 + \left\| e^{d(K,x)/h} u(x) \right\|_{L^2(M)}^2 \leq C_{\varepsilon} e^{\varepsilon/h} .$$

Pour démontrer (1.3), on pose $\Phi(x) = (1-\delta)d(K,x)$, $\delta > 0$. Puisque

$(\nabla d(K, \cdot))^2 \leq \max(V, 0)$ presque partout, il existe une constante $a(\delta) > 0$

telle que $V(x) - E(h) - (\nabla\Phi(x))^2 \geq a(\delta)$, pour presque tout x dans la région

$d(K,x) \geq \delta$, quand $h > 0$ est assez petit. On choisit alors F_+ et F_- tels que

$F_-(x) = 0$ pour $d(K,x) \geq \delta$ et tels que $F_+ + F_- \geq \text{const.} > 0$, $V - E(h) - (\nabla\Phi)^2 = F_+^2 - F_-^2$ presque partout. Il suffit alors de choisir $\delta > 0$ assez petit

en fonction de $\varepsilon > 0$ pour déduire (1.3) de (1.2) (avec V remplacé par

$V - E$).

Combinant (1.3) avec des inégalités a priori standard pour le Laplacien, on gagne ensuite un contrôle ponctuel uniforme sur u et ses dérivées.

(1.4) Pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et tout $\epsilon > 0$, il existe une constante $C_{\alpha, \epsilon} > 0$ telle que

$$|\partial^\alpha u(x, h)| \leq C_{\alpha, \epsilon} \exp \left[-\frac{1}{h} (d(K, x) - \epsilon) \right], \quad \forall x \in M.$$

Il est aussi commode de discuter des majorations sur le noyau de la résolvante :

DEFINITION 1.2

Soit $A_h, h \in \mathcal{J} \subset]0, 1]$, $0 \in \bar{\mathcal{J}}$, une famille d'opérateurs bornés de $L^2(M)$ dans $H^1(M)$. Si $f \in C^0(M \times M; \mathbb{R})$, on dit que le noyau $A(x, y)$ de A est $\hat{\mathcal{G}}(\exp(-f(x, y)/h))$ si pour tous $x_0, y_0 \in M$ et tout $\epsilon > 0$, il existe des voisinages V de x_0 et U de y_0 et $C > 0$ tels que

$$\|Au\|_{H^1(V)} \leq C e^{(\epsilon - f(x_0, y_0))/h} \|u\|_{L^2(U)}, \quad \forall h \in \mathcal{J}, h \leq 1/C$$

$u \in L^2(M)$ avec $\text{supp } u \subset U$.

La définition est valable aussi quand M est une variété à bord. Par définition : $\hat{\mathcal{G}}(e^{-f/h} + e^{-g/h}) = \hat{\mathcal{G}}(e^{-\min(f, g)/h})$.

Soit M compacte (éventuellement avec bord) et supposons que $U = \{x \in M : V(x) \leq 0\}$ soit contenu dans $\overset{\circ}{M}$ (si $\partial M \neq \emptyset$), et de diamètre 0 pour la distance d'Agmon. Soit $K_h \subset \mathbb{C}$, $h \in \mathcal{J}$ une famille de compacts avec $K_h \rightarrow \{0\}$ quand $h \rightarrow 0$. Soit $a > 0$ et supposons que :

(1.5) Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $C_\epsilon > 0$ tel que $\text{dist}(K_h, \sigma(P)) \geq \frac{1}{C_\epsilon} e^{-(a+\epsilon)/h}$ pour tout $h \in \mathcal{J}$ avec $|h| < \frac{1}{C_\epsilon}$.

Ici P désigne la réalisation autoadjointe associée à la condition de Dirichlet sur ∂M et $\sigma(P)$ est son spectre. Soit $\eta > 0$ petit mais indépendant de h et posons $M_o = M \setminus B_d(U, \eta)$, où $B_d(U, \eta)$, où $B_d(U, \eta) = \{x \in M ; d(U, x) < \eta\}$. Soit P_{M_o} la réalisation de Dirichlet correspondante. On montre alors par des estimations du type (1.3) que pour $z \in K_h$:

$$(1.6) \quad \text{le noyau de } (P_{M_o} - z)^{-1} \text{ est } \hat{G}(e^{-d(x,y)/h}),$$

uniformément par rapport à z . Soit $\theta \in C_o^\infty(B_d(U, 2\eta))$ égal à 1 près de $\overline{B_d(U, \eta)}$ et soit $\hat{G} \in C_o^\infty(B_d(U, 4\eta))$ égal à 1 près de $\overline{B_d(U, 2\eta)}$. On remarque que

$$(1.7) \quad (P - z)^{-1} = (1 - \theta)(P_{M_o} - z)^{-1}(1 - \hat{\theta}) + (P - z)^{-1}\hat{\theta} \\ + (P - z)^{-1}\hat{\theta}[P, \theta](P_{M_o} - z)^{-1}(1 - \hat{\theta}).$$

L'hypothèse (1.4) entraîne que la norme $L^2 \rightarrow L^2$ de $(P - z)^{-1}$ est $\mathcal{O}_\varepsilon(e^{(a+\varepsilon)/h})$ pour tout $\varepsilon > 0$ et combinant avec une inégalité a priori simple, on obtient la même majoration pour la norme $L^2 \rightarrow H^1$. A l'aide du théorème 1.1, on obtient alors

$$(1.8) \quad \text{Le noyau de } (P - z)^{-1}\hat{\theta} \text{ est } \hat{G}(e^{\frac{1}{h}(-d(U,x)+a+4\eta)}).$$

Ceci avec (1.5) et (1.6) donne

$$(1.9) \quad \text{Le noyau de } (P - z)^{-1} \text{ est} \\ \hat{G}(e^{-d(x,y)/h} + e^{-d(x,U)+d(U,y)-a-8\eta)/h}).$$

Ici η est arbitrairement petit, et donc sous l'hypothèse (1.4) :

$$(1.10) \quad \text{Le noyau de } (P - z)^{-1} \text{ est } \hat{G}(e^{-d(x,y)/h} + e^{\frac{a-1}{h}(d(x,U)+d(U,y))}).$$

Considérons maintenant le cas de plusieurs puits. On suppose

que $K = U_1 \cup \dots \cup U_N$, où les U_j sont disjoints et de diamètre 0, (et que $\partial M = \emptyset$). Pour $\eta > 0$ assez petit, mais indépendant de h , on pose :

$$(1.11) \quad M_j = M \setminus \bigcup_{k \neq j} B(U_k, \eta).$$

Soit $S_j = \min_{k \neq j} d(U_j, U_k)$. On suppose qu'il existe $a_j \in [0, 2S_j[$ tels que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$(1.12) \quad \text{dist}(K_h, \sigma(P_{M_j})) \geq \frac{1}{C_\varepsilon} e^{-(a_j + \varepsilon)/h}, \quad \text{pour } 0 \leq h \leq \frac{1}{C_\varepsilon}, \quad j = 1, \dots, N.$$

Ici P_{M_j} désigne la réalisation de Diriclet de P dans $L^2(M_j)$. Des arguments comme ci-dessus montrent que si: $2\eta < 2S_j - a_j$, alors l'hypothèse (1.12) reste vérifiée si l'on diminue encore η .

Soit $\theta_j \in C_0^\infty(B_d(U_j, 2\eta))$ égale à 1 près de $\overline{B_d(U_j, \eta)}$ et soit $\chi_j = 1 - \sum_{k \neq j} \theta_k$. Soient $\tilde{\chi}_j \in C_0^\infty(M_j)$ avec $\sum \tilde{\chi}_j = 1$. Si on diminue η suffisamment avec $\tilde{\chi}_j$ fixés, on obtient $\text{supp}(1 - \chi_j) \cap \text{supp} \tilde{\chi}_j = \emptyset$. Pour construire la résolvante de P , on pose d'abord :

$$R_0 = \sum_1^N \chi_j (P_{M_j} - z)^{-1} \tilde{\chi}_j.$$

Alors $(P - z)R_0 = I - K$, où

$$K = \sum_{k \neq j} [P, \theta_k] (P_{M_j} - z)^{-1} \tilde{\chi}_j.$$

On cherche alors à écrire :

$$(P - z)^{-1} = R_0 + \sum_{\ell=1}^{\infty} R_0 K^\ell,$$

et connaissant une majoration de type (1.9) pour chaque $(P_{M_j} - z)^{-1}$, on voit facilement que cette série converge en norme pour $z \in K_h$, h assez petit, si

$$(1.13) \quad d(U_j, U_k) - \frac{a_j}{2} - \frac{a_k}{2} > 0 \quad \text{pour tous } j \neq k.$$

On obtient :

PROPOSITION 1.3

Sous les hypothèses (1.12) et (1.13), si $h \in \mathcal{J}$ est assez petit, alors $(P-z)^{-1}$ existe pour tout $z \in K_h$ et, uniformément par rapport à z , son noyau est

$$(1.14) \quad \hat{G}(e^{-d(x,y)/h} + {}^t T_a(x) (I + \mathcal{D}'_a + \dots + (\mathcal{D}'_a)^{N-1}) T_a(y)),$$

où $\mathcal{D}'_a = ((1-\delta_{j,k})e^{-\tilde{d}_{j,k}})$, $\tilde{d}_{j,k} = d(U_j, U_k) - \frac{a_j}{2} - \frac{a_k}{2}$, $T_a(y) = (e^{-\frac{a_j}{2}d(U_j, y)/h})$, (matrice colonne)

On remarque ici que, si tous les a_j sont nuls, alors (1.14) se réduit à $\hat{G}(e^{-d(x,y)/h})$. Si $x, y \notin \bigcup_{j=1}^N B_d(U_j, \frac{a_j}{2})$, on peut écrire (1.14) comme $\hat{G}(e^{-f(x,y)/h})$, où $f(x,y)$ est l'infimum des "longueurs" des courbes C^1 de y à x où par "longueur" on entend la longueur d'Agmon de la partie qui est dans $M \setminus \bigcup_1^N B_d(U_j, a_j/2)$.

2 - MATRICE D'INTERACTION

Soit M sans bord (si $M = \mathbb{R}^n$ on suppose que $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) > 0$). On suppose toujours que $V^{-1}([-\infty, 0]) = K = U_1 \cup \dots \cup U_N$, où les U_j sont disjoints, de diamètre 0 pour d , et pour $\eta > 0$ assez petit, on définit M_j par (1.11). On se donne un intervalle compact $I(h)$, $h \in \mathcal{J}$, qui tend vers $\{0\}$ quand h tend vers 0 et on suppose :

(2.1) Il existe une fonction $a(h) > 0$ avec $\log a(h) = o(\frac{1}{h})$, $a(h) \rightarrow 0$, $h \rightarrow 0$, telle que P et P_{M_j} n'ont pas de valeurs propres dans $(I(h) + [-2a(h), 2a(h)]) \setminus I(h)$.

Les arguments développés ci-dessus montrent qu'il suffit essentiellement de faire cette hypothèse sur les valeurs propres des P_{M_j} . Dans la suite on utilisera tacitement que le nombre de valeurs propres de P et P_{M_j} dans $I(h)$ est $\mathcal{O}(h^{-N_0})$ pour un certain N_0 (conséquence d'une formule de Weyl sur le nombre de valeurs propres dans un intervalle). Soient

$\mu_{j,1}, \dots, \mu_{j,m_j}$ les valeurs propres de P_{M_j} dans $I(h)$ et soit $\varphi_{j,1}, \dots, \varphi_{j,m_j}$ une famille orthonormale correspondante dans $L^2(M_j)$. On écrira $\alpha = (j,k)$, $j(\alpha) = j$. Avec $\chi_j = 1 - \sum_{k \neq j} \theta_k$ comme ci-dessus, on pose $\psi_\alpha = \chi_{j(\alpha)} \varphi_\alpha$. Nous avons vu que $\varphi_\alpha, \psi_\alpha = \tilde{\mathcal{O}}(e^{-d(U_{j(\alpha)}, x)/h})$ et de même pour les dérivées. Ici " $\tilde{\mathcal{O}}(e^{-f(x)/h})$ " signifie $\mathcal{O}(e^{(f(x)-\varepsilon(\eta))/h})$ uniformément en x , où $\varepsilon(\eta) \rightarrow 0$, $\eta \rightarrow 0$.

Soit $E \subset L^2(M)$ l'espace engendré par les ψ_α et soit $F \subset L^2$ l'espace associé à $\sigma(P) \cap I(h)$. Les ψ_α forment presque une base orthonormale dans E . Plus précisément, si $\mathcal{D}' = ((1-\delta_{j,k})e^{-d(U_j, U_k)/h})_{1 \leq j, k \leq N}$, alors en notation abrégée :

$$(2.2) \quad ((\psi_\alpha | \psi_\beta)) = I + \tilde{\mathcal{O}}(\mathcal{D}' + \mathcal{D}'^2),$$

ce qui signifie que $(\psi_\alpha | \psi_k) = \delta_{\alpha, \beta} + \tilde{\mathcal{O}}((\mathcal{D}' + \mathcal{D}'^2)_{j(\alpha), j(\beta)})$.

Remarquons maintenant que :

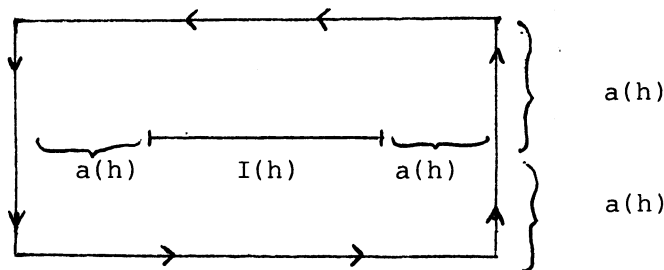
$$(2.3) \quad P\psi_\alpha = \mu_\alpha \psi_\alpha + \gamma_\alpha, \quad \gamma_\alpha = \tilde{\mathcal{O}}(e^{-d(U_{j(\alpha)}, x)/h}), \quad \text{supp } \gamma_\alpha \subset \bigcup_{k \neq j(\alpha)} B(U_k, \eta).$$

Soit Π_F le projecteur orthogonal sur F et posons $v_\alpha = \Pi_F \psi_\alpha$.

Alors :

$$(2.4) \quad v = \oint (z-P)^{-1} \psi_\alpha dz, \quad \oint = \frac{1}{2\pi i} \int$$

où Γ :



Utilisant (1.14) avec $\Gamma = K_h$ et $a_j = 0$, on trouve :

$$(2.5) \quad v_\alpha = \tilde{\mathcal{O}}(e^{-d(U_j(\alpha), x)/h}) \text{ et de m\^eme pour les d\^eriv\^ees.}$$

Gr\^ace \^a (2.3), on trouve :

$$(z-P)^{-1} \psi_\alpha = (z-\mu_\alpha)^{-1} \psi_\alpha + (z-P)^{-1} (z-\mu_\alpha)^{-1} \gamma_\alpha,$$

et apr\^es int\^egration sur Γ :

$$v_\alpha - \psi_\alpha = \oint (z-P)^{-1} (z-\mu_\alpha)^{-1} \gamma_\alpha dz.$$

A l'aide de (2.3) et (1.14), on trouve :

$$(2.6) \quad v_\alpha - \psi_\alpha = \tilde{\mathcal{O}}(e^{-\delta_j(\alpha)(x)/h}),$$

o\^u $\delta_j(x) = \min_{k \neq j} d(U_j, U_k) + d(U_k, x)$. Si $S_0 = \min_{j \neq k} d(U_j, U_k)$, on voit par (2.6) que $v_\alpha - \psi_\alpha = \tilde{\mathcal{O}}(e^{-S_0/h})$ dans L^2 et on en d\^eduit facilement que :

$$(2.7) \quad \vec{d}(E, F) = \tilde{\mathcal{O}}(e^{-S_0/h}),$$

o\^u $d(E, F) = \sup_{v \in E} \inf_{u \in F} \|v-u\|$. (Ici on utilise aussi que $\dim E = \mathcal{O}(h^{-N_0})$).

On peut aussi majorer $\vec{d}(F, E)$. Soit $1 = \tilde{\chi}_0 + \sum_1^N \tilde{\chi}_j$ avec $\tilde{\chi}_j \in C_0^\infty(B_d(U_j, \frac{1}{2} S_0 + \eta))$,

$\tilde{\chi}_0 \in C_0^\infty(M \setminus \cup_{\alpha} (U_{\alpha}, \frac{1}{2}S_0 - \eta))$. Soit $u \in F$ une fonction propre normalisée. Puisque $u = \tilde{\mathcal{G}}(e^{-d(K, \alpha)/h})$, on montre comme ci-dessus, que pour $j \geq 1$, $\tilde{\chi}_j u$ est à une distance $\tilde{\mathcal{G}}(e^{-S_0/2h})$ dans L^2 de l'espace $E_j \subset E$ engendré par les ψ_{α} avec $j(\alpha) = j$. Donc $\text{dist}(u, E) = \tilde{\mathcal{G}}(e^{-S_0/2h})$, et on montre ensuite sans trop de difficulté que $\vec{d}(F, E) = \tilde{\mathcal{G}}(e^{-S_0/h})$. Donc $\dim E = \dim F$ et puisque " \vec{d} " est symétrique sur les espaces de même dimension on trouve :

$$(2.8) \quad \vec{d}(E, F) = \vec{d}(F, E) = \tilde{\mathcal{G}}(e^{-S_0/h}).$$

Notre but est de décrire la matrice de $P|_F$ dans une base orthonormale convenable. Par l'orthogonalité entre F et $v_{\alpha} - \psi_{\alpha}$, on trouve :

$$\begin{aligned} (v_{\alpha} | v_{\beta}) - (\psi_{\alpha} | \psi_{\beta}) &= -(v_{\alpha} - \psi_{\alpha} | v_{\beta} - \psi_{\beta}) = \\ &= \tilde{\mathcal{G}}(\exp - \frac{1}{h} \min_{x \in M} (\delta_{j(\alpha)}(x) + \delta_{j(\beta)}(x))) = \tilde{\mathcal{G}}(\exp - \frac{1}{h} \tau_{j(\alpha), j(\beta)}), \end{aligned}$$

où
$$\tau_{j,k} = \min_{\substack{j' \neq j \\ k' \neq k}} (d(U_j, U_{j'}) + d(U_{j'}, U_{k'}) + d(U_{k'}, U_k)).$$

Donc en notation abrégée :

$$(2.9) \quad ((v_{\alpha} | v_{\beta})) = ((\psi_{\alpha} | \psi_{\beta})) + \tilde{\mathcal{G}}(\mathcal{D}'^2 + \mathcal{D}'^3).$$

Soit $T = ((1 - \delta_{j(\alpha), j(\beta)}) (\psi_{\alpha} | \psi_{\beta})) = \tilde{\mathcal{G}}(\mathcal{D}'^1)$, $v = ((v_{\alpha} | v_{\beta}))$.

Alors,

$$(2.10) \quad v = I + T + \tilde{\mathcal{G}}(\mathcal{D}'^2 + \mathcal{D}'^3),$$

et donc,

$$(2.11) \quad v^{\mathcal{H}} = I + \mathcal{H}T + \tilde{\mathcal{G}}(\mathcal{D}'^2 + \mathcal{D}'^3),$$

pour tout $\mathcal{H} \in \mathbb{R}$. Comme pour (2.9), on obtient :

$$(2.12) \quad ((v_\alpha | Pv_\beta)) = ((\psi_\alpha | P\psi_\beta)) + \tilde{\mathcal{G}}(\mathcal{D}'^2 + \mathcal{D}'^3).$$

Ici,

$$\begin{aligned} ((\psi_\alpha | P\psi_\beta)) &= \left(\frac{1}{2}(\psi_\alpha | P\psi_\beta) + \frac{1}{2}(P\psi_\alpha | \psi_\beta)\right) = \\ &= \left(\frac{1}{2}(\mu_\alpha + \mu_\beta)(\psi_\alpha | \psi_\beta)\right) + \left(\frac{1}{2}(\psi_\alpha | \gamma_\beta)\right) + \left(\frac{1}{2}(\gamma_\alpha | \psi_\beta)\right) = \\ &= \text{diag}(\mu_\alpha) + \frac{1}{2} \text{T diag}(\mu_\alpha) + \frac{1}{2} \text{diag}(\mu_\alpha) \text{T} + \left(\frac{1}{2}(\psi_\alpha | \gamma_\beta) + \frac{1}{2}(\gamma_\alpha | \psi_\beta)\right) \\ &\quad + \tilde{\mathcal{G}}(\mathcal{D}'^2 + \mathcal{D}'^3). \end{aligned}$$

Soit,

$$(2.13) \quad \hat{W} = \left(\frac{1}{2}(w_{\alpha,\beta} + w_{\beta,\alpha})\right), \text{ où } w_{\alpha,\beta} = 0 \text{ si } j(\alpha) = j(\beta) \text{ et}$$

$$w_{\alpha,\beta} = h^2 \int \chi_{j(\alpha)} (\varphi_\beta \nabla \varphi_\alpha - \varphi_\alpha \nabla \varphi_\beta) \cdot \nabla \chi_{j(\beta)} dx \text{ si } j(\alpha) \neq j(\beta).$$

Alors on trouve :

$$(2.14) \quad ((v_\alpha | Pv_\beta)) = \text{diag}(\mu_\alpha) + \frac{1}{2} \text{T diag}(\mu_\alpha) + \frac{1}{2} \text{diag}(\mu_\alpha) \text{T} + \hat{W} + \tilde{\mathcal{G}}(\mathcal{D}'^2 + \mathcal{D}'^3).$$

Introduisons maintenant la base orthonormale $\vec{e} = \vec{v} V^{-1/2}$ ("l'orthonormalisée" de $\vec{v} = (v_\alpha)$). Dans cette base la matrice de $P|_F$ devient :

$$V^{-1/2} ((v_\alpha | Pv_\beta)) V^{-1/2} = \text{diag}(\mu_\alpha) + \hat{W} + \tilde{\mathcal{G}}(\mathcal{D}'^2 + \mathcal{D}'^3),$$

grâce à (2.14) et (2.11). On a donc montré le

THEOREME 2.1 ([4]).

La matrice de $P|_F$ pour la base orthonormalisée $\vec{e} = \vec{v} V^{-1/2}$ est de la forme $\text{diag}(\mu_\alpha) + \hat{W} + \tilde{\mathcal{G}}(\mathcal{D}'^2 + \mathcal{D}'^3)$, où \hat{W} est donnée par (2.13).

COROLLAIRE 2.2

La même matrice s'écrit : $\text{diag}(\mu_\alpha) + \hat{W} + \tilde{\mathcal{G}}(e^{-2S_0/h})$.

EXEMPLES :

On suppose que chaque P_{M_j} admet exactement une valeur propre μ_j dans $I(h)$.

1 : Le double puits. Si $S_0 = d(U_1, U_2)$, on obtient la matrice de $P|_F$ pour la base e_1, e_2 :

$$\begin{pmatrix} \mu_1 & w \\ w & \mu_2 \end{pmatrix} + \tilde{\mathcal{O}}(e^{-2S_0/h}),$$

où $w = \mathcal{O}(e^{-(S_0 - \epsilon)/h})$ pour tout $\epsilon > 0$. (On verra dans la section 3 des cas où $w e^{S_0/h}$ admet un développement asymptotique en puissance de h). Les valeurs propres de P dans $I(h)$ sont donc,

$$\lambda_{\pm} = \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} \pm \sqrt{w^2 + \frac{(\mu_1 - \mu_2)^2}{4}} + \tilde{\mathcal{O}}(e^{-2S_0/h})$$

d'où $\lambda_+ - \lambda_- = \sqrt{4w^2 + (\mu_1 - \mu_2)^2} + \tilde{\mathcal{O}}(e^{-2S_0/h})$. On peut en particulier considérer le cas symétrique où il y a une isométrie $j : M \rightarrow M$ qui conserve V et qui échange U_1 et U_2 . On choisit alors $M_2 = j(M_1)$ et alors $\mu_1 = \mu_2$ et on trouve :

$$\lambda_+ - \lambda_- = |w| + \tilde{\mathcal{O}}(e^{-2S_0/h})$$

2 : On suppose que l'on a exactement N puits U_1, \dots, U_N et une isométrie $\tilde{j} : M \rightarrow M$ qui conserve V telle que $\tilde{j}(U_1) = U_2, \tilde{j}(U_2) = U_3, \dots, \tilde{j}(U_N) = U_1$. Soit $S_0 = \min_{\nu \neq \mu} d(U_\nu, U_\mu)$ on suppose que ce minimum est atteint seulement pour $|\nu - \mu| = 1$ ou pour $(\nu, \mu) = (1, N)$ ou $(N, 1)$. Soit $S_1 > S_0$ la séparation minimale entre U_ν et U_μ pour les autres valeurs de $\nu, \mu, \nu \neq \mu$. Avec $M_k = \tilde{j}^k(M_2)$ on obtient $\mu_1 = \dots = \mu_N \stackrel{\text{dif}}{=} \mu$, et la matrice de $P|_F$

pour la base e_1, \dots, e_N devient :

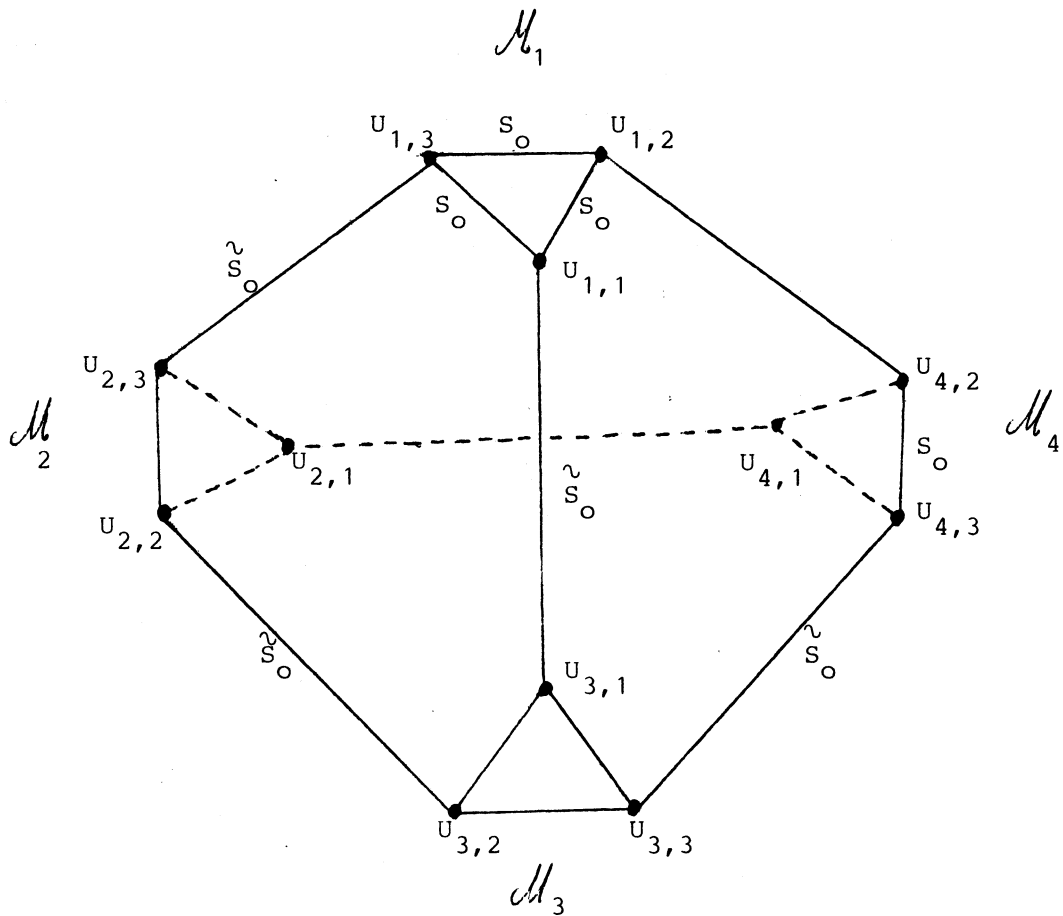
$$M = \mu I + \begin{pmatrix} 0 & w & 0 & \dots & 0 & w \\ w & 0 & w & & & 0 \\ 0 & w & 0 & & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & & 0 & w \\ w & 0 & \dots & 0 & w & 0 \end{pmatrix} + \tilde{G}(e^{-S_1/h})$$

On obtient les valeurs propres dans $I(h)$:

$$\lambda_j = \mu + 2 w \cos\left(\frac{2\pi j}{N}\right) + \tilde{G}(e^{-S_1/h}), \quad 0 \leq j \leq N-1.$$

Ici $w = \tilde{G}(e^{-S_0/h})$. Si l'on suppose que $\frac{1}{w} = \tilde{G}(e^{S_0/h})$, alors les valeurs propres λ_0 et $\lambda_{N/2}$ (si N est pair) sont simples, les autres sont doubles au moins modulo $\tilde{G}(e^{-S_1/h})$. Ces valeurs sont vraiment doubles car M est réelle et les vecteurs propres u_j correspondant à λ_j pour $j \notin \{0, N/2\}$ ne sont pas proportionnels à des vecteurs réels, donc u_j et $\overline{u_j}$ engendrent un espace propre de dimension 2.

3 : Voici un exemple "d'interaction moléculaire", où il devient important de majorer les restes par $\tilde{G}(D'^2 + D'^3)$ et pas seulement par $\tilde{G}(e^{-2S_0/h})$:



Douze puits $U_{j,k}$, $1 \leq j \leq 4$, $1 \leq k \leq 3$ sont regroupés en quatre "molécules" $M_j = \{U_{j,k} ; 1 \leq k \leq 3\}$ selon la figure, avec une molécule "à chaque sommet d'un tétraèdre régulier". Plus précisément on suppose qu'il existe un groupe d'isométries conservant V et échangeant les puits et qui contient toutes les rotations possibles du tétraèdre. Sur la figure on a aussi marqué deux distances d'Agmon : la séparation des puits dans une molécule S_0 , et la séparation intermoléculaire \tilde{S}_0 . Soit aussi $\tilde{\tilde{S}}_0 = \min_{\substack{j \neq j' \\ k \neq k'}} d(U_{j,k}, U_{j',k'})$. On suppose que $S_0 < \tilde{S}_0 < \tilde{\tilde{S}}_0$.

Dans chaque molécule on a un phénomène d'interaction de l'ordre

$$\tilde{\mathcal{O}}(e^{-S_0/h}), \text{ décrit par une matrice } \tilde{\mu} I + \begin{pmatrix} 0 & \tilde{a} & \tilde{a} \\ \tilde{a} & 0 & \tilde{a} \\ \tilde{a} & \tilde{a} & 0 \end{pmatrix} .$$

(Par symétrie, on peut incorporer les restes $\tilde{G}(e^{-2S_0/h})$ des $\tilde{\mu}$ et \tilde{a}).

Si $\frac{1}{\tilde{\nu}} = \tilde{G}(e^{S_0/h})$, on a donc pour chaque molécule une valeur propre simple : $\tilde{\mu} + 2\tilde{a}$, et une valeur propre double : $\tilde{\mu} - \tilde{a}$.

La matrice associée à tout le système, écrite en blocs 3 x 3,

est :

$$\mathcal{M} = \hat{\mu} I_{e^{12}} + \begin{pmatrix} \hat{\delta} & \hat{\alpha} & R & \hat{\alpha} R^{-1} & R^2 \hat{\alpha} R^{-2} \\ \cdot & \hat{\delta} & R^2 \hat{\alpha} R^{-2} & R \hat{\alpha} R^{-1} & \\ \cdot & \cdot & \hat{\delta} & \hat{\alpha} & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \hat{\delta} & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{G}(e^{-2S_0/h}) & & & & \\ & \tilde{G}(e^{-S_0/h}) & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \tilde{G}(e^{-2S_0/h}) & \\ & & & & \cdot \end{pmatrix}$$

où $\hat{\delta} = \begin{pmatrix} 0 & \hat{a} & \hat{a} \\ \hat{a} & 0 & \hat{a} \\ \hat{a} & \hat{a} & 0 \end{pmatrix}$, $\hat{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{b} \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Ici : $\hat{a} - \tilde{a} = \tilde{G}(e^{-2S_0/h})$, $\tilde{\mu} - \hat{\mu} = \tilde{G}(e^{-2S_0/h})$.

Nous avons une invariance de \mathcal{M} par un certain groupe unitaire, ce qui permet d'absorber les restes et arriver à la "forme exacte" :

$$\mathcal{M} = \mu I + \begin{pmatrix} \delta & \alpha & R & \alpha R^{-1} & R^2 \alpha R^{-2} \\ \cdot & \delta & R^2 \alpha R^{-2} & R \alpha R^{-1} & \\ \cdot & \cdot & \delta & \alpha & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \delta & \end{pmatrix}, \quad \mu - \tilde{\mu} = \tilde{G}(e^{-2S_0/h})$$

$$\delta = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & 0 \end{pmatrix} = \tilde{\delta} + \tilde{\mathcal{G}}(e^{-2S_0/h}) , \quad \alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} + \tilde{\mathcal{G}}(e^{-\tilde{S}_0/h}) ,$$

$b-\hat{b} = \tilde{\mathcal{G}}(e^{-\tilde{S}_0/h})$. Dans des cas favorables (voir section 3) on sait que $e^{S_0/h}$ a et $e^{\tilde{S}_0/h}$ b sont des symboles classiques et elliptiques. On trouve alors les valeurs propres :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \mu + 2a + b + \tilde{\mathcal{G}}(e^{-\tilde{S}_0/h}) && \text{de multiplicité 1} \\ \lambda_2 &= \mu + 2a - b/3 + \tilde{\mathcal{G}}(e^{-\min(\tilde{S}_0, 2\tilde{S}_0 - S_0)/h}) && \text{de multiplicité 3} \\ \lambda_3 &= \mu - a + b + \tilde{\mathcal{G}}(e^{-\tilde{S}_0/h}) && \text{de multiplicité 2} \\ \lambda_4 &= \mu - a - b + \tilde{\mathcal{G}}(e^{-\min(\dots)/h}) && \text{de multiplicité 3} \\ \lambda_5 &= \mu - a + b/3 + \tilde{\mathcal{G}}(e^{-\min(\dots)/h}) && \text{de multiplicité 3} \end{aligned}$$

Ici le deuxième terme dans λ_j décrit une interaction dans chaque molécule et le troisième terme décrit une interaction intermoléculaire. Dans [4] on trouvera un traitement systématique de ces questions. C'est le travail de Harrell [5] qui nous a inspiré pour trouver le résultat ci-dessus sur la matrice d'interaction \hat{W} dans le théorème 2.1, mais aussi le travail [6] de Jona-Lasinio, Martinelli et Scoppola et celui de Davies [7]. Il faut aussi citer le travail de B. Simon [2] (légèrement antérieur à [3]) qui dans le cas de deux puits ponctuels non-dégénérés (voir la section 3) a obtenu pour les deux premières valeurs propres $\lambda_+ - \lambda_- = \exp[-(S_0 + o(1))/h]$, $h \rightarrow 0$. L'exemple 1 ci-dessus combiné avec les résultats de la section 3 ci-dessous donne une amélioration de ce résultat. Citons aussi finalement le travail de Combes, Duclos, Seiler [8].

3 - PUIITS PONCTUELS NON-DEGENERES ET METHODE BKW

On traite ici le cas d'un seul puits $U_0 = \{x_0\} \subset M_0^0$, où $M_0 \subset\subset M$ peut avoir un bord. On suppose donc :

$$(3.1) \quad V(x) \geq 0 \text{ avec égalité exactement en } x = x_0, \quad V''(x_0) > 0.$$

Il s'agit alors de déterminer les basses valeurs propres dans un intervalle $[0, C_0 h]$, où C_0 peut être grand, mais indépendant de h . La méthode BKW nous donne alors des valeurs propres approchées et des fonctions propres approchées. Il faut ensuite montrer que les valeurs propres approchées sont toutes les valeurs propres (mod $\mathcal{O}(h^\infty)$) dans l'intervalle donné et que les fonctions propres approchées sont suffisamment proches des vraies fonctions propres pour pouvoir être utilisées dans le calcul des coefficients d'interaction. Il ne suffira donc pas de faire cette approximation seulement pour la norme L^2 standard, mais il faut de nouveau utiliser des inégalités à poids.

a - Constructions BKW formelles

On associe à P son symbole principal $\rho(x, \xi) = \xi^2 + V(x)$ (en tant qu'opérateur h -pseudodifférentiel où $\tilde{D}_x = h D_x \longleftrightarrow \xi$), et pour ne pas être obligé d'introduire de la géométrie symplectique dans le complexe : $q(x, \xi) = \xi^2 - V(x) = -\rho(x, i\xi)$.

On peut choisir des coordonnées locales centrées en x_0 telles que :

$$(3.2) \quad q(x, \xi) = \xi^2 - \sum_1^n \lambda_j x_j^2 + \mathcal{O}(|(x, \xi)|^3)$$

où $\lambda_j > 0$. On associe alors à q son champ hamiltonien

$$(3.3) \quad H_q = \sum \frac{\partial q}{\partial \xi_j} \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial q}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial \xi_j} = 2(\xi \frac{\partial}{\partial x} + \sum_1^n \lambda_j x_j \frac{\partial}{\partial \xi_j}) + \mathcal{O}(|(x, \xi)|^2)$$

Ce champ s'annule en $(0,0)$ et la "matrice fondamentale" de q en $(0,0)$, c.a.d. la matrice du linéarisé de H_q en $(0,0)$ est

$$(3.4) \quad F = 2 \begin{pmatrix} 0 & I \\ \text{diag}(\lambda_j) & 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont de la forme $\pm \mu_j = \pm 2 \sqrt{\lambda_j}$ et nous avons les espaces associés respectivement à μ_1, \dots, μ_n et $-\mu_1, \dots, -\mu_n$:

$$(3.5) \quad \Lambda_{\pm}^0 : \xi_j = \frac{\pm \mu_j x_j}{2}$$

Λ_{\pm}^0 sont Lagrangiens de la forme $\xi = \pm \Phi'(x)$, $\Phi(x) = \sum_1^n \frac{\mu_j}{4} x_j^2$.

Nous sommes donc en présence d'un point fixe hyperbolique et le théorème des variétés stables nous donne deux variétés stables pour H_q : Λ_+ et Λ_- de dimension n , passant par $(0,0)$ et avec $T_{(0,0)}(\Lambda_{\pm}) = \Lambda_{\pm}^0$. De plus Λ_{\pm} sont Lagrangiennes et donc de la forme $\xi = \pm \varphi'(x)$, où $\varphi(x) = \Phi(x) + \mathcal{O}(x^3)$. On montre sans trop de difficulté :

LEMME 3.1

Dans un voisinage de 0 , on $\varphi(x) = d(x,0)$.

Toujours dans les mêmes coordonnées, nous avons $\rho = \xi^2 + \sum \lambda_j x_j^2 + \mathcal{O}(|(x,\xi)|^3)$, et on associe à $(P,0)$ l'oscillateur harmonique

$$(3.6) \quad P_0 = -\Delta + \sum_1^n \lambda_j x_j^2,$$

dont les valeurs propres sont de la forme $\sum_1^n (\alpha_j + \frac{1}{2}) \mu_j$, $\alpha_j \in \mathbb{N}$. Les fonctions propres correspondantes sont des "fonctions d'Hermite" de la forme $f(x) e^{-\Phi(x)}$, où $f(x)$ sont des polynômes. (Par une tf. de Bargmann on peut

ramener P_0 en $Q_0 = \sum \mu_j x_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \sum \mu_j$ dans un espace de Bargmann. Les fonctions propres de Q_0 deviennent alors les polynômes x^α .

On cherche maintenant des fonctions propres de P de la forme $a(x,h) e^{-\varphi(x)/h}$, où a est un symbole à déterminer. Soit $S^{\nu_{m,k}}$ l'espace des symboles formels de la forme :

$$(3.7) \quad u(x,h) \sim \sum_0^\infty u_j(x) h^{-m+j}$$

où u_j est une série formelle en x avec $u_j = \mathcal{O}(|x|^{(k-2j)_+})$. On introduit aussi $S_{1/2}^{\nu_{m,k}}$, l'espace des symboles de la forme (3.7), où des demi-entiers sont admis dans la sommation. On voit aisément que les espaces $S^{\nu_{m,k}} e^{-\varphi/h}$ et $S_{1/2}^{\nu_{m-k}} e^{-\varphi/h}$ sont stables sous l'action de $\frac{1}{h} P$. On introduit aussi de manière analogue les espaces $S^m(\mathbb{R}_+)$, $S_{1/2}^m(\mathbb{R}_+)$ de symboles indépendant de x . On peut montrer

PROPOSITION 3.2

Soit E_0 une valeur propre de multiplicité N_0 de l'opérateur P_0 . Alors on peut trouver $\tilde{g}_j \in S_{1/2}^{\nu_{m_j, k_j}}$, $m_j = \frac{1}{2} k_j$, $j = 1, \dots, N_0$ et $E_j \in \{E_0\} + S_{1/2}^{-1/2}(\mathbb{R}_+)$ tels que $(P-h E_j) (\tilde{g}_j e^{-\varphi/h}) = 0$, et tels que les fonctions $h^{-\eta/4} \tilde{g}_j e^{-\varphi/h}$ forment un système "orthonormal" dans L^2 . (Le produit scalaire L^2 entre deux éléments de la forme $\tilde{g} e^{-\varphi/h}$, se définit par la phase stationnaire formelle comme un symbole formel en h).

La démonstration de cette proposition entièrement formelle est donnée dans [3] et utilise une transformation FBI (voir Sjöstrand [9]) ou de Bargmann,

$$\text{qui ramène } \frac{1}{h} P \text{ en un opérateur } Q = \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} x^\alpha a_{\alpha,\beta}(x, \tilde{D}_x) \partial_x^\beta + a(x, \tilde{D}_x, h),$$

où $a_{\alpha,\beta}$, a sont des opérateurs h -pseudodifférentiels d'ordre 0. On cherche alors des fonctions propres de classe $S_{1/2}^{\nu_{m,k}}$ qui par transformation inverse

tombent dans $S_{1/2}^{m,k} e^{-\varphi/h}$. Il est sans doute possible de trouver une démonstration plus simple et plus élémentaire.

Il faut ensuite remplacer les séries formelles en x par des fonctions C^∞ . Si $\Omega \subset M^0$ est un ouvert, on définit $S^{m,k}(\Omega)$ comme l'espace des symboles formels en h à coefficients $u_j \in C^\infty(\Omega)$ de la forme (3.7) avec $u_j \in \mathcal{O}(|x|^{(k-2j)_+})$. On définit de même $S_{1/2}^{m,k}$. Faisons une hypothèse sur Ω :

(H) La fonction $\varphi(x) = d(x_0, x)$ est de classe C^2 sur Ω et pour tout $x \in \Omega$, il n'existe qu'une seule géodésique minimale γ_x (pour la métrique d'Agmon) qui relie x_0 à x . De plus, pour tout compact K de Ω l'ensemble $\bigcup_{x \in K} \gamma_x$ est un compact, contenu dans Ω .

Sous cette hypothèse, on constate d'abord que $\Lambda_\varphi = \{(x, \varphi'_x)\}$; $x \in \Omega$ est toujours une variété stable sortante pour le champ hamiltonien H_q , de classe C^∞ , et donc φ est aussi de classe C^∞ .

Si l'on veut maintenant résoudre $(P-h E(h)) (g e^{-\varphi/h}) \sim 0$, $g \in S^{m,k}$, on trouve pour g_0 une équation de transport $(v(x, \partial_x) + f_0(x) - E_0)g_0 = 0$, où $v(x, \partial_x)$ est la projection de $H_q|_{\Lambda_\varphi}$. Les courbes intégrales de ce champ sont alors les géodésiques minimales partant de x_0 , et on peut trouver (à partir de la proposition 3.2) des symboles $g_j \in S_{1/2}^{m_j, k_j}(\Omega)$ ayant \tilde{g}_j comme développements formels p.r. à x en x_0 , tels que $(P-h E_j) (g_j e^{-\varphi/h}) = \gamma_j e^{-\varphi/h}$, avec $\gamma_j \in S^{-\infty}(\Omega)$. En effet, si l'on veut déterminer par exemple le symbole principal g_j^0 de g_j on doit résoudre l'équation de transport ci-dessus, et on sait déjà que \tilde{g}_j^0 , le symbole principal de \tilde{g}_j , donne une solution dans les séries formelles en x . Soit alors \tilde{g}_j^0 une fonction dans $C^\infty(\Omega)$ avec \tilde{g}_j^0 comme développement de Taylor en 0. Alors

$$(\nu + f_o - E_o) \tilde{g}_j^o = k_j^o$$

où $k_j^o = \mathcal{O}(|x|^\infty)$. On cherche alors $g_j^o = \tilde{g}_j^o + h_j^o$ où $h_j^o = \mathcal{O}(|x|^\infty)$ est

$$(3.8) \quad (\nu + f_o - E_o) k_j^o = -k_j^o$$

Utilisant le caractère expansif de ν en 0 et le fait que Ω est "étoilé" pour les courbes intégrales de ν , on voit que (3.8) admet une solution C^∞ qui est $\mathcal{O}(|x|^\infty)$.

b - Justifications

Soit $P_o = P_{M_o}$ la réalisation de Dirichlet de P dans $L^2(M_o)$. Soit $C_o > 0$ un nombre qui n'est pas dans le spectre de l'oscillateur harmonique localisé en U_o .

THEOREME 3.3

Pour $h > 0$ assez petit il y a une bijection b entre $\text{Sp}(P_o) \cap [0, C_o h]$ et l'ensemble des valeurs propres asymptotiques $h E(h)$ de la proposition précédente, telle que $b(\lambda) - \lambda = \mathcal{O}(h^\infty)$. Si $h E(h)$ est une valeur propre asymptotiquement simple (c.a.d. $h E(h)$ est simple et c 'est la seule valeur propre dans un intervalle $[h E(h) - h^{N_1}, h E(h) + h^{N_1}]$), et si Ω est un voisinage de x_o vérifiant (H), alors la fonction propre correspondante est de la forme $u(x, h) = h^{-\eta/4} b(x, h) e^{-\varphi(x)/h}$ dans Ω , où $b \in S_{1/2}^{m, k}(\Omega)$, $m = k/2$.

La première partie de ce théorème est essentiellement due à B. Simon [10]. Pour montrer cette partie on n'a pas besoin de développements BKW aussi raffinés, on peut se débrouiller avec des fonctions d'Hermitte auxquelles on applique un changement d'échelle : $x = h^{1/2} y$. On discute ici seulement la démonstration de la deuxième partie, car elle fait de

nouveau intervenir des inégalités L^2 avec poids. Soit $h^{-\eta/4} a(x,h) e^{-\varphi(x)/h}$, $x \in \Omega$, la fonction propre asymptotique normalisée, associée à $h E(h)$, donnée par la proposition 3.2. Si $u(x,h)$ est la vraie fonction propre normalisée, on montre alors d'abord que $v = u - h^{-\eta/4} a e^{-\varphi/h} = \mathcal{O}(h^\infty)$ dans L^2 avec toutes ses dérivées. Puisque v est déjà exponentiellement petit en dehors de x_0 , cela ne dit rien de nouveau en dehors de x_0 . Nous savons grosso modo que

$$(3.9) \quad (P-h E)v = \mathcal{O}(h^\infty) e^{-\varphi(x)/h}, \quad v = \mathcal{O}(h^\infty),$$

et nous voulons en déduire que $v = \mathcal{O}(h^\infty) e^{-\varphi/h}$ dans Ω (et uniformément sur tout compact).

Avec $C_0 \gg E_0$, soit \tilde{d} la distance associée à $\max(V - C_0 h, 0) dx^2$. Alors on montre que $0 \leq d(x,y) - \tilde{d}(x,y) \leq \text{const. } h \log 1/h$. Soit $\tilde{\varphi}(x) = \tilde{d}(U_0, x)$. Alors dans la région où $V - C_0 h \geq 0$, on a $(\nabla \tilde{\varphi}(x))^2 \leq V - C_0 h$, donc $V - hE - (\nabla \tilde{\varphi})^2 \geq h$. Par des inégalités L^2 avec poids on montre alors que $e^{\tilde{\varphi}/h} u$, $e^{\tilde{\varphi}/h} \nabla u$ sont à croissance tempérée dans $L^2(M_0)$. La même conclusion vaut alors pour $e^{\varphi/h} u$, $e^{\varphi/h} \nabla u$ et $e^{\varphi/h} v$, $e^{\varphi/h} \nabla v$.

Soit K un compact dans Ω et $\hat{K} \subset \Omega$ la réunion des géodésiques minimales de x_0 aux différents points de K . Soit $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$ égale à 1 dans un voisinage de \hat{K} . Pour $N \in \mathbb{N}$, considérons la fonction

$$\varphi_N(x) = \min(\tilde{d}(U_0, x) + N h \log \frac{1}{h}, \min_{y \in \text{supp} \nabla \chi} \varphi(y) + \tilde{d}(y, x)).$$

On a encore $V - hE - (\nabla \varphi_N)^2 \geq h$ dans la région $V - C_0 h \geq 0$, et pour chaque N , on a pour h suffisamment petit : $\varphi_N(x) = \tilde{d}(U_0, x) + N h \log \frac{1}{h}$ pour tout $x \in K$. On peut de nouveau appliquer des inégalités L^2 avec poids pour con-

clure que $e^{\varphi_N/h} \chi_V, e^{\varphi_N/h} \nabla(\chi_V) = \mathcal{O}(h^{-N_0})$ dans L^2 , où N_0 est indépendant de N . Donc $e^{\tilde{\varphi}/h} v, e^{\tilde{\varphi}/h} \nabla v = \mathcal{O}(h^{N-N_0})$ dans $L^2(K)$. Variant K, N on trouve à l'aide des inégalités a priori simples, que $v = \mathcal{O}(h^\infty) e^{-\varphi/h}$ uniformément sur tout compact de Ω , et de même pour toutes les dérivées de v .

Pour discuter le développement asymptotique des coefficients d'interaction, on peut d'abord noter le résultat élémentaire suivant : si $x_1 \in M_0$ et si on a une géodésique minimale $\gamma \subset M_0$, qui relie x_0 à x_1 , alors il existe un ouvert Ω vérifiant (H) et qui contient $\gamma \setminus \{x_1\}$.

Revenons maintenant à la situation avec plusieurs puits et supposons que tous les puits soient des minima non-dégénérés de V , et que pour $j_0 \neq k_0$ fixés, $P_{M_{j_0}}$ et $P_{M_{k_0}}$ admettent des valeurs propres asymptotiquement simples $\lambda_{j_0} \equiv \lambda_{k_0} \equiv h E(h) \pmod{\mathcal{O}(h^\infty)}$. Supposons aussi que $d(U_{j_0}, U_{k_0}) < d(U_{j_0}, U_{j_0}) + d(U_{j_0}, U_{k_0})$ pour tout $v \notin \{j_0, k_0\}$.

La contribution essentielle (c.a.d. modulo $\mathcal{O}(\exp(-(d(U_{j_0}, U_{k_0}) + \varepsilon_0)/h))$ pour un $\varepsilon_0 > 0$) à l'intégrale définissant w_{j_0, k_0} (dans la matrice d'interaction) vient d'un voisinage arbitrairement petit des géodésiques minimales de U_{j_0} à U_{k_0} . Si γ est une telle géodésique, alors dans un voisinage de $\gamma \cap \text{supp } \nabla \chi_{k_0}$, on a des descriptions B.K.W pour φ_{j_0} et φ_{k_0} . Donc, on obtient w_{j_0, k_0} modulo $\mathcal{O}(h^\infty \exp - d(U_{j_0}, U_{k_0})/h)$ comme "une intégrale d'une fonction BKW".

Si l'on suppose en plus, que l'on n'a qu'un nombre fini de géodésiques minimales de U_{j_0} à U_{k_0} et que chaque géodésique γ est non-dégénérée, (c.a.d. que si Γ est une hypersurface qui coupe la géodésique γ transversalement en un point $x_0 \notin \{U_{j_0}, U_{k_0}\}$, alors $\Gamma \ni x \mapsto d(U_{j_0}, x) + d(x, U_{k_0})$

a un minimum non-dégénéré en x_0), alors w_{j_0, k_0} se développe à l'aide de la méthode de la phase stationnaire, et on trouve :

$$w_{j_0, k_0} = b(h) e^{-d(U_{j_0}, U_{k_0})/h}, \quad b \sim h^m \sum_{\substack{\nu=0 \\ (\nu \in \frac{1}{2}\mathbb{N})}}^{\infty} b_\nu h^\nu.$$

Si $h E(h)$ est la plus petite valeur propre asymptotique pour $P_{M_{j_0}}$ et $P_{M_{k_0}}$, alors les demi-puissances disparaissent dans la somme asymptotique, $m = 1/2$ et $b_0 < 0$. Dans cette situation, même si l'on supprime l'hypothèse sur l'ensemble des géodésiques minimales de U_{j_0} à U_{k_0} , on trouve une minoration

$$(3.10) \quad |w_{j_0, k_0}| \geq \frac{1}{C_0} h^{1/2} e^{-d(U_{j_0}, U_{k_0})/h}.$$

(On a aussi "trivialement" une majoration du même type avec une autre puissance de h). Comme déjà mentionné à la fin de la section 2, ceci donne une amélioration d'un résultat de B. Simon [2]. Récemment, A. Martinez [11] a montré que cette minoration reste valable si l'on fait une hypothèse de symétrie sur le potentiel p. ex que $M = \mathbb{R}^n$, $V(x', x_n) = V(x', -x_n)$ et que U_{k_0} s'obtient de U_{j_0} par réflexion par rapport à l'hyperplan $x_n = 0$. (On s'arrange alors bien évidemment pour que $\lambda_{k_0} = \lambda_{j_0}$). Ce résultat est moins évident à cause des annulations qui peuvent se présenter dans les symboles des différentes fonctions propres.

4 - LE COMPLEXE DE WITTEN (voir [12])

Il se trouve que les techniques développées ci-dessus s'appliquent dans le contexte d'un article très intéressant de E. Witten [13] qui propose d'utiliser des méthodes semi classiques pour l'étude des problèmes topologiques. Nous remercions L. Boutet de Monvel et G. Henniart pour l'introduction à ce sujet.

Soit M une variété riemannienne orientée de dimension n . L'idée fondamentale de Witten est alors de remplacer le complexe de De Rham : d par un complexe conjugué $d_f = e^{-f/h} \tilde{d} e^{f/h}$, où $\tilde{d} = h d$ et où $f \in C^\infty(M; \mathbb{R})$ est une fonction de Morse (c.a.d. que les points critiques sont non-dégénérés). Les complexes d et d_f ont alors les mêmes groupes de cohomologie.

Soit : $d_f^{(\ell)} = e^{-f/h} \tilde{d}^{(\ell)} e^{f/h} : C^\infty(M; \Lambda^\ell T^*M) \rightarrow C^\infty(M; \Lambda^{\ell+1} T^*M)$,

et $d_f^{(\ell)*} : \quad - \quad - \quad \leftarrow \quad - \quad -$

son adjoint pour le produit scalaire naturel. On introduit alors le Laplacien associé

$$(4.1) \quad P^{(\ell)} = d_f d_f^* + d_f^* d_f = -h^2 \Delta^{(\ell)} + ||df||^2 + h(\mathcal{L}_{\nabla f} + \mathcal{L}_{\nabla f}^*),$$

où $\Delta^{(\ell)} = -(d d^* + d^* d)$ est le Laplacien de Hodge, et où $\mathcal{L}_{\nabla f}$ désigne la dérivation de Lie le long du champ gradient de f , et $\mathcal{L}_{\nabla f}^*$ est son adjoint. Ainsi le dernier terme de (4.1) est une matrice C^∞ . L'opérateur $P^{(\ell)}$ ressemble donc beaucoup à un opérateur de Schrödinger semi-classique scalaire et il se trouve que toute l'analyse du cas scalaire s'applique, si l'on veut étudier le spectre de $P^{(\ell)}$ dans un intervalle $[0, \epsilon_0^h]$. (On veut en particulier déterminer le nombre de valeurs propres nulles, car ce nombre décrit la dimension du $\ell^{\text{ième}}$ groupe de cohomologie de M , à coefficients réels). Les puits sont alors ponctuels et non-dégénérés comme dans la section précédente; ce sont les points critiques U_1, \dots, U_N de f . Rappelons qu'un point critique U de f est d'indice $\ell \in \{0, 1, \dots, n\}$, si $f''(U)$ admet ℓ valeurs propres < 0 .

Soit $C^{(\ell)} = \{k; U_k \text{ est d'indice } \ell\}$. Si $\epsilon_0 > 0$ est suffisamment petit et si l'on étudie les valeurs propres BKW formelles de $P^{(\ell)}$ dans

$[0, \varepsilon_0 h]$ associées à un puits U_k , on trouve :

1°) Si U_k est d'indice ℓ , alors on a une telle valeur propre qui est unique et $= \mathcal{O}(h^2)$;

2°) Si U_k n'est pas d'indice ℓ , alors on n'a pas de valeurs propres BKW de $P^{(\ell)}$ dans $[0, \varepsilon_0 h]$. (U_k est non-résonnant pour $P^{(\ell)}$. Voir aussi la section 5).

Il est donc naturel d'introduire pour chaque $k \in C^{(\ell)}$

$$M_k = M \setminus \bigcup_{j \in C^{(\ell)} \setminus \{k\}} B(U_j, \eta) , \quad \eta > 0 \text{ petit}$$

Soit $P_{M_k}^{(\ell)}$ la réalisation de Dirichlet correspondante. On montre alors si $\varepsilon_0 > 0$ est assez petit :

PROPOSITION 4.1

$P_{M_k}^{(\ell)}$ admet une seule valeur propre $\mu_k^{(\ell)}$ dans $[0, \varepsilon_0 h]$. On a $\mu_k^{(\ell)} = \mathcal{O}(h)^2$, et si $\varphi_k = \varphi_k^{(\ell)}$ est la fonction propre normalisée associée, on a : $\varphi_k = \widehat{\mathcal{O}}(e^{-d(x, U_k)/h})$ uniformément et de même pour toutes les dérivées. De plus, on a la forme BKW : $\varphi_k^{(\ell)} = e^{-d(U_k, x)/h} a_k(x, h)$, a_k = symbole classique, valable près des points de M_k° que l'on peut joindre à U_k par une géodésique minimale unique, qui en plus est non-dégénérée et qui reste dans M_k° .

Les inégalités L^2 à poids ne donnent pas directement la décroissance exponentielle indiquée pour φ_k , à cause des autres puits dans M_k (qui ne sont pas de classe $C^{(\ell)}$). Près de ces puits il faut écrire d'autres types d'inégalités. (Voir aussi la section 5).

Comme l'affirme Witten et l'a vérifié Melrose, des calculs directs montrent que $\mu_k^{(\ell)} = \mathcal{O}(h^\infty)$. Montrons par un argument indirect que $\mu_k^{(\ell)}$ est exponentiellement petit : puisque $P^{(\ell+1)} d_f = d_f P^{(\ell)}$, nous avons :

$$(4.2) \quad P^{(\ell+1)} d_f \varphi_k^{(\ell)} = \mu_k^{(\ell)} d_f \varphi_k^{(\ell)},$$

et puisque l'on sait aussi que : $d_f \varphi_k = \tilde{\mathcal{O}}(e^{-d(U_k, x)/h})$ ainsi que toutes ses dérivées, et que seuls les puits de classe $C^{(\ell+1)}$ sont résonnants pour $P^{(\ell+1)}$, on peut montrer que :

$$(4.3) \quad d_f \varphi_k^{(\ell)} = \tilde{\mathcal{O}}(e^{-a_k(x)/h}),$$

et de même pour toutes ses dérivées, où

$$a_k(x) = \min_{j \in C^{(\ell+1)} \cup (C^{(\ell)} \setminus \{k\})} d(U_k, U_j) + d(U_j, x).$$

De même, on montre que :

$$(4.4) \quad d_f^* \varphi_k^{(\ell)} = \tilde{\mathcal{O}}(e^{-b_k(x)/h}),$$

où
$$b_k(x) = \min_{j \in C^{(\ell-1)} \cup (C^{(\ell)} \setminus \{k\})} d(U_k, U_j) + d(U_j, x).$$

De (4.3) et (4.4) on obtient :

$$(4.5) \quad P^{(\ell)} \varphi_k^{(\ell)} = \tilde{\mathcal{O}}(e^{-\min(a_k(x), b_k(x))/h}),$$

et puisque $\varphi_k^{(\ell)}$ est concentrée essentiellement en U_k et $P^{(\ell)} \varphi_k^{(\ell)} = \mu_k^{(\ell)} d_k^{(\ell)}$ on en déduit que :

$$(4.6) \quad \mu_k^{(\ell)} = \tilde{\mathcal{O}}(e^{-C_k/h}),$$

où
$$C_k = 2 \min_{j \in C^{(\ell-1)} \cup C^{(\ell+1)} \cup (C^{(\ell)} \setminus \{k\})} d(U_k, U_j).$$

Soit $\theta_j \in C_0^\infty(B(U_j, 2\eta))$ égale à 1 près de $\overline{B(U_j, \eta)}$. Avec $\chi_k = 1 - \sum_{j \in C^{(\ell)} \setminus \{k\}} \theta_j$, on pose $\psi_k^{(\ell)} = \chi_k \varphi_k^{(\ell)}$. Soit $E^{(\ell)} \subset L^2(M)$ l'espace engendré par les $\psi_k^{(\ell)}$, $k \in C^{(\ell)}$. Comme dans le cas scalaire, on montre alors que $[0, \varepsilon_0 h]$ contient exactement $\# C^{(\ell)}$ valeurs propres de $P^{(\ell)}$ et qui sont de plus exponentiellement petites. Si $F^{(\ell)}$ est l'espace correspondant, on montre aussi que $\text{dist}(F^{(\ell)}, E^{(\ell)})$ est exponentiellement petit.

Puisque $d_f P^{(\ell)} = P^{(\ell+1)} d_f$, $d_f^* P^{(\ell+1)} = P^{(\ell)} d_f^*$, on a $d_f : F^{(\ell)} \rightarrow F^{(\ell+1)}$, $d_f^* : F^{(\ell+1)} \rightarrow F^{(\ell)}$ et donc le complexe d_f se décompose en deux complexes :

$$(1) \quad F^{(\ell-1)} \rightarrow F^{(\ell)} \rightarrow F^{(\ell+1)} \quad \text{et}$$

$$(2) \quad F^{(\ell-1)\perp} \rightarrow F^{(\ell)\perp} \rightarrow F^{(\ell+1)\perp}.$$

(On escamote ici des problèmes de domaine qui ne posent aucune difficulté sérieuse). Ici le complexe (2) est exact, puisque $P^{(\ell)}$ est inversible dans $F^{(\ell)\perp}$ et donc la cohomologie de M est donnée par la cohomologie de (1). Connaissant aussi la dimension des espaces $F^{(\ell)}$, on obtient les inégalités de Morse. (Toute l'analyse ci-dessus n'est pas nécessaire, si l'on se contente de démontrer les inégalités de Morse. Des preuves rigoureuses des inégalités de Morse selon l'idée de Witten, ont été données par B. Simon [10], L. Boutet de Monvel, R. Melrose (non publié), voir aussi Henniart [14], J.M. Bismut [15] ont aussi démontré selon les idées de Witten, les inégalités de Bott, que l'on obtient si l'on remplace les points critiques isolés par des sous variétés critiques).

Soit $e_k^{(\ell)}$, $k \in C^{(\ell)}$ l'orthonormalisation de la base $\Pi_{F^{(\ell)}} \psi_k^{(\ell)}$, $k \in C^{(\ell)}$ de $F^{(\ell)}$. On montre alors que :

$$(4.7) \quad e_k^{(\ell)} - \psi_k^{(\ell)} = \tilde{\mathcal{G}}(e_k^{-d_k^{(\ell)}(x)/h}),$$

$$\text{où } d_k^{(\ell)}(x) = \min_{j \in C^{(\ell)} \setminus \{k\}} d(U_k, U_j) + d(U_j, x).$$

Soit $\mathcal{N} = \mathcal{N}^{(\ell)} = -n_{j,k}^{(\ell)}$ la matrice de $d_f : F^{(\ell)} \rightarrow F^{(\ell+1)}$

pour les bases $\{e_k^{(\ell)}\}$ et $\{e_j^{(\ell+1)}\}$. Alors $n_{j,k}^{(\ell)} = (e_j^{(\ell+1)} |_{d_f} e_k^{(\ell)}) =$

$(d_f^* e_j^{(\ell+1)} |_{e_k^{(\ell)}})$. Soit $\chi_{j,k} \in C^\infty(M)$ avec $\chi_{j,k}(x) = 1$ dans

$B(U_j, \frac{1}{2} d(U_j, U_k) - \eta)$, $\chi_{j,k}(x) = 0$ dans $B(U_k, \frac{1}{2} d(U_j, U_k) - \frac{1}{2})$. Si

$$\mathcal{A} = -((\Psi_j^{(\ell+1)} |_{\tilde{d}} \chi_{j,k} \wedge \chi_k^{(\ell)})),$$

on démontre à l'aide des mêmes types d'arguments que dans le cas scalaire :

THEOREME 4.2

$$\text{On a } \mathcal{N} = \mathcal{A} + \tilde{\mathcal{G}}(\mathcal{D}'_{\ell+1} \circ \mathcal{D}_{\ell+1,\ell} + \mathcal{D}_{\ell+1,\ell} \circ \mathcal{D}'_{\ell} + \tilde{\mathcal{D}}_{\ell+1,\ell}), \text{ où}$$

$$\mathcal{D}'_{\ell} = ((1 - \delta_{j,k}) e^{-d(U_j, U_k)/h})_{j,k \in C^{(\ell)}},$$

$$\mathcal{D}_{\ell+1,\ell} = (e^{-d(U_j, U_k)/h})_{\substack{j \in C^{(\ell+1)} \\ k \in C^{(\ell)}}}, \quad \tilde{\mathcal{D}}_{\ell+1,\ell} = (e^{-2d(U_j, U_k)/h})_{\substack{j \in C^{(\ell+1)} \\ k \in C^{(\ell)}}}$$

Pour rendre ce résultat plus explicite, on va introduire quelques hypothèses génériques, mais on commence par quelques remarques générales sur la géométrie :

Si $x, y \in M$ alors $|f(x) - f(y)| \leq d(x, y)$ et on a $f(x) - f(y) = d(x, y)$ ssi il existe une courbe intégrale pour ∇f de y à x . (On admet que ces courbes intégrales passent par des points critiques, et dans ce cas il faut

un temps infini pour aller de y à x). Si $f(x) - f(y) = d(x,y)$, alors les géodésiques minimales (généralisées de la même manière que les courbes intégrales de ∇f) de y à x sont alors exactement ces courbes intégrales (à reparamétrisation près).

Si $U_k^{(\ell)}$ est un point critique d'indice ℓ , alors dans un voisinage de $U_k^{(\ell)}$, nous avons les variétés stables sortantes et rentrantes pour ∇f : V_k^+ , V_k^- de dimension $n-\ell$ et ℓ respectivement. (V_k^+ est donné par $f(x) - f(U_k) = d(x, U_k)$, V_k^- par $f(x) - f(U_k) = -d(x, U_k)$). On globalise la définition de V_k^+ et V_k^- en rajoutant toute courbe intégrale à temps fini ≥ 0 de ∇f et $-\nabla f$ partant de V_k^+ et V_k^- respectivement.

Soient U_j et U_k des points critiques avec $f(U_j) - f(U_k) = d(U_j, U_k)$, et soit γ une géodésique minimale de U_k à U_j . Si γ ne rencontre pas d'autres points critiques, alors γ est contenue dans l'intersection $V_k^+ \cap V_j^-$. Génériquement cette intersection est vide si on n'a pas $\dim V_k^+ + \dim V_j^- \geq n+1$, c.a.d. si $n - \text{ind}(U_k) + \text{ind}(U_j) \geq n+1$, $\text{ind}(U_j) \geq \text{ind}(U_k) + 1$. D'où notre première hypothèse (générique)

(H₁) Si $f(U_j) - f(U_k) = d(U_j, U_k)$, alors $\text{ind}(U_j) \geq \text{ind} U_k + 1$.

Soient alors $U_k^{(\ell)}$ et $U_j^{(\ell+1)}$ d'indice ℓ et $\ell+1$ respectivement et tels que $f(U_j) - f(U_k) = d(U_j, U_k)$. Alors d'après (H₁) il est clair que les géodésiques minimales de $U_k^{(\ell)}$ à $U_j^{(\ell+1)}$ ne rencontrent pas d'autres puits, et sont donc contenues dans $V_k^+ \cap V_j^-$:

(H₂) si U_k et U_j sont d'indice ℓ et $\ell+1$ respectivement et si $f(U_j) - f(U_k) = d(U_k, U_j)$, alors il n'y a qu'un nombre fini de géodésiques minimales de U_k à U_j , et V_k^+ et V_j^- se coupent transversalement le long de chacune d'elles.

Le théorème 4.2 et (H₁) entraînent qu'il existe ε₀ > 0 tel que

(a) Si $f(U_j^{(\ell+1)}) - f(U_k^{(\ell)}) < d(U_k^{(\ell)}, U_j^{(\ell+1)})$, alors

$$n_{j,k}^{(\ell)} = \mathcal{O}(e^{-(\varepsilon_0 + f(U_j^{(\ell+1)}) - f(U_k^{(\ell)}))/h}).$$

(b) Si $f(U_j^{(\ell+1)}) - f(U_k^{(\ell)}) = d(U_k^{(\ell)}, U_j^{(\ell+1)})$, alors

$$n_{j,k}^{(\ell)} = -(\Psi_j^{(\ell+1)} | \overset{\vee}{d} \chi_{j,k} \wedge \Psi_k^{(\ell)}) + \mathcal{O}(e^{-(\varepsilon_0 + f(U_j^{(\ell+1)}) - f(U_k^{(\ell)}))/h}).$$

L'hypothèse (H₂) entraîne ensuite que dans le cas (b), on peut calculer $-(\Psi_j^{(\ell+1)} | \overset{\vee}{d} \chi_{j,k} \wedge \Psi_k^{(\ell)})$ à l'aide de la méthode de la phase stationnaire. En utilisant diverses astuces (bons choix de coordonnées etc.) on trouve dans le cas (b) :

$$(4.8) \quad -(\Psi_j^{(\ell+1)} | \overset{\vee}{d} \chi_{j,k} \wedge \Psi_k^{(\ell)}) = \frac{\Lambda_k^{(\ell)}}{\Lambda_j^{(\ell+1)}} e^{-(f(U_j^{(\ell+1)}) - f(U_k^{(\ell)}))/h} \left(\frac{h}{\Pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{\substack{\gamma = \text{géodésique} \\ \text{min. de } U_k^{(\ell)} \text{ à } U_j^{(\ell+1)}}} \mathcal{H}(\gamma) + \mathcal{O}(h) \right]$$

$$\text{Ici } \Lambda_k^{(\ell)} = \left(\frac{|\lambda_{\ell+1}^{(k)}| \dots |\lambda_n^{(k)}|}{|\lambda_1^{(k)}| \dots |\lambda_\ell^{(k)}|} \right)^{\frac{1}{4}} \quad \text{où } \lambda_1^{(k)} \leq \dots \leq \lambda_\ell^{(k)} < 0 < \lambda_{\ell+1}^{(k)} \leq \dots \leq \lambda_n^{(k)}$$

sont les valeurs propres de $\nabla^2 f(U_k^{(\ell)})$. $\mathcal{H}(\gamma) = \pm 1$ est un indice d'intersection déterminé par V_k^+ , V_j^- , γ et un choix d'orientation sur les V_j^- .

$$\text{Soit } \beta_{j,k}^{(\ell)} = \begin{cases} \sum \mathcal{H}(\gamma) & \text{si } f(U_j^{(\ell+1)}) - f(U_k^{(\ell)}) = d(U_k^{(\ell)}, U_j^{(\ell+1)}) \\ 0 & \text{si } - " - < - " - \end{cases}$$

$$\text{Alors } \left(\frac{\Pi}{h}\right)^{\frac{1}{2}} e^{(f(U_j^{(\ell+1)}) - f(U_k^{(\ell)}))/h} \frac{\Lambda_j^{(\ell+1)}}{\Lambda_k^{(\ell)}} n_{j,k}^{(\ell)} \rightarrow \beta_{j,k}^{(\ell)}, \quad h \rightarrow 0.$$

Ceci prouve que, $\rightarrow \mathbb{C}^{\#C^{(\ell-1)}} \xrightarrow{\beta^{(\ell-1)}} \mathbb{C}^{\#C^{(\ell)}} \xrightarrow{\rho^{(\ell)}}$ est un complexe et que $\dim H^{(\ell)}(M) \leq \dim(\text{Ker } \beta^{(\ell)} / \text{Im } \beta^{(\ell-1)})$. On a donc montré une moitié du théorème suivant :

THEOREME 4.3 :

$$\dim H^{(\ell)}(M) = \dim (\text{Ker } \beta^{(\ell)} / \text{Im } \beta^{(\ell-1)}).$$

(Witten ne prétend pas démontrer ce théorème, qui semble pourtant bien connu par les topologues. R. Bott nous a communiqué l'existence d'une démonstration rédigée récemment, même pour la cohomologie à coefficients dans \mathbb{Z} par Goodwillie).

Il s'agit donc de montrer aussi l'autre moitié. Pour y arriver on cherche d'abord à améliorer le calcul de $n_{j,k}^{(\ell)}$: si f et la métrique de M dépendent de manière C^∞ d'un paramètre t , on montre d'abord que :

$$(4.9) \quad \frac{d}{dt} N^{(\ell)} = A^{(\ell+1)} N^{(\ell)} - N^{(\ell)} A^{(\ell)},$$

$$\text{où } A^{(\ell)} = (T^{(\ell)} + \frac{1}{2} D^{(\ell)}) + (\frac{1}{2} D^{(\ell)} - \frac{1}{h} G^{(\ell)}),$$

$$T^{(\ell)} = ((\partial_t e_j^{(\ell)} | e_k^{(\ell)})) = \tilde{\mathcal{G}}(I + \mathcal{D}'_\ell),$$

$$G^{(\ell)} = ((e_j^{(\ell)} | \partial_t f e_k^{(\ell)})) = \tilde{\mathcal{G}}(I + \mathcal{D}'_\ell)$$

$$D^{(\ell)} = ([e_j^{(\ell)} | e_k^{(\ell)}]) , [|] = \frac{d}{dt} (|).$$

On se restreint aux déformations qui conservent les points critiques, les valeurs critiques et les hypothèses (H_1) et (H_2) . On a

$$A^{(\ell)} = \text{diag } (m_k^{(\ell)}) + \tilde{\mathcal{G}}(\mathcal{D}'_\ell), \text{ où } m_k^{(\ell)} \text{ est un symbole classique d'ordre } 0,$$

et on obtient :

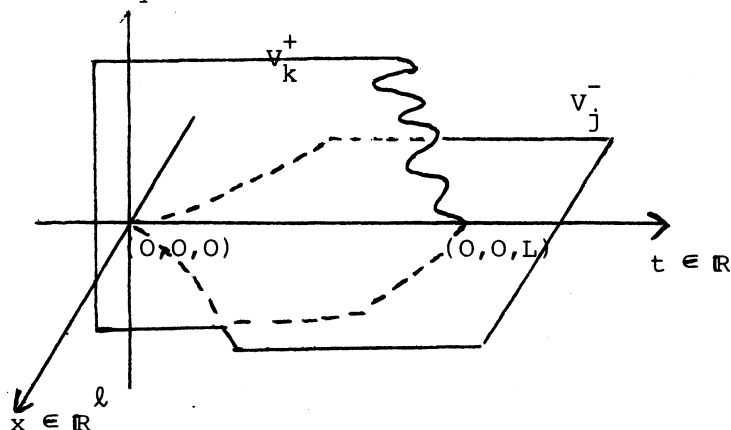
$$(4.10) \quad \frac{d}{dt} N^{(\ell)} = \text{diag} (m_j^{(\ell+1)}) N^{(\ell)} - N^{(\ell)} \text{diag} (m_k^{(\ell)}) + \mathcal{O}(\mathcal{D}'_{\ell+1} \mathcal{D}_{\ell+1,\ell} + \mathcal{D}_{\ell+1,\ell} \mathcal{D}'_{\ell}).$$

Donc, quand on varie t , le coefficient $n_{j,k}^{(\ell)}$ change essentiellement par une conjugaison :

$$n_{j,k}^{(\ell)}(s) \mapsto h_{j,k}^{(\ell)}(t) \sim e^{\int_s^t m_j^{(\ell+1)}(\sigma) d\sigma} n_{j,k}^{(\ell)}(s) e^{-\int_s^t m_k^{(\ell)}(\sigma) d\sigma}.$$

On montre ensuite que l'on peut déformer f et la métrique de telle manière qu'après la déformation, pour tout γ qui intervient dans le cas (b), (4.8), il existe une isométrie d'un voisinage tubulaire de γ en \mathbb{R}^n :

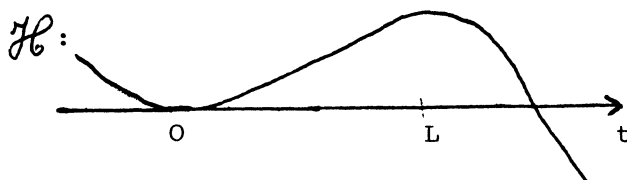
\mathbb{R}^n : $y \in \mathbb{R}^{n-\ell-1}$



$$f = \mathcal{H}(t) + \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2}$$

$$U_k^{(\ell)} = (0,0,0)$$

$$U_j^{(\ell+1)} = (0,0,L)$$



Dans ce cas déformé on fait facilement des calculs assez explicites, et revenant ensuite dans la situation non-déformée, on trouve :

$$(4.11) \quad n_{j,k}^{(\ell)} = \frac{a_k^{(\ell)}(h) e^{f(U_k^{(\ell)})/h}}{a_j^{(\ell+1)}(h) e^{f(U_j^{(\ell+1)})/h}} \beta_{j,k}^{(\ell)} + \mathcal{O}(e^{-(\epsilon_0 + f(U_j^{(\ell+1)}) - f(U_k^{(\ell)}))/h})$$

où $a_k^{(\ell)}$ est un symbole elliptique classique d'ordre $\ell/2$ en $\frac{1}{h}$.

$$\text{Avec } \gamma_{j,k}^{(\ell)} = \frac{a_j^{(\ell)} e^{f(U_j^{(\ell+1)})/h}}{a_k^{(\ell)} e^{f(U_k^{(\ell)})/h}} n_{j,k}^{(\ell)}, \text{ on sait donc que } \gamma_{j,k}^{(\ell)} \rightarrow \beta_{j,k}^{(\ell)}$$

exponentiellement vite quand $h \rightarrow 0$) (et avec une vitesse que l'on peut minorer indépendamment de η quand $\eta > 0$ est assez petit). Soit $\xi \in \mathbb{C}^{\#C^{(\ell)}}$ un vecteur normalisé dans le noyau de $\beta^{(\ell)*} \beta^{(\ell)} + \beta^{(\ell-1)} \beta^{(\ell-1)*}$ (qui a la même dimension que $\text{Ker } \beta^{(\ell)} / \text{Im } \beta^{(\ell-1)}$). Alors $\gamma^{(\ell)} \xi, \gamma^{(\ell-1)*} \xi = \mathcal{O}(e^{-\epsilon_0/h})$. Soit

$$w^{(\ell)} = \sum \frac{\xi_k}{a_k^{(\ell)}} e^{(f(x)-f(U_k^{(\ell)}))/h} e_k^{(\ell)}.$$

Puisque $d = \frac{1}{h} e^{f/h} d_f e^{-f/h}$ et $e^{(f(x)-f(U_k^{(\ell)}))/h} e_k^{(\ell)} = \tilde{\mathcal{O}}(1)$, on trouve $w^{(\ell)} = \tilde{\mathcal{O}}(1), d w^{(\ell)} = \mathcal{O}(e^{-\epsilon_0/h})$. Corrigeant par un terme exponentiellement petit, on trouve une forme

$$u^{(\ell)} = \sum \frac{\xi_k}{a_k^{(\ell)}} e^{(f(x)-f(U_k^{(\ell)}))/h} e_k^{(\ell)} + \mathcal{O}(e^{-\epsilon_0/h})$$

avec $d u^{(\ell)} = 0$.

De même on fabrique

$$v^{(\ell)} = \sum \xi_k a_k^{(\ell)} e^{-(f(x)-f(U_k^{(\ell)}))/h} e_k^{(\ell)} + \mathcal{O}(e^{-\epsilon_0/h}),$$

avec $d^* v^{(\ell)} = 0$.

Maintenant, on voit que $(e^{(f-f(U_k^{(\ell)}))/h} e_k^{(\ell)} | e^{-(f-f(U_m^{(\ell)}))/h} e_m^{(\ell)}) = \mathcal{O}(e^{-\epsilon_0/h})$ si $m \neq k$, et donc

$$\begin{aligned}
 (u^{(\ell)} | \tilde{u}^{(\ell)}) &= \sum_{k \in C^{(\ell)}} \xi_k^2 (e^{(f-f(U_k^{(\ell)}))/h} | e^{(f-f(U_k^{(\ell)}))/h}) \\
 &\quad + \mathcal{O}(e^{-\epsilon_0/h}) \\
 &= \sum_{k \in C^{(\ell)}} \xi_k^2 (e_k^{(\ell)} | e_k^{(\ell)}) + \mathcal{O}(e^{-\epsilon_0/h}) \\
 &\leq 1 + \mathcal{O}(e^{-\epsilon_0/h})
 \end{aligned}$$

Si $u^{(\ell)} = d \omega^{(\ell-1)}$, on aurait $(u^{(\ell)} | \tilde{u}^{(\ell)}) = (\omega^{(\ell-1)} | d^* \tilde{u}^{(\ell)}) = 0$, donc $u^{(\ell)}$ est fermée mais pas exacte.

On peut voir que $u^{(\ell)}$ se construit de manière linéaire à partir de ξ . On fabrique ainsi un espace $L \subset \text{Ker } d^{(\ell)}$ avec $\dim L = \dim(\text{Ker } \beta^{(\ell)} / \text{Im } \beta^{(\ell-1)})$, $L \cap \text{Im } d^{(\ell-1)} = 0$. Donc $\dim H^{(\ell)}(M) \geq \dim(\text{Ker } \beta^{(\ell)} / \text{Im } \beta^{(\ell-1)})$, ce qui termine la démonstration du théorème 4.3.

5 - D'AUTRES RESULTATS

On se contente de mentionner quelques autres résultats.

1 - Perturbations

Il s'agit d'étudier l'effet d'une perturbation de V sur les valeurs propres, en partant par exemple d'une situation symétrique. Dans [4] (voir aussi [16] pour un résumé), nous avons montré que cet effet peut être systématiquement étudié à l'aide d'une "matrice de perturbation" et nous avons étudié quelques exemples inspirés du travail de Jona-Lasinio, Martinelli, Scoppola [6]. Le même problème a été considéré par B. Simon [17].

2 - Puits non résonnants

Dans la situation générale décrite dans la section 2, il se peut que seulement les puits U_j , $j = 1, \dots, \tilde{N} < N$ soient résonnants c.a.d. aient la propriété que $\sigma(P_{M_j}) \cap I(h) \neq \emptyset$. Il est alors possible que

$\hat{W} = \mathcal{O}(\mathcal{D}'^2 + \mathcal{D}'^3)$ dans le théorème 2.1. Pour étudier quand même l'interaction des puits résonnants, on définit pour $1 \leq j \leq \tilde{N}$:

$\tilde{M}_j = M \setminus \bigcup_{j \neq k \leq \tilde{N}} B(U_k, \eta)$ et on montre sans difficulté un théorème analogue au théorème 2.1, qui ne fait intervenir que les puits résonnants. Pour analyser concrètement cette nouvelle matrice dans le cas des puits ponctuels non-dégénérés on rencontre des difficultés nouvelles qui mènent à des considérations BKW bien plus poussées que celles de la section 3. Voir [18] et aussi [16] pour un résumé.

3 - Puits sous variétés

Motivés par Witten [13] nous avons dans [19] étudié le cas où $V \geq 0$ s'annule à l'ordre 2 exactement sur une sous variété Γ . (Voir aussi Bismut [15]). Avec des hypothèses convenables on a alors un phénomène de "mini-puits" qui sont des points de Γ , une distance d'Agmon modifiée sur Γ et on peut de nouveau (par des considérations BKW modifiées) étudier l'interaction entre ces mini-puits, au moins pour les basses valeurs propres. Cette interaction est maintenant plus forte ; de l'ordre de $\exp - C/h^{1/2}$. L'existence de ce type de phénomène nous a été indiquée par A. Voros et nous avons profité de discussions avec B. Simon sur ce sujet. On trouvera un résumé dans [20].

4 -

Les méthodes exposées ici ne sont pas limitées à l'équation de Schrödinger. Wang [21] a obtenu des résultats analogues pour l'opérateur

de Dirac. Pour chaque puits il trouve des valeurs asymptotiquement doubles, et on ne sait pas toujours si elles sont vraiment doubles.

5 - Systèmes infinis de puits

Pour des potentiels périodiques sur \mathbb{R}^n on sait par la théorie de Floquet que le spectre est absolument continu et se présente comme une réunion de bandes. B. Simon [22] et A. Outassourt [23] ont étudié (sous des hypothèses convenables) la largeur de la première bande. Outassourt obtient un développement asymptotique complet et il a aussi étudié l'effet d'une perturbation du potentiel à support compact, qui produit des valeurs propres discrètes. Dans ce domaine, on peut encore se poser de nombreuses questions.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] : S. AGMON - Lectures on exponential decay of solutions of second order elliptic equations - Mathematical Notes 29, Princeton University Press.
- [2] : B. SIMON - Instantons, double wells and large deviations - Bull. A.M.S., 8 n° 2, March 1983, 323-326. Aussi : Semi-classical analysis of low lying eigenvalues II - Tunneling, Ann. of Math. 1984.
- [3] : B. HELFFER - J. SJÖSTRAND - Multiple wells in the semi-classical limit I. - Comm. P.D.E., 9(4) (1984), 337-408.
- [4] : B. HELFFER - J. SJÖSTRAND - Puits multiples en limite semi-classique II. Interaction moléculaire, symétries, perturbation. - Ann. Inst. Poincaré 1985.
- [5] : E.M. HARRELL - Double wells - Comm. Math. Phys. 75 (1980), 239-261.
- [6] : G. JONA-LASINIO, F. MARTINELLI, E. SCOPPOLA - New approach to the semi-classical limit of quantum mechanics I. Multiple tunnelings in one dimension. - Comm. Math. Phys. 80 (1981), 223-254.
- [7] : E.B. DAVIES - The twisting trick for double well Hamiltonians. - Comm. Math. Phys. 85 (1982), 471-479.
- [8] : J.M. COMBES - P. DUCLOS - R. SEILER - Convergent expansions for tunneling. - Comm. Math. Phys. 82 (1983), 229-245.
- [9] : J. SJÖSTRAND - Singularities analytiques microlocales. - Astérisque n° 95 (1982).
- [10] : B. SIMON - Semi-classical analysis of low lying eigenvalues I. Non-degenerate minima : asymptotic expansions. - Ann. Inst. Poincaré, 38, n° 3 (1983), 295-307.
- [11] : A. MARTINEZ - Estimations de l'effet tunnel pour le double puits.- Prépubl. Mathématiques d'Orsay (1985).

- [12] : B. HELFFER - J. SJOSTRAND - Puits multiples en mécanique semi classique IV. - Etude du complexe de Witten. - Comm. P.D.E. 10, n° 3 (1985), 245-340.
- [13] : E. WITTEN - Super symetry and Morse theory. - J. Diff. Geom., 17 (1982), 661-692.
- [14] : G. HENNIART - Les inégalités de Morse (d'après E. Witten). - Sémin. Bourbaki, 36ème année, 1983-84, n° 617.
- [15] : J.M. BISMUT - The Witten complex and the degenerate Morse inequalities. - Prépubl. Mathématiques d'Orsay (1984).
- [16] : J. SJÖSTRAND - Puits multiples (d'après des travaux avec B. Helffer). - Sémin. Goulaouic-Meyer-Schwartz, 1983-84, n° 7.
- [17] : B. SIMON - Semi-classical analysis of low lying eigenvalues III. - The flea on the elephant, J. Funct. Anal. 63(1985), 123-136.
- [18] : B. HELFFER - J. SJOSTRAND - Multiple wells in the semi-classical limit III, interaction through non-résonant wells. - Math. Nachr. à paraître.
- [19] : B. HELFFER - J. SJOSTRAND - Puits multiples en mécanique semi-classique V (étude des mini-puits). - Préprint.
- [20] : J. SJÖSTRAND - Tunnel effects for semi-classical Schrödinger operators. - A paraître dans le volume du "Work-Shop" et "Symposium" sur les équations hyperboliques et questions annexes à Katada et Kyoto Août-septembre 1984 (Fondation Taniguchi).
- [21] : X.P. WANG - Puits multiples pour l'opérateur de Dirac. - A paraître Annales de l'IHP.
- [22] : B. SIMON - Semi-classical analysis of low-lying eigenvalues III. - Width of the ground state band in strongly coupled solids, Ann. Physics, 158 (1984), 415-420.
- [23] : A. OUTASSOURT - Comportement semi-classique pour l'opérateur de Schrödinger à potentiel périodique. - Thèse 3ème cycle, Nantes, (Mai 1985). Note aux CRAS, t. 299, série I, n° 11 (1984), p. 491, plus note à paraître (1985).