

JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

JEAN GINIBRE

Théorie de la diffusion pour des équations semi linéaires

Journées Équations aux dérivées partielles, n° 2 (1985), p. 1-72

http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1985__2_A1_0

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

THEORIE DE LA DIFFUSION POUR DES

EQUATIONS SEMI LINEAIRES *

J. GINIBRE

Laboratoire de Physique Théorique **

Université de Paris-Sud, 91405 ORSAY CEDEX

* Exposés présentés aux Journées "Equations aux dérivées partielles",
SAINT JEAN-de-MONTS, 3-7 juin 1985

** Laboratoire associé au C.N.R.S.

I - INTRODUCTION

On se propose d'étudier la théorie de la diffusion pour des équations semi-linéaires du type

$$\frac{du}{dt} = K u + f_0(u) \tag{1.1}$$

où u est une fonction définie dans l'espace temps \mathbb{R}^{n+1} et à valeurs dans un espace vectoriel réel ou complexe de dimension finie, K est un opérateur différentiel linéaire indépendant du temps, opérant sur les variables d'espace, et f_0 est une fonction de u en général non linéaire, locale en temps, indépendante du temps pour simplifier, et satisfaisant $f_0(0) = 0$. Par contre, au moins au niveau des considérations abstraites présentées plus loin, on peut admettre que f_0 dépende explicitement de x (c'est le cas de l'interaction avec un potentiel dans l'équation de Schrödinger linéaire), dépende des dérivées de u (c'est le cas dans les équations de Yang-Mills) ou soit non locale dans les variables d'espace (c'est le cas de l'équation de Hartree).

Le problème est d'étudier le comportement asymptotique en temps des solutions de l'équation (1.1), et la méthode suivie consiste à comparer ce comportement à celui des solutions d'une équation de référence plus simple. On se limite ici au cas où cette équation est l'équation libre

$$\frac{du}{dt} = K u . \tag{1.2}$$

Cette équation est résolue, au moins formellement, par $u(t) = U(t) u(0)$ où U est le groupe à un paramètre $U(t) = \exp (tK)$. On peut alors scinder le problème en deux questions principales :

- 1) - Etablir l'existence de solutions dispersives de (1.1), i.e. de solutions de (1.1) qui se comportent asymptotiquement en temps comme

des solutions de (1.2). Plus précisément, pour "toute" solution de (1.2), on cherche à construire une solution de (1.1) qui lui est asymptote à $t \rightarrow +\infty$ ou $t \rightarrow -\infty$. Ce problème est équivalent à la démonstration de l'existence des opérateurs d'onde (voir définition plus loin).

2) - Montrer que "toute" solution de (1.1) se comporte comme une solution de (1.2) quand $t \rightarrow +\infty$ et comme une (autre) solution de (1.2) quand $t \rightarrow -\infty$. Cette propriété est la complétude asymptotique.

Cette formulation appelle deux remarques. D'une part, un préalable nécessaire en pratique sinon en principe à l'étude précédente est de savoir démontrer l'existence et l'unicité des solutions du problème de Cauchy global pour l'équation (1.1), et par "toute" solution de (1.1) on doit entendre toute solution obtenue par la méthode disponible de résolution de ce problème ou du moins un sous-ensemble assez grand de l'ensemble de ces solutions. D'autre part, les deux questions précédentes, n'épuisent pas le problème en général. En particulier, il peut arriver que pour décrire les comportements asymptotiques associés à une même équation (1.1), on ait besoin de plusieurs équations asymptotiques et pas seulement de (1.2). C'est le cas par exemple pour l'équation de Schrödinger linéaire à N corps avec des interactions à 2 corps.

Dans l'exposé qui suit, on abordera les deux questions précédentes avec le point de vue suivant. On cherchera les classes les plus grandes de solutions pour lesquelles on sait résoudre les deux questions ci-dessus, et on s'intéressera seulement aux propriétés asymptotiques, en particulier aux décroissances en temps, satisfaites génériquement par ces solutions. On n'abordera pas le problème de la recherche des meilleures

décroissances asymptotiques compatibles avec l'équation (1.1) et satisfaites par des classes de solutions particulières. La situation à cet égard est analogue à celle qu'on rencontre à temps fini dans l'étude de la régularité des solutions du problème de Cauchy. L'attitude correspondante dans ce problème serait de rechercher les espaces les plus grands possibles de données initiales où on saurait résoudre ce problème globalement et de façon unique, et non de chercher des solutions très régulières pour des données initiales très régulières.

A des variantes relativement simples près, il n'existe de théorie raisonnablement complète que pour deux équations, qui sont

(1) - L'équation de Schrödinger non linéaire (SNL)

$$i \dot{\varphi} \equiv i \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{2} \Delta \varphi + f(\varphi) \quad (1.3)$$

où φ est une fonction de \mathbb{R}^{n+1} dans \mathbb{C} , Δ est le Laplacien dans \mathbb{R}^n , et f une fonction locale de φ . Cette équation est du type (1.1) avec $u = \varphi$, $K = (i/2)\Delta$, $f_0(u) = -i f(\varphi)$ et $U(t) = \exp(i(t/2)\Delta)$.

(2) - L'équation de Klein Gordon non linéaire (KGNL)

$$\ddot{\varphi} - \Delta \varphi + m^2 \varphi + f(\varphi) = 0 \quad (1.4)$$

avec φ , Δ et f comme plus haut, et m une constante réelle. On met cette équation sous la forme (1.1) en posant

$$u = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \Delta - m^2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f_0(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ -f(\varphi) \end{pmatrix}$$

Le terme de masse $m^2 \varphi$ peut être incorporé dans K ou dans f_0 selon les besoins. Il résulte de l'équation elle-même que $\psi = \dot{\varphi}$. Le groupe $U(t)$ prend alors la forme

$$U(t) = \begin{pmatrix} \dot{K}_m(t) & K_m(t) \\ \ddot{K}_m(t) & \dot{K}_m(t) \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

avec $K_m(t) = \omega_m^{-1} \sin(\omega_m t)$, $\dot{K}_m(t) = \cos(\omega_m t)$, $\ddot{K}_m(t) = -\omega_m \sin(\omega_m t)$, et $\omega_m = (-\Delta + m^2)^{1/2}$. Le problème de Cauchy pour l'équation libre associée avec données initiales $\varphi(0) = \varphi_0$, $\dot{\varphi}(0) = \Psi_0$, se résoud par

$$\varphi(t) = \dot{K}_m(t) \varphi_0 + K_m(t) \Psi_0. \quad (1.6)$$

La deuxième composante de l'équation vectorielle est simplement la dérivée de la première par rapport au temps et peut être oubliée.

Les équations (1.3) et (1.4) seront désormais citées comme l'équation SNL et l'équation KGNL respectivement.

Les méthodes utilisées pour traiter les questions (1) et (2) sont assez différentes. La première question est relativement facile et se ramène à l'étude du problème de Cauchy avec temps initial infini. Elle peut se résoudre par une méthode de contraction qui généralise celle qu'on peut utiliser pour résoudre le problème de Cauchy à temps fini. Cette méthode se prête bien à l'élaboration d'une certaine quantité de formalisme abstrait, qu'on donnera ci-dessous. Les hypothèses nécessaires, en particulier sur f , comprennent celles du problème de Cauchy à temps fini, et en outre une décroissance de l'interaction à l'infini dans les variables d'espace, qui se traduit par des hypothèses sur la décroissance de $f(\varphi)$ quand $\varphi \rightarrow 0$. Un sous produit de cette méthode est la démonstration de l'existence de solutions globales et de la complétude asymptotique pour des données petites, sans utiliser les lois de conservation.

La deuxième question est plus difficile et se traite au moyen d'estimations a priori obtenues à partir des lois de conservation, exactes ou approchées, associées aux équations. La méthode dépend donc beaucoup plus directement du choix de l'équation. Pour les équations (1.3) et (1.4), il existe cependant deux méthodes principales.

(1) - La méthode basée sur l'invariance pseudoconforme de (1.3) et sur l'invariance conforme de (1.4), pour laquelle on doit alors prendre $m = 0$. Cette méthode est plus simple que la suivante, mais moins générale en termes de conditions initiales admissibles : elle exige des décroissances supplémentaires des conditions initiales à l'infini dans l'espace. En revanche, elle donne des décroissances en temps plus fortes pour les solutions, allant typiquement jusqu'à $t^{-1+\epsilon}$ dans des normes appropriées, et au moins pour SNL, elle est plus générale en termes d'hypothèses sur f (selon un résultat récent de Y. Tsutsumi [D-22]).

(2) - La méthode de Morawetz-Strauss, associée à l'invariance approchée des équations par dilatation. Cette méthode s'applique seulement pour $n \geq 3$, et nécessite $m > 0$ dans KGNL. Elle permet de traiter des conditions initiales très générales, à savoir des conditions initiales arbitraires d'énergie finie. Elle fournit des décroissances en temps plus faibles que la précédente, allant seulement jusqu'à $t^{-1/2+\epsilon}$ (génériquement) dans des normes appropriées. Par ailleurs, elle est dans une large mesure invariante par échange des deux équations (1.3) et (1.4).

Dans l'exposé qui suit, on commencera par quelques rappels sur le problème de Cauchy à temps fini, en insistant sur la méthode de résolution du problème local par contraction (section 2). On montrera ensuite l'existence de solutions dispersives en résolvant le problème de Cauchy

à l'infini par une méthode de contraction qui généralise la précédente (section 3). On étudiera enfin le problème de la complétude asymptotique et plus généralement la décroissance à l'infini en temps des solutions d'énergie finie par la méthode de Morawetz et Strauss (section 4). On laissera de côté la méthode utilisant les invariances conforme ou pseudoconforme, pour laquelle les principaux résultats sont déjà assez anciens, et on renvoie pour cette dernière à la littérature [D-17, D-5, D-22].

Les sections 2 et 3 de cet exposé suivent des notes non publiées de G. Velo et l'auteur, qui étendent le traitement de l'équation SNL donné dans [7], [D-5] et [D-7]. La section 4 est une synthèse simplifiée de la section 5 de [D-7] et de [D-8].

On donne une bibliographie illustrative sur le problème de Cauchy pour les équations du type (1.1) en général et les équations SNL et KGNL en particulier (références [1] à [26]) et une bibliographie sur la théorie de la diffusion pour les mêmes équations (références [D-1] à [D-24] ; Les références de cette deuxième liste contiennent d'ailleurs en général aussi des informations sur le problème de Cauchy). Cette bibliographie n'a aucune prétention à la complétude et vise seulement à donner un aperçu de l'état du sujet.

II - LE PROBLEME DE CAUCHY A TEMPS FINI

Il existe une abondante littérature sur le problème de Cauchy pour les équations du type (1.1), et en particulier pour les équations SNL et KGNL [1] - [26]. Pour démontrer l'existence et l'unicité des solutions du problème de Cauchy sans restriction à des données petites, il existe deux méthodes principales.

(1) - Une première méthode consiste à démontrer l'existence de solutions locales dans le temps et l'unicité des solutions par un argument de contraction ou de point fixe, et à étendre ensuite les solutions obtenues à tous les temps en utilisant des estimations a priori.

(2) - Une deuxième méthode consiste à démontrer l'existence de solutions globales en un sens faible par un argument de compacité utilisant des estimations a priori, et à démontrer ensuite l'unicité par un argument de contraction partielle.

Dans cette section, on expose brièvement la première méthode, et plus spécialement le traitement du problème de Cauchy local en temps, dont la généralisation permettra dans la section 3 de construire des solutions dispersives des équations SNL et KGNL. On mentionne à la fin de cette section les résultats accessibles par la deuxième méthode, et qui seront utiles dans la section 4. Le point de vue adopté consiste à chercher les classes les plus grandes de données initiales pour lesquelles on sait résoudre le problème de Cauchy avec unicité, et on laisse de côté la recherche de solutions régulières et la démonstration de propriétés de régularité additionnelles satisfaites par les solutions pour des données initiales régulières.

Le traitement qu'on va donner du problème de Cauchy local est une extension de celui donné par Segal [22] et peut être présenté de façon relativement générale. Le problème de Cauchy pour l'équation (1.1) avec condition initiale $u(t_0) = u_0$ peut être mis sous la forme de l'équation intégrale

$$u(t) = U(t-t_0)u_0 + \int_{t_0}^t d\tau U(t-\tau) f_0(u(\tau)) . \quad (2.1)$$

On notera $F(t_0, u; t)$ l'intégrale qui figure au second membre, et $F(t_0, u)$ la fonction de t qu'elle définit. On cherche des solutions de (2.1) dans $\mathcal{C}(I, X)$, l'espace des fonctions continues à valeurs dans X , où I est un intervalle contenant t_0 et X un espace de Banach de fonctions de x à choisir au mieux. Pour I compact, $\mathcal{C}(I, X)$ est lui-même un espace de Banach avec la norme uniforme

$$\|u\|_I \equiv \sup_{t \in I} \|u(t)\|_X .$$

On notera $B(I, \rho)$ la boule fermée de centre 0 et de rayon ρ dans $\mathcal{C}(I, X)$. On va résoudre (2.1) dans $\mathcal{C}(I, X)$ pour I de la forme $I = [t_0 - T, t_0 + T]$. La méthode admet un point de passage naturel consistant en une hypothèse abstraite qui permet de démontrer les résultats principaux sans référence au cas particulier considéré. Cette hypothèse porte sur la famille d'intégrales

$$G(I, u; t) = \int_I d\tau U(t-\tau) f_0(u(\tau)) \quad (2.2)$$

dont les F considérés plus haut sont des cas particuliers. L'hypothèse peut être formulée de la façon suivante.

(H) Pour tout intervalle I et tout $u \in \mathcal{C}(I, X)$,

(a) La fonction $\tau \rightarrow U(t-\tau) f_0(u(\tau))$ est localement Bochner intégrable de $\tau \in I$ à valeurs dans X , et

(b) L'application $(t_1, t_2, t) \rightarrow G([t_1, t_2], u; t)$ est continue de $I \times I \times \mathbb{R}$ dans X .

(c) Pour tous intervalles compacts $I \subset J$, tout $\rho > 0$ et tous les $u_1, u_2 \in B(I, \rho)$, l'estimation suivante est satisfaite

$$|G(I, u_1) - G(I, u_2)|_J \leq C(I, J, \rho) |u_1 - u_2|_I, \quad (2.3)$$

où $C(\cdot)$ est séparément croissante de I, J et ρ , et tend vers zéro quand I tend vers zéro à J et ρ fixés (on dira qu'un intervalle $I = [t_1, t_2]$ tend vers zéro si t_1 et t_2 tendent vers une même limite).

En pratique l'hypothèse (H) sera satisfaite grâce à l'existence d'un espace de Banach auxiliaire \bar{X} tel que

(1) f_0 est une application Lipschitzienne de X dans \bar{X} : pour $u_i \in \bar{X}$, $\|u_i\|_{\bar{X}} \leq \rho$, $i = 1, 2$, f_0 satisfait la majoration

$$\|f_0(u_1) - f_0(u_2)\|_{\bar{X}} \leq M(\rho) \|u_1 - u_2\|_X, \quad (2.4)$$

(2) $U(t)$ est un opérateur borné de \bar{X} dans X pour presque tout t (en pratique : pour tout $t \neq 0$), mesurable (en pratique : fortement continu pour $t \neq 0$) et satisfait une majoration

$$\|U(t)\|_{X \rightarrow \bar{X}} \leq \mu(t) \quad (2.5)$$

avec $\mu \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ (en pratique : $\mu \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$) et μ a une singularité intégrable en $t = 0$).

Le cas particulier où $\bar{X} = X$ et où U est un groupe borné à un paramètre dans X , considéré initialement dans [22], est insuffisant pour les applications. Noter que dans ce cas, le passage de U à travers l'intégra-

tion et la dépendance de G par rapport à t sont élémentaires, et on pourrait formuler l'hypothèse abstraite en termes de F sans introduire G .

On peut maintenant formuler le principal résultat.

PROPOSITION 2.1

On suppose (H) satisfaite. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$.

(1) Pour tout $\rho > 0$, il existe $T(\rho) > 0$ tel que pour tout $u_0 \in X$ pour lequel $U(.-t_0)u_0 \in B(I, \rho)$, où $I = [t_0 - T(\rho), t_0 + T(\rho)]$, l'équation (2.1) a une solution unique dans $B(I, 2\rho)$. La solution est unique dans $\mathcal{C}(I, X)$.

(2) Pour tout intervalle $I \ni t_0$, pour tout $u_0 \in X$ tel que $U(.-t_0)u_0 \in \mathcal{C}(I, X)$, l'équation (2.1) a au plus une solution dans $\mathcal{C}(I, X)$.

(3) Les solutions de (2.1) dépendent continûment de t_0, u_0 (en un sens qu'on pourrait préciser).

Esquisse de preuve.

Il suffit de prendre $T(\rho)$ assez petit pour que $C(I, I, \rho) \leq 1/2$, pour assurer que le second membre de (2.1) laisse $B(I, 2\rho)$ invariante et y soit une contraction (par un facteur $1/2$), et par suite que (2.1) ait une solution unique dans $B(I, 2\rho)$. L'unicité générale du (2) résulte de l'unicité locale du (1) par un argument élémentaire. □

On doit noter que le résultat d'existence n'est pas restreint à des données petites, en dépit de la condition $U(.-t_0)u_0 \in B(I, \rho)$. Si on se donne a priori un $u_0 \in X$ tel que $U(.-t_0)u_0 \in \mathcal{C}(J, X)$ pour un intervalle compact J et un $t_0 \in J$, on appliquera la partie (1) de la proposition 2.1 pour obtenir une solution dans $\mathcal{C}(I, X)$ avec $I = J \cap [t_0 - T(\rho), t_0 + T(\rho)]$ en

partant de $\rho = |U(\cdot - t_0)u_0|_J$. La formulation donnée ici a pour but de montrer que le temps de résolution ne dépend de u_0 que par l'intermédiaire d'une norme appropriée.

On applique maintenant le résultat précédent aux équations SNL et KGNL. Dans les deux cas, on assure l'hypothèse (H) au moyen d'un espace auxiliaire \bar{X} comme indiqué plus haut, et le problème essentiel est le choix du couple (X, \bar{X}) . Dans les deux cas, l'étape suivante utilisera des estimations a priori déduites en particulier de la conservation de l'énergie, et qui imposeront aux solutions d'être pour tout temps dans un espace X_e , appelé espace d'énergie. Pour ne pas introduire de restriction supplémentaire sur les données initiales au stade de la résolution locale, il importe d'effectuer celle-ci dans un espace $X \supset X_e$. On utilisera les espaces $L^r \equiv L^r(\mathbb{R}^n)$, la norme étant notée $\|\cdot\|_r$, et les espaces de Sobolev usuels $H^k \equiv H_2^k \equiv H_2^k(\mathbb{R}^n)$. Les couples d'indices conjugués seront notés r, \bar{r} , avec $r \geq 2$ et $1/r + 1/\bar{r} = 1$.

Pour l'équation SNL, le groupe d'évolution libre $U(t) = \exp(i(t/2)\Delta)$ est unitaire dans H^k pour tout k . D'autre part $U(t)$ est borné de $L^{\bar{r}}$ dans L^r et fortement continu pour $t \neq 0$, et satisfait la majoration

$$\|U(t)\varphi\|_r \leq (2\pi|t|)^{-\delta(r)} \|\varphi\|_{\bar{r}} \tag{2.6}$$

avec $\delta(r) = n/2 - n/r$, pour tout $\varphi \in L^{\bar{r}}$. La majoration (2.6) s'obtient en interpolant par le théorème de Riesz-Thorin entre le cas $r = 2$ (unitarité dans L^2) et le cas $r = \infty$ qui résulte du fait que $U(t)$ peut être représenté par la convolution avec $(2\pi it)^{-n/2} \exp(i x^2/(2t))$. L'espace d'énergie est ici $X_e = H^1$ (voir plus loin) et on choisit $X = L^{r_1} \cap L^{r_2}$ avec $2 \leq r_1 \leq r_2 < 2^* \equiv 2n/(n-2)$. On se limite à $n \geq 2$ pour éviter des cas par-

ticuliers triviaux. L'inclusion $X \supset X_e = H^1$ résulte des inégalités de Sobolev. L'espace \bar{X} est de façon naturelle $\bar{X} = L^{\bar{r}_1} \cap L^{\bar{r}_2}$, et le groupe $U(t)$ satisfait la majoration (2.5) grâce à (2.6), avec

$$\mu(t) = \text{Max}_{i=1,2} (2\pi|t|)^{-\delta(r_i)} \quad (2.7)$$

La condition $\mu \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ résulte du fait que $r_1 \leq r_2 < 2^*$ entraîne $\delta(r_1) \leq \delta(r_2) < 1$.

On fait sur f les hypothèses suivantes :

(H₁) $f \in C^1(\mathbb{C}, \mathbb{C}), f(0) = 0$, et il existe p_1 et p_2 , $1 \leq p_1 \leq p_2 < 1 + 4/(n-2)$, tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$|f'(z)| \equiv \text{Max} \left\{ \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|, \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right| \right\} \leq C(|z|^{p_1-1} + |z|^{p_2-1}), \quad (2.8)$$

(H₂) $r_1 / \bar{r}_2 \leq p_1 \leq p_2 \leq r_2 / \bar{r}_1$. (2.9)

On obtient alors le résultat suivant.

PROPOSITION 2.2 (SNL)

Soit X et \bar{X} comme ci-dessus. On suppose que f satisfait (H₁) et (H₂). Alors pour l'équation SNL, l'hypothèse (H) est satisfaite (et par conséquent la proposition 2.1 s'applique).

PREUVE

Il suffit de montrer (2.4). D'après (H₁)

$$|f(\varphi_1) - f(\varphi_2)| \leq C |\varphi_1 - \varphi_2| \sum_{i,j=1,2} |\varphi_i|^{p_j-1} \quad (2.10)$$

Prenant la norme dans $L^{\bar{r}_i}$ et appliquant l'inégalité de Hölder, on obtient

(2.4) pourvu que $r_1 \leq p_j \bar{r}_i \leq r_2$ pour $i, j = 1, 2$, ce qui résulte de (H_2) .

L'hypothèse (H_2) avec les contraintes mises sur r_1, r_2 peut être satisfaite pour un choix admissible de (r_1, r_2) pourvu que p_1 et p_2 satisfassent les conditions contenues dans (H_1) , et en outre une restriction couplée, qui est représentée graphiquement sur la figure 1. Dans le cas d'une seule puissance $p_1 = p_2 = p$, tout l'intervalle $1 \leq p < 1+4/(n-2)$ est accessible (on peut prendre alors $r_1 = r_2 = r = p+1$). La limite supérieure à $1+4/(n-2)$ résulte des inégalités de Sobolev et est à la fois naturelle et inévitable avec les méthodes perturbatives utilisées.

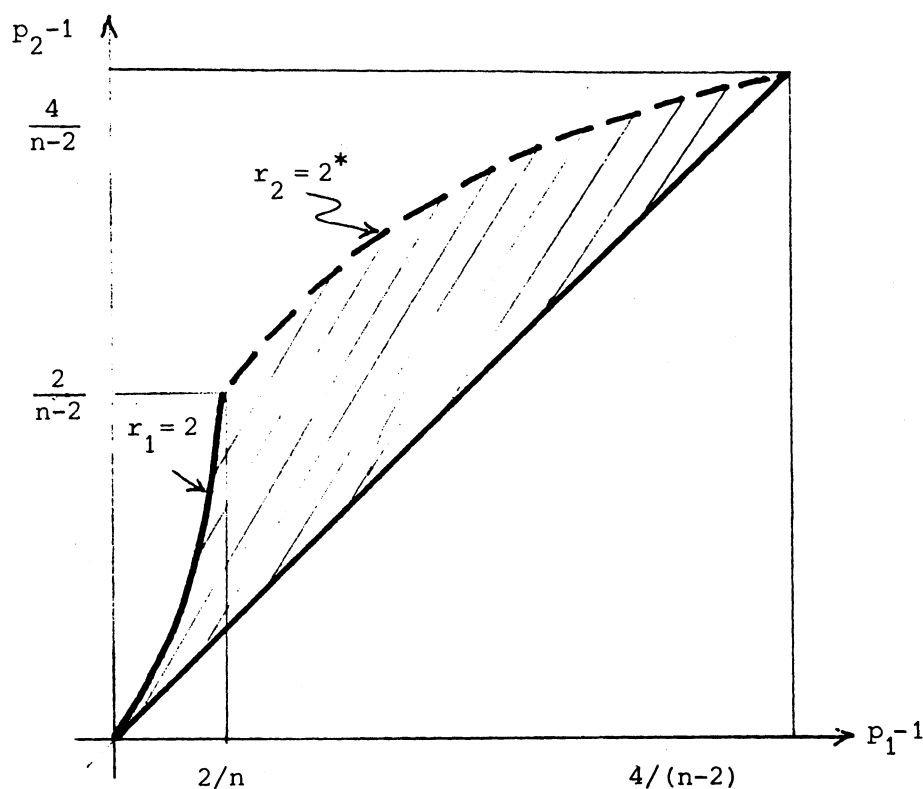


Figure 1. Valeurs de (p_1, p_2) autorisées par la condition (H_2) . Le cas représenté est $n=3$.

Pour l'équation KGNL, on peut indifféremment, pour le problème de Cauchy à temps fini, inclure le terme de masse dans l'évolution libre ou dans l'interaction. On choisit ici de l'inclure dans f et on considère donc (1.4) avec $m = 0$. On omet l'indice m dans ω_m et $K_m(t)$, et on prend donc $\omega = \sqrt{-\Delta}$ et $K(t) = \omega^{-1} \sin \omega t$, $\dot{K}(t) = \cos \omega t$. L'équation intégrale (2.1) a maintenant deux composantes, mais la seconde est la dérivée de la première par rapport au temps, et il est inutile de la considérer. Il reste simplement

$$\varphi(t) = \dot{K}(t-t_0)\varphi_0 + K(t-t_0)\Psi_0 - \int_{t_0}^t d\tau K(t-\tau) f(\varphi(\tau)) \quad (2.11)$$

Outre des propriétés évidentes de majoration dans les H^k qui ne seront pas utilisées ici, l'opérateur $K(t)$ satisfait les majorations suivantes. On se limite au cas $n \geq 3$ pour éviter des cas particuliers.

LEMME 2.1

Soit $n \geq 3$. L'opérateur $K(t)$ est borné de L^s dans L^r pour $(\frac{1}{s}, \frac{1}{r})$ appartenant au triangle fermé \mathcal{C} de sommets $P_1 : (\frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}, \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1})$, $P_2 : (\frac{1}{2} - \frac{1}{n-1}, \frac{1}{2} - \frac{1}{n-1})$ et $P_3 : (\frac{1}{2} + \frac{1}{n-1}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n-1})$. Pour $(\frac{1}{s}, \frac{1}{r}) \in \mathcal{C}$, $K(t)$ satisfait la majoration

$$\|K(t)\varphi\|_r \leq C |t|^{1+n/r-n/s} \|\varphi\|_s \quad (2.12)$$

pour tout $\varphi \in L^s$ (voir figure 2).

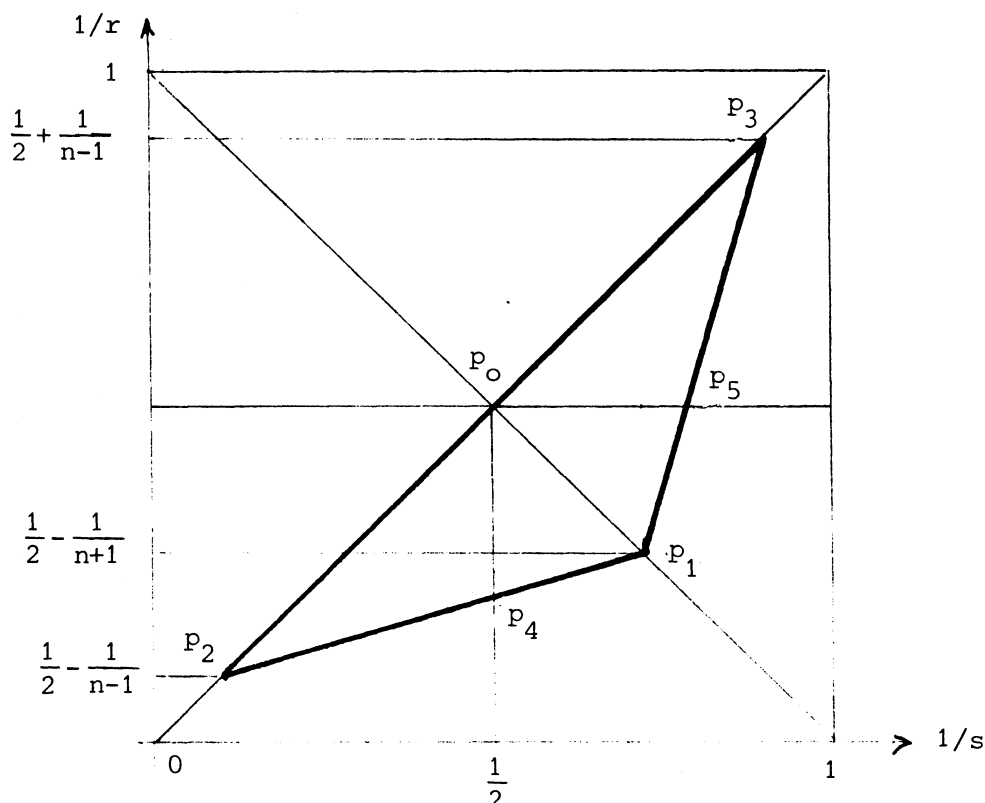


Figure 2. Majorations de l'évolution libre pour KG (lemme 2.1).

On renvoie à [D-10] pour une étude détaillée de l'opérateur $K(t)$ et de l'opérateur $K_m(t)$ pour $m > 0$. On note simplement ici que l'exposant de $|t|$ dans (2.12) est déterminé par l'homogénéité et est au plus égal à $(n-1)/(n+1)$ dans \mathcal{E} , cette valeur étant atteinte en P_1 .

L'espace d'énergie est ici $H^1 \oplus L^2$ (voir plus loin). On choisit $X = Y \oplus H^{-1}$ avec $Y = L^2 \cap L^{r_2}$ et $r_2 = 2(n+1)/(n-1)$, et $\bar{X} = 0 \oplus \bar{Y}$ avec $\bar{Y} = L^2 + L^{\bar{r}_2}$ (le point $(1/\bar{r}_2, 1/r_2)$ est le point P_1 du triangle \mathcal{E}).

On fait sur f les hypothèses (H_1) et

$$(H'_2) \quad p_2 \leq 1 + 4/(n-1). \tag{2.13}$$

PROPOSITION 2.2' (KGNL)

Soit $n \geq 3$, X et \bar{X} comme ci-dessus. On suppose que f satisfait (H_1') et (H_2') . Alors pour l'équation KGNL, l'hypothèse (H) est satisfaite (et par conséquent la proposition 2.1 s'applique).

PREUVE

Pour montrer que $U(t)$ est borné de \bar{X} dans X , il suffit de montrer que $K(t)$ est borné de \bar{Y} dans Y et $\dot{K}(t)$ de \bar{Y} dans H^{-1} . La première propriété résulte du lemme 2.1 où on utilise les points $(1/2, 1/2)$ ou $(1/\bar{r}_2, 1/2)$ pour contrôler la norme dans L^2 en termes des normes dans L^2 ou $L^{\bar{r}_2}$, et les points $(1/2, 1/r_2)$ ou $(1/\bar{r}_2, 1/r_2)$ pour contrôler la norme dans L^{r_2} en termes des normes dans L^2 ou $L^{\bar{r}_2}$. La deuxième propriété résulte du fait que $\dot{K}(t)$ est unitaire dans H^{-1} et que $H^{-1} \supset \bar{Y}$. Pour montrer que f_0 est Lipschitzienne de X dans \bar{X} , il suffit de montrer que f est Lipschitzienne de Y dans \bar{Y} . Utilisant encore (2.10) et l'inégalité de Hölder, on voit facilement qu'il suffit que pour $p = p_1$ et $p = p_2$, la droite $p/r = 1/s$ dans le plan $(1/s, 1/r)$ coupe le carré $[1/2, 1/\bar{r}_2] \times [1/r_2, 1/2]$, ce qui est assuré par les conditions (H_1') et (H_2') . □

Noter que contrairement à (H_2) , l'hypothèse (H_2') n'impose aucun couplage entre p_1 et p_2 . Par contre la limite supérieure $1+4/(n-1)$ est strictement plus petite que la limite attendue $1+4/(n-2)$, ce qui reflète le fait que les espaces L^r sont insuffisants pour traiter correctement le problème pour l'équation KGNL.

On décrit maintenant brièvement l'extension des solutions locales obtenues précédemment en solutions globales (définies pour tout $t \in \mathbb{R}$). Cette extension repose sur la méthode bien connue des estimations a priori.

Dans le cadre abstrait précédent, c'est à dire lorsque la condition (H) est satisfaite, il suffit d'établir la propriété suivante :

Pour tout intervalle compact J , tout $t_0 \in J$ et tout $u_0 \in X$ tel que $U(.-t_0)u_0 \in \mathcal{C}(J, X)$, il existe $M(J, t_0, u_0)$ tel que toute solution u de (2.1) dans $\mathcal{C}(I, X)$, où I est un intervalle tel que $t_0 \in I \subset J$, satisfait la majoration

$$\sup_{s \in I} |U(.-s)u(s)|_J \leq M(J, t_0, u_0) . \quad (2.14)$$

Le point essentiel de cette majoration est que le second membre ne dépend ni de I ni de la solution considérée.

En pratique, cette majoration résulte de l'existence d'un espace $X_e \subset X$ tel que U soit un groupe localement borné à un paramètre dans X_e et que toute solution à données initiales dans X_e soit estimée a priori dans X_e en termes des données initiales grâce aux lois de conservation satisfaites par l'équation (1.1).

On se limite maintenant au cas des équations SNL et KGNL. Les lois de conservation se déduisent par le théorème de Noether du fait que les équations considérées sont obtenues par un principe variationnel à partir d'un Lagrangien, et des propriétés d'invariance (exactes ou approchées) de ce Lagrangien. Pour les équations SNL et KGNL, l'existence d'un Lagrangien est assurée par la condition

$$(H_3) \quad \text{Il existe } V \in \mathcal{C}^1(\mathbb{C}, \mathbb{R}), \text{ telle que } V(0) = 0, V(z) = V(|z|) \text{ pour tout } z \in \mathbb{C}, \text{ et } f(z) = \partial V / \partial \bar{z}.$$

Les densités de Lagrangien sont alors

$$\mathcal{L} = (i/2) (\bar{\dot{\varphi}} \dot{\varphi} - \dot{\varphi} \bar{\dot{\varphi}}) - (1/2) |\nabla\varphi|^2 - v(\varphi) \quad (\text{SNL}), \quad (2.15)$$

$$\mathcal{L} = |\dot{\varphi}|^2 - |\nabla\varphi|^2 - m^2|\varphi|^2 - v(\varphi) \quad (\text{KGNL}). \quad (2.16)$$

Les lois d'invariance utiles pour la globalisation sont, pour l'équation SNL, l'invariance par transformation de jauge $\varphi \rightarrow e^{i\theta} \varphi$ qui donne la conservation de la norme $\|\varphi\|_2$ et, pour les deux équations, l'invariance par translation dans le temps, qui donne la conservation de l'énergie

$$E(\varphi) = (1/2) \|\nabla\varphi\|_2^2 + \int dx v(\varphi(x)) \quad (\text{SNL}) \quad (2.17)$$

$$E(\varphi, \dot{\varphi}) = \|\dot{\varphi}\|_2^2 + \|\nabla\varphi\|_2^2 + m^2\|\varphi\|_2^2 + \int dx v(\varphi(x)) \quad (\text{KGNL}) \quad (2.18)$$

Sous l'hypothèse (H_1) , ces quantités sont bien définies dans l'espace d'énergie $X_e = H^1$ pour l'équation SNL, $X_e = H^1 \oplus L^2$ pour l'équation KGNL. La justification des manipulations formelles qui précèdent conduit au résultat suivant.

PROPOSITION 2.3

Soit f satisfaisant les conditions (H_1) , (H_3) et (H_2) (resp. (H_2')) pour l'équation SNL (resp. KGNL). Soit X défini comme dans les propositions 2.2 ou 2.2' et X_e comme ci-dessus. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$, $u_0 \in X_e$, I un intervalle de \mathbb{R} et u solution de l'équation SNL ou KGNL dans $\mathcal{E}(I, X)$. Alors $u \in \mathcal{E}(I, X_e)$ et pour tout $t \in I$, u satisfait les lois de conservation

$$\|\varphi(t)\|_2 = \|\varphi_0\|_2, \quad E(\varphi(t)) = E(\varphi_0) \quad (\text{SNL}), \quad (2.19)$$

$$E(\varphi(t), \dot{\varphi}(t)) = E(\varphi_0, \dot{\varphi}_0) \quad (\text{KGNL}). \quad (2.20)$$

Esquisse de preuve

La difficulté est que, même si $u_0 \in X_e$, on ne sait pas a priori

si $u(t)$ reste dans X_e pour $t \neq t_0$, et que d'autre part la solution u n'est pas assez régulière pour que les calculs formels qui conduisent aux invariances aient un sens. On commence donc par régulariser l'équation en remplaçant $V(\varphi)$ par $V(h * \varphi)$ où h est une approximation \mathcal{C}^∞ d'une distribution δ de Dirac, et u_0 par $h * u_0$. On montre que l'équation intégrale régularisée admet (localement) une solution unique $u_h \in \mathcal{C}^1(I, (1-\Delta)^{-k/2} X_e)$ pour I convenable et tout $k \in \mathbb{Z}^+$. On peut alors démontrer les lois de conservation pour la solution u_h par les calculs formels indiqués plus haut, et on démontre enfin la proposition 2.3 en prenant la limite où h tend vers δ dans ces lois de conservation au moyen d'un argument de compacité faible dans X_e . \square

Les lois de conservation précédentes fournissent des estimations a priori des solutions dans X_e et entraînent les majorations (2.14) pourvu que le potentiel V soit convenablement semi borné inférieurement, de façon à empêcher le terme en V dans l'énergie (terme potentiel) de tendre vers $-\infty$ et le terme cinétique vers $+\infty$ à énergie constante. L'hypothèse adéquate est la suivante

(H₄) Il existe $C \geq 0$ et p_3 , $1 \leq p_3 < 1 + 4/n$, tels que pour tout $\rho \in \mathbb{R}^+$

$$V(\rho) \geq -C(\rho^2 + \rho^{p_3+1}) \quad (2.21)$$

pour l'équation SNL, et

(H'₄) Il existe $a \geq 0$ tel que pour tout $\rho \in \mathbb{R}^+$

$$V(\rho) \geq -a^2 \rho^2 \quad (2.22)$$

pour l'équation KGNL. On peut alors démontrer le résultat d'existence globale et d'unicité suivant.

PROPOSITION 2.4

Soit f satisfaisant les conditions (H_1) , (H_3) et en outre (H_2) , (H_4) ou (H'_2) (H'_4) selon l'équation. Soit X et X_e définis comme ci-dessus. Alors, pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$ et tout $u_0 \in X_e$, l'équation SNL ou KGNL a une solution unique $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, X_e)$. La solution est unique dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}, X)$, et satisfait les lois de conservation (2.19) ou (2.20) pour tout $t \in \mathbb{R}$. De plus $u \in L^\infty(\mathbb{R}, X_e)$ pour SNL et, si $a^2 < m^2$, pour KGNL.

On conclut cette section en signalant que la méthode qu'on vient de décrire n'est pas la plus efficace pour montrer l'existence et l'unicité de solutions globales dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}, X_e)$. Ce résultat peut être obtenu sous des hypothèses plus faibles par la deuxième méthode décrite au début de cette section, où on obtient l'existence de solutions faibles globales par un argument de compacité, et l'unicité par un argument de contraction partielle sur les ensembles bornés de $\mathcal{C}(I, X_e)$ pour des intervalles I compacts. Par contre, par cette deuxième méthode, on perd l'unicité dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}, X)$. Les hypothèses (H_1) , (H_3) et (H_4) ou (H'_4) sont incompressibles, mais les hypothèses (H_2) et (H'_2) peuvent être affaiblies : (H_2) peut être remplacée par la condition

$$p_1 \geq \begin{cases} 1 & (n = 1) \\ 1+\epsilon & (n=2) \\ \frac{4(n-2)}{n(n+2)} & (3 \leq n \leq 6) \\ \frac{4(n-4)}{n(n-2)} & (n \geq 6) \end{cases} \quad \text{(SNL)} \quad (2.23)$$

et la condition (H'_2) pour KGNL peut être omise complètement, autrement dit, la borne supérieure $p_2 \leq 1+4/(n-1)$ peut être remplacée par la condition naturelle $p_2 < 1+4/(n-2)$ contenue dans (H_1) . Avec ces modifications d'hy-

pothèses, on obtient les mêmes conclusions que dans la proposition 2.4, à l'exception de l'unicité dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}, X)$ [9], [10]. Ce résultat sera utilisé dans la section 4.

III - EXISTENCE DE SOLUTIONS DISPERSIVES

Dans cette section, on étudie l'existence de solutions dispersives d'équations du type (1.1) et en particulier on démontre l'existence de telles solutions pour les équations SNL et KGNL. On commence par une brève introduction destinée à préciser le problème. On considère un groupe d'évolution à un paramètre agissant dans un espace approprié et on étudie le comportement asymptotique en temps des trajectoires génériques par comparaison avec celui des trajectoires engendrées par un groupe plus simple $U(t)$ agissant dans le même espace. Ici, le premier groupe est défini par la résolution du problème de Cauchy pour (1.1), l'espace où il agit est l'espace des données initiales (de façon optimale, l'espace d'énergie X_e dans le cas des équations SNL et KGNL) et le groupe $U(t)$ est associé à l'équation libre (1.2). Si u est une solution générique, on cherche des données initiales u_+ et u_- telles que $u(t)$ soit asymptote à $U(t)u_+$ quand $t \rightarrow +\infty$. Inversement, étant donné u_+ ou u_- , on cherche u satisfaisant la même propriété. Les solutions satisfaisant cette propriété sont appelées dispersives. On étudie la deuxième question dans cette section, la première question sera considérée dans la section 4 ci-dessous. Il est commode de définir, pour toute solution u , la fonction

$$\tilde{u}(t) = U(-t) u(t) \quad (3.1)$$

et le problème est alors, pour u_+ ou u_- donné, de construire u telle que l'une des limites suivante existe

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \tilde{u}(t) = u_{\pm} \quad (3.2)$$

Dans la mesure où ce problème peut être résolu, on peut définir les applications $\Omega_{\pm} : u_{\pm} \rightarrow u(0)$, où u est la solution qui satisfait (3.2) avec le signe approprié. Les Ω_{\pm} sont les opérateurs d'onde. On cherche à les définir

dans l'espace le plus grand possible, de façon optimale dans tout l'espace de données initiales où on sait résoudre le problème de Cauchy. Si ces opérateurs sont injectifs et si leurs images coïncident, i.e. $R(\Omega_+) = R(\Omega_-)$, on peut définir l'opérateur de diffusion $S = \Omega_+^{-1} \circ \Omega_-$, qui est alors inversible avec inverse $S^{-1} = \Omega_-^{-1} \circ \Omega_+$. L'opérateur de diffusion est donc l'application $u_- \rightarrow u_+$ où u_- et u_+ sont reliés par le fait qu'ils satisfont (3.2) pour les deux signes possibles avec la même solution u . L'opérateur S tire son importance du fait qu'il est l'objet sur lequel les expériences de diffusion donnent des informations. La condition $R(\Omega_+) = R(\Omega_-)$ est une forme faible de complétude asymptotique. Elle permet de définir un opérateur de diffusion (inversible) mais n'exclut pas l'existence de comportements asymptotiques non décrits par l'équation libre (par exemple les états liés dans le cas de l'équation de Schrödinger linéaire à deux corps). La forme forte de complétude asymptotique est que $R(\Omega_+)$ coïncide avec tout l'espace des données initiales. Au présent niveau de généralité, une propriété classique des Ω_{\pm} et de S est évidente : si u est une solution satisfaisant (3.2) avec par exemple le signe +, alors :

$$u(0) = \Omega_+(u_+)$$

mais aussi, pour tout $s \in \mathbb{R}$

$$u(s) = \Omega_+(U(s)u_+).$$

Autrement dit, les opérateurs d'onde entrelacent l'évolution libre et l'évolution totale. En conséquence S commute avec l'évolution libre. Les différentes définitions données ci-dessus sont représentées schématiquement sur la figure 3

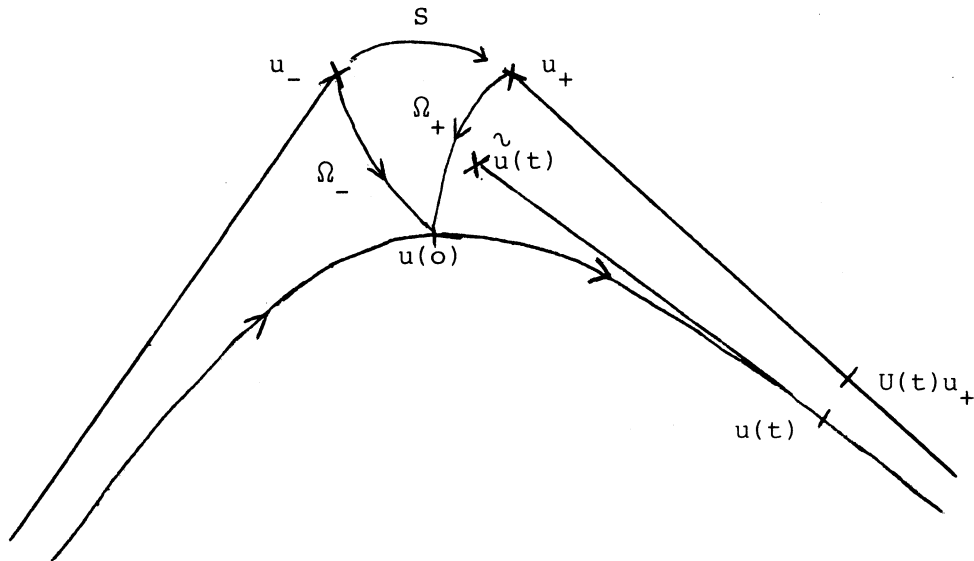


figure 3 : Généralités sur la diffusion

On examine maintenant plus spécifiquement la situation où le groupe d'évolution considéré est défini par l'intermédiaire du problème de Cauchy pour l'équation (1.1), formulé sous la forme de l'équation intégrale (2.1). On considère par exemple le cas $t \rightarrow +\infty$. Si la limite (3.2) existe, alors formellement :

$$u_+ = \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{u}(-t) = U(-t_0)u_0 + \int_{t_0}^{\infty} d\tau U(-\tau)f_0(u(\tau)). \quad (3.3)$$

Appliquant $U(t)$ à (3.3) et retranchant de (2.1), on obtient :

$$u(t) = U(t)u_+ - \int_t^{\infty} d\tau U(t-\tau)f_0(u(\tau)). \quad (3.4)$$

Pour u_+ donné, la construction de u consiste donc à résoudre une équation intégrale qui représente le problème de Cauchy avec temps initial $t_0 = +\infty$.

De façon plus générale, on étudiera l'équation intégrale :

$$u(t) = U(t)\tilde{u}_0 + \int_{t_0}^t d\tau U(t-\tau)f_0(u(\tau)) \quad (3.5)$$

pour t_0 dans un voisinage de $+\infty$, la valeur $+\infty$ étant admise, et on cherchera à la résoudre avec une uniformité et une continuité en t_0 convenables au voisinage de $t_0 = +\infty$. L'équation (3.5) se réduit à (2.1) pour t_0 fini, avec $\tilde{u}_0 = U(-t_0)u_0$, et à (3.4) pour $t_0 = +\infty$, avec $\tilde{u}_0 = u_+$.

On résoud l'équation (3.5) en deux étapes, qui généralisent celles de la résolution du problème de Cauchy à temps fini donnée dans la section 2 :

(1) - On résoud (3.5) localement au voisinage de l'infini, c'est à dire dans un intervalle $[T, \infty)$ avec T assez grand, par une méthode de contraction qui généralise celle de la section 2.

(2) - On étend les solutions ainsi obtenues à \mathbb{R} entier par une méthode utilisant des estimations a priori.

Il est clair que la deuxième étape est la même que dans la section précédente, puisque la première permet de repartir d'un temps initial (grand mais) fini. On en mentionne brièvement les conclusions à la fin de cette section et on se concentre maintenant sur la première. On utilise la notation $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$, avec la topologie évidente. Pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$, on note \bar{I} la fermeture de I dans $\bar{\mathbb{R}}$. On cherche à résoudre (3.5) dans un espace $\mathcal{X}_0(I) \subset \mathcal{C}(I, X)$ où I est un intervalle en général non borné, typiquement $I = [T, \infty)$, et X est choisi comme dans la section 2. La définition de $\mathcal{X}_0(\cdot)$ doit incorporer une décroissance en temps qui assure au minimum la convergence à l'infini et l'uniformité en t_0 de l'intégrale dans (3.5). Cette décroissance sera précisée plus bas et fera de $\mathcal{X}_0(I)$ un espace de Banach, où la norme sera notée $|\cdot|_{0I}$. La donnée initiale \tilde{u}_0 dans (3.5) doit au minimum engendrer une solution de l'équation libre qui satisfera la même décroissance. L'espace naturel pour \tilde{u}_0 est donc :

$$X_0 = \{v \in X : U(\cdot)v \in \mathcal{X}_0(\mathbb{R})\} \quad (3.6)$$

qui est un espace de Banach avec la norme

$$\|v\|_{X_0} \equiv \|U(\cdot)v\|_{\mathcal{O}\mathbb{R}}. \quad (3.7)$$

Il est clair que $X_0 \subset X$. D'autre part, pour traiter toutes les données initiales $\tilde{u}_0 \in X_e$, on sera intéressé à assurer que $X_0 \supset X_e$. Comme pour le problème de Cauchy à temps fini, la méthode admet un point de passage naturel consistant en une hypothèse abstraite qui permet de démontrer les résultats principaux sans référence au cas particulier considéré. Le travail nécessaire pour vérifier l'hypothèse, et qui dépend du cas particulier, comprend d'une part celui qu'on a déjà fait à temps fini, et d'autre part le contrôle des décroissances en temps. On présente deux versions de la méthode. La première est plus simple, mais la seconde, plus compliquée, est nécessaire pour assurer que $X_0 \supset X_e$.

Dans la première version, on impose des décroissances en temps sous forme ponctuelle. On choisit sur X une famille de semi-normes $\|\cdot\|_\alpha$ (telles que $\|u\|_\alpha \leq \|u\|_X$ pour tout $u \in X$) et on leur impose des décroissances en $m_\alpha(t)^{-1}$ où les m_α sont des fonctions croissantes de $|t|$, $m_\alpha(t) \geq 1$ pour tout α et t , et $\sup_\alpha m_\alpha(t) < \infty$ pour tout t . On définit les espaces \mathcal{X}_0 en prenant pour norme :

$$\|u\|_{\mathcal{O}I} = \sup_{t \in I} \{ \text{Max} \|u(t)\|_X, \sup_\alpha m_\alpha(t) \|u(t)\|_\alpha \}. \quad (3.8)$$

Par exemple, pour l'équation SNL avec $X = L^{r_1} \cap L^{r_2}$, on prendra $\alpha = r \in [r_1, r_2]$ et $m_r(t) = (1+|t|)^{\bar{\delta}(r)}$ avec $0 \leq \bar{\delta}(r) \leq \delta(r)$, $\bar{\delta}(r)$ concave en $1/r$. On peut alors formuler l'hypothèse abstraite de la façon suivante en termes des intégrales $G(I, u)$ définies par (2.2). On note $B_0(I, \rho)$ la boule fermée de rayon ρ centrée à l'origine dans $\mathcal{X}_0(I)$.

(H₀) Pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et tout $u \in \mathcal{X}_0(I)$,

(a) - La fonction $\tau \rightarrow U(t-\tau)f_0(u(\tau))$ est localement Bochner-intégrable de $\tau \in I$ à valeurs dans X , et

(b) - L'application $(t_1, t_2) \rightarrow G([t_1, t_2], u)$ est continue de $\bar{I} \times \bar{I}$ dans $\mathcal{X}_0(\mathbb{R})$.

(c) - Pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$, tout $\rho > 0$ et tous les $u_1, u_2 \in B_0(I, \rho)$, l'estimation suivante est satisfaite

$$|G(I, u_1) - G(I, u_2)|_{0\mathbb{R}} \leq C_0(I, \rho) |u_1 - u_2|_{0I} \quad (3.9)$$

où C_0 est séparément croissante de I et ρ et tend vers zéro quand I tend vers zéro à ρ fixé (le point limite commun des deux extrémités de I pouvant maintenant être $+\infty$ ou $-\infty$).

Par rapport à l'hypothèse (H) utilisée à temps fini, on impose en outre aux intégrales (2.2) de satisfaire les décroissances typiques de $\mathcal{X}_0(\mathbb{R})$ dans la variables t , et on permet aux extrémités de I d'être $\pm\infty$.

On peut maintenant formuler le principal résultat.

PROPOSITION 3.1

On suppose (H₀) satisfaite. Alors

(1) - Les solutions dans les espaces $\mathcal{X}_0(\cdot)$ sont dispersives au sens suivant. Pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$, tout $t_0 \in \bar{I}$, tout $\tilde{u}_0 \in X_0$ et toute solution u de l'équation (3.5) dans $\mathcal{X}_0(I)$, on a $\tilde{u} \in \mathcal{E}(\bar{I}, X_0)$. En particulier, si $I = [T, \infty)$, alors il existe $u_+ \in X_0$ tel que $\tilde{u}(t) \rightarrow u_+$ fortement dans X_0 quand $t \rightarrow \infty$.

(2) - (Existence de solutions locales à l'infini). Pour tout $\tilde{u}_0 \in X_0$, il existe $T < \infty$ tel que pour tout $t_0 \in \bar{I}$, avec $I = [T, \infty)$, l'équation (3.5) a une solution et une seule dans $\mathcal{X}_0(I)$.

(3) - (Unicité). Pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$, tout $t_0 \in \bar{I}$ et tout $\tilde{u}_0 \in X_0$, l'équation (3.5) a au plus une solution dans $\mathcal{X}_0(I)$.

(4) - (Continuité). Les solutions de (3.5) dépendent continûment de (t_0, \tilde{u}_0) , les topologies initiales étant celles de $\bar{\mathbb{R}} \times X_0$ pour (t_0, \tilde{u}_0) et les topologies finales celles de $\mathcal{X}_0(I)$ pour u et de $\mathcal{C}(\bar{I}, X_0)$ pour \tilde{u} , pour un choix convenable de I .

Esquisse de preuve et commentaires

La partie (1) résulte immédiatement du point (b) de (H_0) et du fait que

$$U(-t_2)u(t_2) - U(-t_1)u(t_1) = G([t_1, t_2], u). \quad (3.10)$$

La partie (2) dans le cas présent peut être précisée comme suit : pour tout $\rho > 0$, il existe $T(\rho) < \infty$ tel que pour tout $\tilde{u}_0 \in X_0$ avec $\|\tilde{u}_0\|_{X_0} \leq \rho$ et tout $t_0 \in \bar{I}$, avec $I = [T(\rho), \infty)$, l'équation (3.5) a une solution dans $B_0(I, 2\rho)$, unique dans $\mathcal{X}_0(I)$. La démonstration consiste à remarquer que, si $T(\rho)$ est assez grand pour que $C_0(I, 2\rho) \leq 1/2$, alors le second membre de (3.5) laisse $B_0(I, 2\rho)$ invariant et γ est une contraction (par un facteur $1/2$).

La partie (3) (unicité) résulte de la partie (2) localement au voisinage de l'infini si $t_0 = \pm \infty$ et du résultat à temps fini (proposition 2.1, partie (2)) en dehors d'un voisinage de $\pm \infty$ et en particulier si t_0 est fini. □

Comme sous produit de la théorie précédente, on obtient un résultat d'existence de solutions globales dispersives et de complétude asymptotique pour données petites ne faisant pas appel aux lois de conservation et aux estimations a priori qui en découlent. On doit pour cela supposer que $C_0(\mathbb{R}, \rho)$ (défini dans (H_0)) tend vers zéro quand ρ tend vers zéro, ce qui nécessite évidemment que le terme d'interaction f_0 soit strictement surlinéaire.

PROPOSITION 3.2

On suppose que (H_0) est satisfaite et que $C_0(\mathbb{R}, \rho)$ tend vers zéro quand $\rho \rightarrow 0$. Alors

(1) - Il existe $\rho_0 > 0$ tel que pour tout $t_0 \in \bar{\mathbb{R}}$, tout $\rho \in (0, \rho_0]$ et tout $\tilde{u}_0 \in X_0$ avec $\|\tilde{u}_0\|_{X_0} \leq \rho$, l'équation (3.5) a une solution dans $B_0(\mathbb{R}, 2\rho)$, unique dans $\mathcal{X}_0(\mathbb{R})$. De plus $\tilde{u} \in \mathcal{C}(\bar{\mathbb{R}}, X_0)$ et $\|\tilde{u}; \mathcal{C}(\bar{\mathbb{R}}, X_0)\| \leq 2\rho$.

(2) - Les opérateurs d'onde Ω_{\pm} et l'opérateur de diffusion S sont des homéomorphismes locaux de X_0 sur X_0 au voisinage de zéro.

Esquisse de preuve

Il suffit de prendre $C_0(\mathbb{R}, 2\rho_0) \leq 1/2$ pour assurer que le second membre de (3.5) est une contraction (avec un facteur 1/2) dans $B_0(\mathbb{R}, 2\rho)$ sous les hypothèses faites. □

On passe maintenant au travail de vérification de l'hypothèse (H_0) , qui requiert essentiellement une majoration nouvelle. En effet, la partie (a) est une répétition de la partie (a) de l'hypothèse (H) à temps fini. La partie (b) résulte de la continuité déjà vue à temps fini et de

l'estimation (3.9) avec $u_1 = u$, $u_2 = 0$. L'estimation (3.9) elle-même se démontre de la même façon que son cas particulier $u_1 = u$, $u_2 = 0$, après utilisation de l'hypothèse (H_1) sur f pour extraire la différence $u_1 - u_2$ qui doit figurer au second membre. Il reste donc en pratique seulement à établir la majoration

$$|G(I, u)|_{O \mathbb{R}} \leq \rho C_0(I, \rho) \tag{3.11}$$

pour $u \in B_0(I, \rho)$. On disposera comme à temps fini, des propriétés (2.4) et (2.5) sur f_0 et U , et il suffira de contrôler les dépendances en temps des intégrales $G(I, u)$.

On applique maintenant la théorie précédente aux équations SNL et KGNL. Pour l'équation SNL on choisit comme dans la section 2, $X = L^{r_1} \cap L^{r_2}$, $\bar{X} = L^{\bar{r}_1} \cap L^{\bar{r}_2}$, et on définit $\mathfrak{X}_0(I)$ avec la norme suivante, qui est du type (3.8) :

$$|\varphi|_{OI} = \sup_{r_1 \leq r \leq r_2} \sup_{t \in I} (1+|t|)^{\bar{\delta}(r)} \|\varphi(t)\|_r, \tag{3.12}$$

où on choisit $\bar{\delta}(r) = \text{Min}(\delta(r), \delta)$ pour un $\delta \in (0, 1]$. (Le cas intéressant est celui où $\delta(r_1) \leq \delta \leq \delta(r_2)$, et le paramètre δ ne joue aucun rôle si $\delta \geq \delta(r_2)$).

Les hypothèses sur f comprennent, outre les hypothèses (H_1) et (H_2) déjà utilisées à temps fini, une propriété de décroissance à l'infini dans l'espace ainsi qu'on s'y attend en vue de démontrer l'existence des opérateurs d'onde. Cette propriété prend la forme de la borne inférieure suivante sur l'exposant p_1 , qui contrôle le comportement de f à l'origine.

$$(H_5) \quad p_1 > \text{Max} \{ \delta^{-1}, 1 + (2/n)(1+\delta) \}. \tag{3.13}$$

On obtient alors le résultat suivant.

PROPOSITION 3.3 (SNL)

Soit X et $\mathfrak{X}_0(\cdot)$ comme ci-dessus. On suppose que f satisfait (H_1) , (H_2) et (H_5) . Alors, pour l'équation SNL, l'hypothèse (H_0) est satisfaite et les propositions 3.1 et 3.2 s'appliquent.

Esquisse de preuve.

A la suite des remarques faites plus haut, on estime, pour $\varphi \in B_0(I, \rho)$, en utilisant (2.6) et (H_1) , (H_2) ,

$$\begin{aligned} \|G(I, \varphi; t)\|_r &\leq c \int_I d\tau |t-\tau|^{-\delta(r)} \sum_{j=1,2} \|\varphi(\tau)\|_{p_j \bar{r}}^{p_j} \\ &\leq c \sum_{j=1,2} \rho^{p_j} \int_I d\tau |t-\tau|^{-\delta(r)} (1+|\tau|)^{-p_j \bar{\delta}(p_j \bar{r})} \end{aligned} \quad (3.14)$$

On se limite au cas le plus intéressant où $I = [t_1, \infty)$ avec $t_1 > 0$ et $t > 0$. L'intégrale dans (3.14) est majorée au moyen du lemme suivant.

LEMME 3.1

Soit $0 \leq \beta_1 < 1$, $0 \leq \beta_2 \neq 1$, $\beta_1 + \beta_2 > 1$, $t_1 > 0$ et $t > 0$. Alors

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{\infty} |t-\tau|^{-\beta_1} (1+\tau)^{-\beta_2} d\tau &\leq \\ \left\{ \begin{array}{ll} c [1 + \text{Max}(t, t_1)]^{1-\beta_1-\beta_2} & \text{si } \beta_2 < 1, \\ c(1+t_1)^{1-\beta_2} [1 + \text{Max}(t, t_1)]^{-\beta_1} & \text{si } \beta_2 > 1. \end{array} \right. \end{aligned} \quad (3.15)$$

La preuve du lemme 3.1 est élémentaire. Le lemme assure en particulier que l'intégrale au premier membre de (3.15) est majorée par

$c(1+t)^{-\beta} (1+t_1)^{1+\beta-\beta_1-\beta_2}$ pour tout $\beta \leq \text{Min}(\beta_1, \beta_1+\beta_2-1)$. On l'applique, pour estimer (3.14), avec $\beta = \bar{\delta}(r)$, $\beta_1 = \delta(r)$, $\beta_2 = p_j \bar{\delta}(p_j \bar{r})$, continuant (3.14) par

$$\dots \leq (1+t)^{-\bar{\delta}(r)} \rho \left\{ c \sum_j \rho^{p_j-1} (1+t_1)^{-\beta'_j} \right\} \quad (3.16)$$

avec

$$\beta'_j = p_j \bar{\delta}(p_j \bar{r}) + \delta(r) - \bar{\delta}(r) - 1$$

pourvu que $\beta'_j > 0$. Cette dernière condition assure en outre que $C_0([t_1, \infty), \rho)$ qui est défini par la dernière accolade de (3.16) tend vers zéro quand $[t_1, \infty)$ tend vers zéro, c'est à dire quand $t_1 \rightarrow \infty$. Il suffit donc d'assurer que $\beta'_j > 0$ pour $j = 1, 2$ et tout $r \in [r_1, r_2]$, ce qui résulte facilement de l'hypothèse (H_5) .

La borne inférieure (3.13) contenue dans la condition (H_5) dépend du paramètre δ . La condition la plus faible sur p_1 est obtenue pour la valeur de δ qui égalise les deux termes du maximum. La condition ainsi obtenue par élimination de δ peut se mettre par exemple sous la forme (en omettant l'indice 1)

$$p \frac{n}{2} \frac{p-1}{p+1} > 1$$

ou encore

$$p \delta(p+1) > 1, \quad (3.17)$$

donnant ainsi une borne inférieure

$$p > p_0 \equiv (2n)^{-1} \{n+2+(n^2+12n+4)^{1/2}\} \quad (3.18)$$

qui vaut $(3+\sqrt{17})/2 \simeq 3,56$ pour $n = 1$, $1+\sqrt{2}$ pour $n = 2$, 2 pour $n = 3$, $(3+\sqrt{17})/4$ pour $n = 4$, etc. Cette borne est toujours comprise entre $1+2/n$

et $1+4/n$. On sait par ailleurs que les limites (3.2) ne peuvent pas exister en dessous de $1+2/n$, et on verra dans la section 4 que la complétude asymptotique est satisfaite dans l'espace d'énergie au dessus de $1+4/n$ pour des interactions répulsives. La complétude asymptotique sous la condition (3.17) et pour des interactions répulsives a été démontré récemment par Tsutsumi [D22] par la méthode utilisant l'invariance pseudo-conforme, dont on ne parlera pas ici, dans l'espace adapté à cette invariance, qui est plus petit que l'espace d'énergie.

On considère maintenant l'équation KGNL. On se limite à des choix d'espaces voisins de celui de la proposition 2.2'. Comme on l'a vu à propos de l'hypothèse (H'_2) , ces espaces sont insuffisants pour le traitement complet de l'équation KGNL, pour lequel on aurait besoin des espaces plus généraux qui seront introduits dans la section 4. Le problème de Cauchy à l'infini dans ces espaces pour l'équation KGNL n'a pas été exploré de façon systématique (voir cependant [D-14], [D-19] pour des résultats partiels dans ce sens) et on se limite ici à donner un exemple simple pour illustrer la théorie générale. Pour le problème de Cauchy à l'infini, il est essentiel de distinguer les cas $m = 0$ et $m \neq 0$ de l'équation KGNL (1.4), le groupe d'évolution libre (1.5) ayant des comportements asymptotiques en temps différents dans les deux cas. On considère seulement le cas $m \neq 0$, et on utilise les majorations du lemme 3.2 ci-dessous [D-10], qui généralise le lemme 2.1. On prend $m = 1$ et pour éviter des cas particuliers, on se limite au cas $n \geq 3$.

LEMME 3.2

Soit $n \geq 3$. L'opérateur $K_1(t)$ est borné de L^S dans L^r pour

$(1/s, 1/r)$ appartenant au triangle \mathcal{C} (cf. Lemme 2.1) et satisfait, pour $|t| \leq 1$, la majoration (2.12) et pour $|t| \geq 1$, la majoration

$$||\kappa_1(t)\varphi||_r \leq C |t|^{-\delta(r,s)} ||\varphi||_s \quad (3.19)$$

avec

$$\delta(r,s) = \text{Min} \{ \delta(r), -\delta(s), 1+\delta(s)+\delta(r)(1-2/n), \\ 1-\delta(r)-\delta(s)(1-2/n) \} \quad (3.20)$$

Dans l'espace des variables $(1/s, 1/r, \delta)$ et dans la région $s \leq 2 \leq r$, le graphe de $\delta(r,s)$ est porté par la pyramide de sommet $(1/2+1/(n+2), 1/2-1/(n+2), n/(n+2))$ dont la base dans le plan $\delta = 0$ est le quadrilatère de sommets $P_0 : (1/2, 1/2)$, $P_5 : (1/2+1/n, 1/2)$, $(1, 0)$ et $P_4 : (1/2, 1/2-1/n)$. On donne ici pour l'équation KGNL, un exemple où on utilise seulement, du lemme 3.2, le segment $P_0 P_1$ (i.e. $s = \bar{r}$). On a alors $\delta(r, \bar{r}) = \text{Min}(\delta(r), 2/r)$. On se restreint de plus à une seule puissance dans l'interaction, i.e. $p_1 = p_2 = p$ dans la condition (H_1) . On prend $X = Y \otimes H^{-1}$ avec $Y = L^r$ et $2 \leq r \leq 2(n+1)/(n-1)$, $\bar{X} = 0 \otimes \bar{Y}$ avec $\bar{Y} = L^{\bar{r}}$ et on définit les espaces $\mathfrak{X}_0(\cdot)$ avec la norme suivante, qui est du type (3.8)

$$|u|_{0I} = \text{Sup}_{t \in I} \text{Max} \{ (1+|t|)^{\bar{\delta}(r)} ||\varphi(t)||_r, ||\psi(t); H^{-1}|| \} \quad (3.21)$$

où on choisit maintenant $\bar{\delta}(r) = \text{Min} \{ \delta(r), 2/r \}$.

Les hypothèses sur f comprennent, outre (H_1) une hypothèse de décroissance à l'infini dans l'espace. On suppose

$$(H_5') \quad p_0 < p_1 = p_2 (\equiv p) \leq 1 + 4/(n-1) \quad (3.22)$$

où p_0 est défini par (3.18).

On obtient alors le résultat suivant.

PROPOSITION 3.3' (KGNL)

Soit X et \mathcal{X}_0 comme ci-dessus. On suppose que f satisfait (H_1) , $r = p+1$ et (H'_5) . Alors pour l'équation KGNL, l'hypothèse (H_0) est satisfaite et les propositions 3.1 et 3.2 s'appliquent.

Commentaire

En se restreignant à $s = \bar{r}$, on s'est ramené à une situation très voisine de celle de l'équation SNL. On a donc besoin de la condition (H_2) qu'on assure ici de façon triviale en prenant $r_1 = r_2 = r = p+1$. La borne supérieure sur p dans (H'_5) est la condition (H'_2) , dont on a besoin pour la même raison que dans la proposition 2.2'. La borne inférieure $p > p_0$ dans (H'_5) est la même que pour l'équation SNL et résulte du fait que $\bar{\delta}(r) = \delta(r)$ comme pour SNL dans la région qui détermine cette borne.

En utilisant plus systématiquement les majorations du lemme 3.2, on peut traiter un intervalle de puissances non réduit à un point, $[p_1, p_2] \subset [p_0, 1+4/(n-1)]$. On laisse ce travail en exercice.

On présente maintenant une deuxième version de la méthode de résolution du problème de Cauchy à l'infini, où les propriétés de décroissance en temps qui figurent dans la définition des espaces \mathcal{X}_0 sont exprimées sous forme intégrale. Cette deuxième version a une double motivation : d'une part, les équations considérées ici sont invariantes par translation dans le temps et il est naturel de définir les espaces \mathcal{X}_0 au moyen de normes satisfaisant la même propriété, ce qui n'est pas le cas pour les normes (3.8). D'autre part, pour des solutions arbitraires d'énergie finie des équations de Schrödinger ou de Klein-Gordon libres, on sait seulement démontrer des décroissances en temps sous forme intégrale. On obtient par

exemple, pour Schrödinger, le résultat suivant, qui suffira pour les besoins de cette section. (Ce résultat sera généralisé dans la proposition 4.1 ci-dessous). On utilise les notations $\text{Min}_{\neq}(a,b) = \text{Min}(a,b)$ si $a \neq b$, $\text{Min}_{\neq}(a,b) = a - \epsilon$ si $a = b$, pour $\epsilon > 0$ arbitrairement petit, et $a_+ = \text{Max}(a,0)$.

LEMME 3.3 (Schrödinger)

Soit $2 \leq r \leq \infty$, $\delta(r) < 2$ et

$$(\delta(r)-1)_+ \leq 2/q \leq \text{Min}_{\neq}(\delta(r), 1) . \tag{3.23}$$

Alors l'application $\varphi \rightarrow U(\cdot)\varphi$ est bornée de H^1 dans $L^q(\mathbb{R}, L^r)$.

Motivé en partie par le lemme 3.3, on veut pouvoir utiliser des espaces \mathcal{X}_0 du type suivant. On choisit sur X une famille de semi-normes $||\cdot||_{\alpha}$ (telles que $||u||_{\alpha} \leq ||u||_X$ pour tout $u \in X$), auxquelles on impose d'être dans $L^{q(\alpha)}$ dans la variable temps pour des $q(\alpha)$ donnés, $1 \leq q(\alpha) \leq \infty$. Plus précisément, on veut définir les espaces \mathcal{X}_0 en prenant pour norme

$$||u||_{OI} = \text{Max}\{ || ||u(\cdot)||_X ; L^{\infty}(I) || , \text{Sup}_{\alpha} || ||u(\cdot)||_{\alpha} ; L^{q(\alpha)}(I) || \} \tag{3.24}$$

On peut bien entendu considérer des espaces plus compliqués faisant appel à une famille de semi-normes à décroissances ponctuelles et une autre famille avec des propriétés d'intégrabilité, ou encore imposer des propriétés d'intégrabilité dans des espaces de type L^q pondérés par un facteur dépendant du temps. On se limitera dans les applications au choix (3.24), qui a l'avantage d'assurer l'invariance par translation dans le temps.

L'hypothèse générale qui remplace (H_0) est maintenant plus compliquée car, contrairement au cas précédent, les normes des intégrales F et G ne sont plus comparables. Comme on a besoin de contrôler à la fois F , pour démontrer l'existence locale, et G , pour effectuer les changements d'origine dans l'équation intégrale (3.5) et démontrer les propriétés de continuité, il faut formuler cette hypothèse séparément pour F et pour G . En pratique cependant, les conditions sur F et sur G seront établies dans les applications à partir des mêmes estimations. Une deuxième complication apparaît dans la généralisation de la condition (H_0) . Dans le cas où l'équation initiale (1.1) et les normes (cf. (3.24)) sont invariantes par translation dans le temps, il en est de même de la constante $C_0(I, \rho)$ qui apparaît dans (3.9). En particulier, si $I = [T, \infty)$, $C_0(I, \rho)$ est indépendant de I et ne peut donc pas tendre vers zéro quand I tend vers zéro. Cette propriété est remplacée ici par le fait que pour u fixé dans $\mathcal{X}_0([T_0, \infty))$, la partie intégrale de (3.24) tend vers zéro quand $I = [T, \infty)$, tend vers zéro, $T \geq T_0$. De façon abstraite, on considère maintenant la situation suivante. Pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$, on se donne un espace de Banach $\mathcal{X}_0(I) \subset \mathcal{C}(I, X)$, tel que pour I compact, $\mathcal{X}_0(I) = \mathcal{C}(I, X)$ avec des normes équivalentes. Pour $I \subset J$, on suppose que la restriction à I applique $\mathcal{X}_0(J)$ sur $\mathcal{X}_0(I)$ en décroissant la norme. Pour tout intervalle I , on suppose en outre qu'il existe sur $\mathcal{X}_0(I)$ une semi norme $[.]_I$ satisfaisant les propriétés suivantes.

(1) - Pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et tout $u \in \mathcal{X}_0(I)$, $[u]_I \leq |u|_{0I}$.

(2) - Pour tout intervalle $J \subset \mathbb{R}$, tout $u \in \mathcal{X}_0(J)$ et tout $I \subset J$, $[u|_I]_I \leq [u]_J$ et $[u|_I]_I$ tend vers zéro quand I tend vers zéro.

Il résulte du premier point que pour tout $\sigma \geq 0$ et tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$,

l'ensemble $D(I, \sigma) = \{u \in \mathcal{X}_0(I) : [u]_I \leq \sigma\}$ est fermé dans $\mathcal{X}_0(I)$.

On peut alors formuler la généralisation appropriée de l'hypothèse (H_0) .

(H'_0) Pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et tout $u \in \mathcal{X}_0(I)$,

(a) - La fonction $\tau \rightarrow U(t-\tau)f_0(u(\tau))$ est localement Bochner intégrable de $\tau \in I$ à valeurs dans X ,

(b) - L'application $(t_1, t_2) \rightarrow G([t_1, t_2], u)$ est continue de $\bar{I} \times \bar{I}$ dans $\mathcal{X}_0(\mathbb{R})$, et l'application $s \rightarrow F(s, u)$ est continue de \bar{I} dans $\mathcal{X}_0(I)$.

(c) - Pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$, tout $\rho > 0$, tout $\sigma \in (0, \rho]$, et tous les $u_1, u_2 \in B_0(I, \rho) \cap D(I, \sigma)$, les majorations suivantes sont satisfaites

$$|G(I, u_1) - G(I, u_2)|_{0, \mathbb{R}} \leq C_0(I, \rho, \sigma) |u_1 - u_2|_{0I} \tag{3.25}$$

$$\sup_{s \in I} |F(s, u_1) - F(s, u_2)|_{0I} \leq C_0(I, \rho, \sigma) |u_1 - u_2|_{0I} \tag{3.26}$$

$$\sup_{s \in I} [F(s, u_i)]_I \leq \sigma C_0(I, \rho, \sigma) \tag{3.27}$$

où C_0 est séparément croissante de I, ρ et σ et tend vers zéro quand I tend vers zéro et σ tend vers zéro à ρ fixé.

Le principal résultat est alors qu'après remplacement de l'hypothèse (H_0) par (H'_0) , toutes les conclusions de la proposition 3.1 restent valables sans changement. Dans la preuve, la principale modification concerne la partie (2). L'hypothèse (H'_0) entraîne que, si

$U(\cdot)\tilde{u}_0 \in B_0(I, \rho) \cap D(I, \sigma)$ et si I et σ sont assez petits pour que $C_0(I, \rho, \sigma) \leq 1/2$, alors l'ensemble (fermé) $B_0(I, 2\rho) \cap D(I, 2\sigma)$ est invariant par le second membre de (3.5), et ce dernier y est contractant (par un facteur $1/2$). Pour \tilde{u}_0 donné dans X_0 , on satisfait la condition requise en prenant par exemple $\rho = ||\tilde{u}_0 ; X_0||$ et $\sigma = [U(\cdot)\tilde{u}_0]_I$, si bien que pour $I = [T, \infty)$, σ tend vers zéro quand I tend vers zéro. Noter cependant que, contrairement à ce qui se passe dans la première version de la théorie, la dépendance de T en \tilde{u}_0 ne se réduit pas à une dépendance de T en ρ .

Les résultats pour données petites (proposition 3.2) restent vrais avec des modifications mineures. En fait, pour ces résultats, les semi normes $[.]_I$ sont inutiles. Si on dispose de l'hypothèse (H'_0) , on les fait disparaître en prenant $\sigma = \rho$. On doit alors supposer que $C_0(\mathbb{R}, \rho, \rho)$ tend vers zéro quand $\rho \rightarrow 0$, et les conclusions de la proposition 3.2 restent valables sans changement.

On applique maintenant la théorie précédente à l'équation SNL, laissant de côté l'équation KGNL pour laquelle le problème n'a pas été exploré de façon systématique dans les espaces appropriés (voir cependant [D-19], [D-14] pour des cas particuliers). On choisit comme précédemment $X = L^{r_1} \cap L^{r_2}$, $\bar{X} = L^{\bar{r}_1} \cap L^{\bar{r}_2}$, et on définit les espaces $\mathcal{X}_0(I)$ et les semi normes auxiliaires $[.]_I$ par

$$|\varphi|_{OI} = \sup_{r_1 \leq r \leq r_2} \text{Max}\{||\varphi ; L^\infty(I, L^r)||, ||\varphi ; L^{q(r)}(I, L^r)||\} \quad (3.28)$$

$$[\varphi]_I = \sup_{r_1 \leq r \leq r_1} ||\varphi ; L^{q(r)}(I, L^r)|| \quad (3.29)$$

pour le choix de $q(r)$ donné ci-après. Ce choix dépend de deux paramètres

$\varepsilon, \delta \in (0, 1]$, de façon à pouvoir établir le contact d'une part avec la théorie précédente, et d'autre part avec le lemme 3.3. Plus précisément, on prend $(1+\varepsilon)/q(r) = \bar{\delta}(r) \equiv \text{Min}(\delta(r), \delta)$. Pour ε tendant vers zéro, les décroissances obtenues approchent (en termes d'homogénéité) celles contenues dans (3.12), tandis que pour $\varepsilon = 1$, elles sont un cas particulier de celles obtenues dans le lemme 3.3. En particulier pour $\varepsilon = 1$, $X_0 \supset X_e (= H^1)$, ce qui était un des buts recherchés.

Les hypothèses sur f comprennent, outre les hypothèses (H_1) et (H_2) déjà utilisées à temps fini, l'hypothèse (H_6) ci-dessous, qui remplace (H_5) dans le contexte présent

$$(H_6) \quad p_1 \geq \text{Max}\{\delta^{-1}(1+\varepsilon(1-\delta(r_1))), 1 + \frac{2}{n}(1+\varepsilon+(1-\varepsilon)\bar{\delta}(r_2))\} . \quad (3.30)$$

On obtient alors le résultat suivant ([D-7], proposition 3.1 et 3.2).

PROPOSITION 3.4 (SNL)

Soit X et $\mathfrak{X}_0(\cdot)$ comme ci-dessus. On suppose que f satisfait (H_1) , (H_2) et (H_6) . Alors pour l'équation SNL, l'hypothèse (H'_0) est satisfaite et les conclusions des propositions 3.1 et 3.2 s'appliquent.

Esquisse de preuve

Comme pour la proposition 3.3, il suffit d'estimer $G(I, \varphi)$ et $F(s, \varphi)$ pour $\varphi \in B_0(I, \rho) \cap D(I, \sigma)$ et $s \in I$. On part de la première inégalité de (3.14) et d'une inégalité analogue pour $F(s, \varphi)$, et on estime l'intégrale sur le temps dans les L^q appropriés en injectant l'intégrabilité disponible pour les normes du second membre par le fait que $\varphi \in \mathfrak{X}_0(I)$ et en utilisant l'inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev ([G-2], p.117). Sous l'hypothèse (H_6) , on obtient par un calcul élémentaire

$$\left. \begin{aligned} & \|G(I, \varphi) ; L^\infty(\mathbb{R}, L^r)\| \\ & \|F(s, \varphi) ; L^\infty(I, L^r)\| \end{aligned} \right\} \leq c [\varphi]_I^{\gamma/2} \sum_j |\varphi|_{OI}^{p_j^{-\gamma/2}} \quad (3.31)$$

$$\left. \begin{aligned} & \|G(I, \varphi) ; L^{q(r)}(\mathbb{R}, L^r)\| \\ & \|F(s, \varphi) ; L^{q(r)}(I, L^r)\| \end{aligned} \right\} \leq c [\varphi]_I^{1+\gamma} \sum_j |\varphi|_{OI}^{p_j^{-1-\gamma}} \quad (3.32)$$

avec $\gamma = (1+\epsilon) (1-\delta(r_2))/\bar{\delta}(r_2) > 0$

qui conduit finalement à

$$C_o(I, \rho, \sigma) = c \sigma^{\gamma/2} \sum_j \rho^{p_j^{-1-\gamma/2}} \quad (3.33)$$

Noter que C_o ne dépend pas explicitement de I , ainsi que le laisse attendre l'invariance par translation dans le temps. □

On note que l'hypothèse (H_6) pour ϵ assez petit se réduit à (H_5) . Les deux théories conduisant aux propositions 3.3 et 3.4 permettent donc de traiter les mêmes interactions. D'autre part, pour $\epsilon = 1$ (cas où $X_o \supset X_e$), (H_6) se réduit à $p_1 \geq 1+4/n$. On verra dans la section suivante que pour $n \geq 3$ et sous l'hypothèse $p_1 > 1+4/n$, on obtient en fait la complétude asymptotique dans X_e pour des interactions répulsives.

On conclut cette section en combinant les résultats précédents sur le problème de Cauchy local à l'infini avec les résultats de la section précédente concernant la globalisation à temps fini pour obtenir l'existence de solutions dispersives (à $+\infty$ ou à $-\infty$) définies pour tout temps et l'existence des opérateurs d'onde. Le seul point délicat est le passage du temps fini à l'infini (et réciproquement) des lois de conser-

vation qui définissent l'espace d'énergie. On continue à se limiter à l'équation SNL et aux solutions dispersives à temps positif.

PROPOSITION 3.5 (SNL)

Soit X comme ci-dessus et $\mathcal{X}_0(\cdot)$ défini par (3.12) ou (3.28). On suppose que f satisfait (H_1) , (H_2) , (H_3) et suivant le cas, (H_5) ou (H_6) . Soit $\tilde{\varphi}_0 \in X_0 \cap H^1$, $T \in \mathbb{R}$, $I = [T, \infty)$, $t_0 \in \bar{I}$ et soit $\varphi \in \mathcal{X}_0(I)$ solution de l'équation (3.5). Alors $\tilde{\varphi} \in \mathcal{C}(\bar{I}, H^1)$ et pour tout t dans I , φ satisfait les lois de conservation

$$\|\varphi(t)\|_2 = \|\varphi_+\|_2 \quad \text{et} \quad E(\varphi(t)) = \frac{1}{2} \|\nabla\varphi_+\|_2^2. \quad (3.34)$$

Esquisse de preuve et commentaire

φ_+ est défini dans X_0 comme $\tilde{\varphi}^{(+\infty)}$ par la proposition 3.1, partie (1). On doit démontrer, si $t_0 < \infty$, que $\varphi_+ \in H^1$, en sachant déjà que $\varphi \in \mathcal{C}(I, H^1)$ par la proposition 2.3, et si $t_0 = \infty$, que $\varphi(t) \in H^1$ pour un $t < \infty$ en sachant que $\varphi_+ \in H^1$. On doit montrer en outre la continuité de φ dans H^1 à l'infini, et les lois de conservation. La méthode combine plusieurs passages à la limite (en particulier dans les lois de conservation), les continuités connues dans X_0 , et des arguments de compacité faible dans H^1 . Dans la deuxième égalité de (3.34), noter l'absence de terme potentiel au second membre. Cette forme de la loi de conservation est un reflet de la propriété d'entrelacement des opérateurs d'onde. \square

Le résultat d'existence des solutions dispersives est maintenant une simple juxtaposition des propositions 2.4, 3.1 et 3.4.

PROPOSITION 3.5 (SNL)

Soit X comme ci-dessus et X_0 défini par (3.12) ou (3.28). On suppose que f satisfait (H_1) , (H_2) , (H_3) , (H_4) , et suivant le cas, (H_5) ou (H_6) . Alors

(1) - Pour tout $\tilde{\varphi}_0 \in H^1 \cap X_0$, les solutions de l'équation (3.5) construites dans la proposition 3.1, partie (2), se prolongent en solutions dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}, H^1) \cap L^\infty(\mathbb{R}, H^1)$ et satisfont les lois de conservation (3.34) pour tout $t \in \mathbb{R}$. Pour toute solution φ ainsi obtenue, $\tilde{\varphi} \in \mathcal{C}(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, H^1)$.

(2) - Les opérateurs d'onde Ω_\pm sont des applications continues dans $X_0 \cap H^1$ dans lui-même, et sont bornés dans la norme de H^1 .

Les solutions obtenues dans la partie (1) sont les solutions dispersives à $+\infty$. Elles n'ont aucune raison d'être également dispersives à $-\infty$ sous les hypothèses faites. Dans le cas particulier où $X_0 \supset H^1$, c'est à dire dans la deuxième théorie associée à (3.28) avec $\varepsilon = 1$, la partie (2) entraîne que sous les hypothèses (H_1) , (H_2) , (H_3) , (H_4) et $p_1 \geq 1+4/n$, les opérateurs d'onde sont des opérateurs bornés et continus de H^1 dans H^1 .

Les informations venant des lois de conservation peuvent également être combinées avec les résultats pour des données petites. En particulier les hypothèses ci-dessus entraînent la complétude asymptotique pour des données petites dans H^1 . On renvoie à [D-7], section 4, pour plus de détails.

IV - DECROISSANCE EN TEMPS DES SOLUTIONS D'ENERGIE FINIE

Le but principal de cette section est d'exposer la méthode de Morawetz et Strauss de démonstration de la complétude asymptotique et plus généralement d'étude des décroissances en temps des solutions des équations SNL et KGNL. Cette méthode a été d'abord appliquée à l'équation KGNL en dimension 3 et pour des solutions particulières dans l'article original [D-11]. Elle a ensuite été généralisée en ce qui concerne les hypothèses sur l'interaction, et étendue aux dimensions $n \geq 3$ et aux solutions quelconques d'énergie finie dans [D-12], [D-1], [D-2], [D-3], [D-8]. D'autre part, la méthode a été appliquée à l'équation NLS en dimension 3 dans [D-9], et généralisée dans [D-7], [D-8]. Le présent exposé s'inspire des articles [D-7], [D-8] auxquels on renvoie pour plus de détails. La méthode s'applique de façon particulièrement satisfaisante à l'équation SNL, et on exposera ce cas seulement avec des énoncés complets. En ce qui concerne l'équation KGNL, on se limitera à de brèves indications et à des renvois à la littérature. La mise en oeuvre de la méthode à son niveau naturel de généralité nécessite une technique d'estimation pour laquelle les espaces de Besov constituent l'outil naturel. On commence donc par rappeler leur définition et en déduire un certain nombre d'estimations préliminaires qui seront nécessaires par la suite. On renvoie à [G-1] pour plus de détails.

La définition des espaces de Besov procède de l'idée suivante (pour toute fonction v d'une variable $x \in \mathbb{R}^n$, on note \hat{v} la transformée de Fourier de v , fonction d'une variable $\xi \in \mathbb{R}^n$ conjuguée de x). Soit v définie dans \mathbb{R}^n . On décompose $v = \sum v_j$, où $\text{Supp } \hat{v}_j \subset \{ \xi : 2^{j+1} \leq |\xi| \leq 2^{j+1} \}$ si bien que les v_j sont des fonctions \mathcal{C}^∞ (en fait analytiques). On teste le comportement à l'infini de v (en fait des v_j) dans un espace L^r et le comportement local de v par l'intermédiaire du comportement en j de la sui-

te v_j dans un espace \mathcal{L}^q pondéré par un facteur $2^{\rho j}$ (avec $\rho \in \mathbb{R}$) qui simule une dérivée d'ordre ρ . Techniquement, on choisit $\hat{\Psi} \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq \hat{\Psi} \leq 1$, $\hat{\Psi}(\xi) = 1$ (resp. 0) pour $|\xi| \leq 1$ (resp. ≥ 2), on pose $\hat{\phi}_0(\xi) = \hat{\Psi}(\xi) - \hat{\Psi}(2\xi)$ et $\hat{\phi}_j(\xi) = \hat{\phi}_0(2^{-j}\xi)$ si bien que $\text{Supp } \hat{\phi}_j \subset \{\xi : 2^{j-1} \leq |\xi| \leq 2^{j+1}\}$, et $\hat{\Psi}(\xi) + \sum_{j \geq 1} \hat{\phi}_j(\xi) = 1$ pour tout ξ , avec pour chaque ξ au plus deux termes non nuls dans la somme. Pour $\rho \in \mathbb{R}$ et $1 \leq q, r \leq \infty$, on définit l'espace de Besov $B_{r,q}^\rho$ par

$$B_{r,q}^\rho = \{v \in \mathcal{S}' : \|v ; B_{r,q}^\rho\| \equiv \left\{ \|\Psi * v\|_r^q + \sum_{j \geq 1} 2^{\rho j q} \|\phi_j * v\|_r^q \right\}^{1/q} < \infty\} \quad (4.1)$$

et l'espace $F_{r,q}^\rho$ par

$$F_{r,q}^\rho = \{v \in \mathcal{S}' : \|v ; F_{r,q}^\rho\| \equiv \left\| \left\{ \|\Psi * v\|_r^q + \sum_{j \geq 1} 2^{\rho j q} \|\phi_j * v\|_r^q \right\}^{1/q} \right\|_r < \infty\}. \quad (4.2)$$

Il est clair que la norme dans $B_{r,q}^\rho$ est fonction croissante de ρ et décroissante de q . Il résulte de l'inégalité de Minkowski que $B_{r,q}^\rho \subset F_{r,q}^\rho$ si $r \geq q$, $B_{r,q}^\rho \supset F_{r,q}^\rho$ si $r \leq q$, pour $1 \leq r, q \leq \infty$. Ce résultat permet de comparer les espaces de Besov aux espaces de Sobolev définis par

$$H_r^\rho = \{v : \|v ; H_r^\rho\| \equiv \|(1-\Delta)^{\rho/2} v\|_r < \infty\} \quad (4.3)$$

en utilisant le fait que $H_r^\rho = F_{r,2}^\rho$ pour $1 < r < \infty$, (ce résultat n'est pas élémentaire et se démontre au moyen du théorème de Mikhlín-Hörmander). En particulier

$$\left\{ \begin{array}{l} B_{r,2}^\rho \subset H_r^\rho \subset B_{r,r}^\rho \quad (\equiv F_{r,r}^\rho) \\ B_{\bar{r},2}^\rho \supset H_r^\rho \supset B_{\bar{r},\bar{r}}^\rho \quad (\equiv F_{\bar{r},\bar{r}}^\rho) \end{array} \right. \quad 2 \leq r < \infty \quad (4.4)$$

Les inégalités de Sobolev dans les espaces de Besov résultent immédiatement de l'inégalité de Young et d'un argument d'homogénéité. On obtient l'inclusion

$$B_{r,q}^\rho \subset B_{r',q}^{\rho'} \quad (4.5)$$

pour $1 \leq r, q, r' \leq \infty$, $\rho \geq \rho'$, $\rho + \delta(r) = \rho' + \delta(r')$, et l'inégalité correspondante pour les normes. L'inégalité de Hölder entraîne immédiatement la propriété de convexité suivante : si $(\rho, 1/r, 1/q)$ est un barycentre d'un nombre fini de triplets $(\rho_i, 1/r_i, 1/q_i)$, alors

$$B_{r,q}^\rho \supset \bigcap_i B_{r_i, q_i}^{\rho_i} \quad (4.6)$$

et la norme dans $B_{r,q}^\rho$ est estimée par la formule barycentrique évidente.

Les espaces de Besov peuvent être définis au moyen d'autres normes équivalentes à (4.1). Particulièrement utile sera la suivante, valable pour $1 \leq r, q \leq \infty$, $0 < \rho < 1$:

$$\|v ; B_{r,q}^\rho\| \sim \|v\|_r + \left\{ \int_0^\infty \frac{dt}{t} t^{-\rho q} \sup_{|y| \leq t} \|v - \tau_y v\|_r^q \right\}^{1/q} \quad (4.7)$$

où τ_y désigne la translation par $y \in \mathbb{R}^n$: $(\tau_y v)(x) = v(x-y)$. En utilisant (4.7), on obtient facilement l'estimation suivante, qui est le point de départ de toutes les estimations ultérieures du terme d'interaction.

LEMME 4.1

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, $|f'(z)| \leq C|z|^{p-1}$, $1 \leq p < \infty$; soit $0 < \lambda < 1$, $1 \leq \bar{\ell} \leq k \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, $1/s = 1/\bar{\ell} - 1/k$. Alors

$$\|f(\varphi) ; B_{\bar{\ell},q}^\lambda\| \leq C \|\varphi ; B_{k,q}^\lambda\| \|\|\varphi\|^{p-1}\|_s. \quad (4.8)$$

PREUVE

On écrit

$$f(\varphi) - \tau_Y f(\varphi) = f(\varphi) - f(\tau_Y \varphi) = (\varphi - \tau_Y \varphi) \int_0^1 d\alpha f'(\alpha\varphi + (1-\alpha)\tau_Y \varphi)$$

et on estime

$$\|f(\varphi) - \tau_Y f(\varphi)\|_{\bar{L}} \leq C \|\varphi - \tau_Y \varphi\|_k \|\varphi\|_s^{p-1},$$

d'où (4.8) résulte immédiatement en utilisant (4.7). □

On étudie maintenant dans des espaces de Besov appropriés, le groupe d'évolution libre $U(t)$ et les solutions d'énergie finie de l'équation libre (1.2). On commence par l'équation SNL.

LEMME 4.2 (SNL)

Soit $2 \leq r \leq \infty$ et $\rho \in \mathbb{R}$. Alors

$$(1) - \|U(t)\varphi ; B_{r,2}^\rho\| \leq (2\pi|t|)^{-\delta(r)} \|\varphi ; B_{r,2}^\rho\|. \quad (4.9)$$

(2) - Pour tout $\lambda \geq 0$

$$\|U(t)\varphi ; B_{r,2}^{\rho-\lambda}\| \leq \mu(t) \|\varphi ; B_{r,2}^{\rho+\lambda}\| \quad (4.10)$$

avec
$$\mu(t) = C \text{ Min } \{ |t|^{-\delta(r)}, |t|^{-(\delta(r)-\lambda)_+} \}. \quad (4.11)$$

PREUVE

La première partie résulte immédiatement de (2.6) et de la définition (4.1). La deuxième résulte de la première et de l'inclusion triviale des espaces de Besov pour différentes valeurs de ρ (resp. de l'inclusion (4.5)) en ce qui concerne le premier (resp. le second) terme du minimum dans (4.11). □

Les estimations ponctuelles en temps du groupe d'évolution libre entraînent des propriétés d'intégrabilité en temps des solutions de l'équation libre. Il est commode d'exprimer ces dernières dans des espaces dont les normes possèdent les propriétés suivantes.

* Elles sont invariantes par translation dans le temps, comme le sont les équations (1.1) - (1.4) elles mêmes.

* Elles contiennent deux paramètres indépendants, dont l'un caractérise la régularité locale et l'autre le comportement à l'infini.

* Elles sont compatibles avec une localisation stricte, de façon à pouvoir par exemple s'appliquer aux solutions du problème de Cauchy dans un intervalle avec donnée initiale en une extrémité.

Ces conditions sont satisfaites par des normes obtenues en découpant \mathbb{R} en intervalles unités, en testant la régularité locale en t dans l'espace L^q de chaque intervalle, et le comportement à l'infini de la suite ainsi obtenue dans ℓ^m . Plus précisément, soit γ_t l'intervalle unité de centre $t \in \mathbb{R}$, soit I un intervalle de \mathbb{R} , B un espace de Banach, et $1 \leq m, q \leq \infty$. On définit l'espace $\ell^m(L^q, I, B)$ comme l'ensemble des fonctions mesurables de I dans B pour lesquelles la norme suivante est finie :

$$\|\varphi : \ell^m(L^q, I, B)\| \equiv \sup_{s \in \mathbb{Z}_0} \left(\|\varphi(\cdot)\|_B ; L^q(I \cap \gamma_{z+s}) \right) ; \ell^m \|\varphi\| < \infty$$

(la variable $z \in \mathbb{Z}$ est l'argument de la suite testée dans ℓ^m). Pour simplifier, on omettra I dans la notation si $I = \mathbb{R}$ et B si $B = \mathbb{C}$.

On cherche alors des estimations des solutions des équations libres dans des espaces du type $\ell^m(L^q, B_{r,2}^0)$. Le schéma qui conduit à de telles estimations, généralisant ainsi des résultats de Strichartz [D-21],

est le suivant : soit B_0 un espace de Banach de fonctions de \mathbb{R}^n dans \mathbb{C} et B son dual, T_0 un espace de Banach de fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{C} et T son dual, $T_0(B_0)$ l'espace des fonctions mesurables φ de \mathbb{R} dans B_0 telles que $\|\varphi(\cdot) ; B_0\| \in T_0$, $T(B)$ défini de façon analogue, de sorte que $T(B)$ est le dual de $T_0(B_0)$. On suppose que $\mathcal{Y}(\mathbb{R}^n) \equiv \mathcal{Y}_n$ est dense dans B_0 , que \mathcal{Y}_1 est dense dans T_0 , et donc \mathcal{Y}_{n+1} dense dans $T_0(B_0)$. Les dualités sont supposées réalisées par (prolongement du) produit scalaire dans L^2 . En pratique, la situation précédente se présentera avec $B_0 = B_{\mathbb{R},2}^0$ et $T_0 = \mathcal{L}^m(\overline{L^q})$ pour $2 \leq r,m,q \leq \infty$. On peut alors énoncer le résultat suivant.

LEMME 4.3

Soit B_0, B, T_0 et T comme ci-dessus. Soit $U(\cdot)$ un groupe unitaire fortement continu dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. On suppose en outre que pour tout $t \neq 0$, $U(t)$ est borné de B_0 dans B et satisfait une majoration

$$\|U(t)\varphi ; B\| \leq \mu(t) \|\varphi ; B_0\| \tag{4.12}$$

et que la convolution avec μ est un opérateur borné de T_0 dans T . Alors l'application $\varphi \mapsto U(\cdot)\varphi$ est bornée de L^2 dans $T(B)$.

PREUVE

Par densité et dualité, il suffit de montrer que

$$\langle \theta, U(\cdot)\varphi \rangle_{n+1} \leq C \|\varphi\|_2 \|\theta ; T_0(B_0)\| \tag{4.13}$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{Y}_n$ et $\theta \in \mathcal{Y}_{n+1}$, où \langle, \rangle_{n+1} est le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R}^{n+1})$. Or, par l'unitarité de U ,

$$\begin{aligned} |\langle \theta, U(\cdot)\varphi \rangle_{n+1}| &= |\langle \int d\tau U(-\tau)\theta(\tau, \cdot), \varphi \rangle_n| \\ &\leq \|\varphi\|_2 \|\int d\tau U(-\tau)\theta(\tau, \cdot)\|_2 \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} & \left\| \int d\tau U(-\tau)\theta(\tau, \cdot) \right\|_2^2 = \left| \int dt \langle \theta(t, \cdot), \int d\tau U(t-\tau)\theta(\tau, \cdot) \rangle_n \right| \\ & \leq \|\theta ; T_0(B_0)\| \left\| \int d\tau U(\cdot-\tau)\theta(\tau, \cdot) ; T(B) \right\| \\ & \leq C \|\theta ; T_0(B_0)\|^2 \end{aligned}$$

en vertu des hypothèses sur U et μ , ce qui achève la preuve de (4.13). \square

Pour injecter les estimations du lemme 4.2 dans le lemme 4.3, on a besoin du résultat suivant.

LEMME 4.4

Soit $\mu(t) = \text{Min}(|t|^{-a}, |t|^{-b})$, avec $0 \leq a < 1$ et $a \leq b$. Alors la convolution avec μ est un opérateur borné de $\mathcal{L}^{\bar{m}, \bar{q}}(L^q)$ dans $\mathcal{L}^m(L^q)$ avec $2/q = a$ et $2/m = \text{Min}_{\neq}(b, 1)$.

PREUVE

Résulte immédiatement de l'inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev ([G-2], p. 117) pour le comportement local (variables a et q) et pour le comportement à l' ∞ (variables b et m) si $b < 1$, et de l'inégalité de Young pour le comportement à l'infini si $b \geq 1$. \square

En rassemblant les lemmes 4.2, 4.3 et 4.4, on obtient facilement les propriétés suivantes des solutions d'énergie finie de l'équation de Schrödinger libre.

PROPOSITION 4.1 (Schrödinger)

Soit $2 \leq r \leq \infty$, $\rho \leq 1$, $\sigma \equiv \rho + \delta(r) - 1 < 1$, $2/q = \sigma_+$ ($\equiv \text{Max}(\sigma, 0)$)

et $2/m = \text{Min}_{\neq}(\delta(r), 1)$. Alors l'application $\varphi \rightarrow U(\cdot)\varphi$ est bornée de H^1 dans $\mathcal{L}^m(L^q, B_{r,2}^0)$.

Il est commode de représenter le résultat dans le plan des variables σ et ρ qui caractérisent respectivement le degré d'homogénéité et l'ordre de dérivation dans les espaces $B_{r,2}^0$ (voir figure 4). On note que la variable q (régularité locale en temps) ne dépend que de σ (régularité locale dans l'espace) et que la variable m (comportement à l'infini en temps) ne dépend que de r (comportement à l'infini dans l'espace). Les propriétés d'intégrabilité dans l'espace temps des solutions de l'équation de Schrödinger libre citées dans la section 3 (lemme 3.3) résultent de la proposition 4.1 avec $\rho = 0$ et des inclusions (4.4).

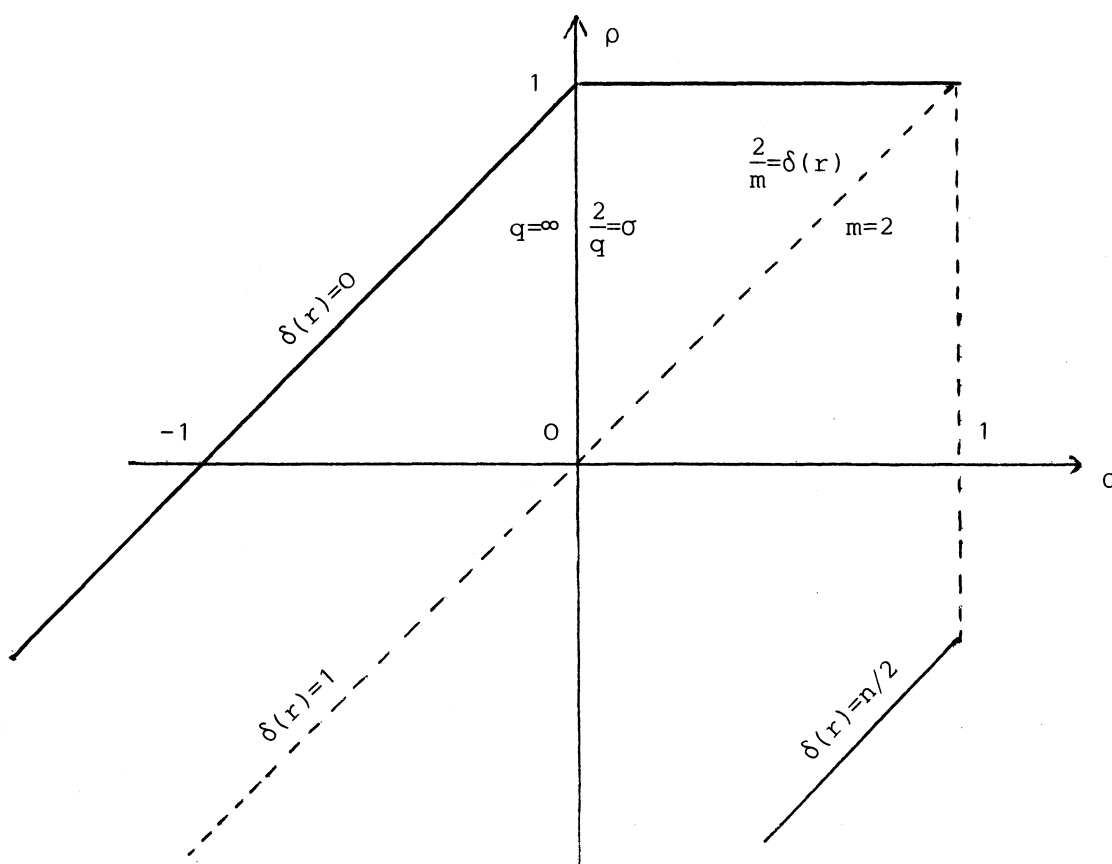


Figure 4. Propriétés des solutions de l'équation de Schrödinger libre
(Proposition 4.1)

Pour l'équation de Klein Gordon libre massive on peut démontrer des résultats analogues, mais un peu plus compliqués. On renvoie à [D-8], section 2, en particulier Lemme 2.1, Propositions 2.1 et 2.2 pour les détails.

On dispose maintenant des estimations adéquates du terme d'interaction et de l'évolution libre associés aux équations SNL et KGNL et on passe à l'étude des comportements asymptotiques en temps de leurs solutions. On supposera désormais sans le répéter dans les énoncés des résultats que le terme d'interaction f satisfait les hypothèses (H_1) , (H_3) avec $V \geq 0$ et, dans le cas de l'équation SNL, la condition (2.23). Ces conditions assurent l'existence et l'unicité de solutions globales du problème de Cauchy dans $\mathcal{E}_b(\mathbb{R}, X_e)$ pour des données initiales dans X_e . De telles solutions seront désormais appelées solutions d'énergie finie.

Une application directe des estimations précédentes fournit tout d'abord une propriété de majoration uniforme en temps des solutions d'énergie finie des équations SNL et KGNL, résultat qui sera utile pour la suite. Plus précisément, on peut montrer que pour $n \geq 3$, les solutions d'énergie finie appartiennent à $\ell^\infty(L^q, B_{r,2}^0)$ pour les mêmes valeurs de ρ, r et q que pour les équations libres correspondantes. Pour l'équation SNL, le résultat peut être formulé comme suit (cf. Proposition 5.3 dans [D-8]).

PROPOSITION 4.2 (SNL)

On suppose $n \geq 3$, $p_1 > 1+2/n$, r, ρ et q comme dans la proposition 4.1 avec en outre $\rho < 1$. Alors toute solution d'énergie finie de l'équation SNL appartient à $\ell^\infty(L^q, B_{r,2}^0)$ et est estimée dans cet espace en termes de $\|\varphi\|_2$ et de l'énergie $E(\varphi)$.

Esquisse de preuve

Il suffit de démontrer le résultat pour $0 \leq \rho < \sigma < 1$, $\sigma - \rho$ suffisamment petit. Le résultat pour $0 \leq \sigma \leq \rho$ s'en déduit par interpolation entre ce cas particulier et la majoration dans $L^\infty(H^1)$, et le résultat pour les autres valeurs de σ et ρ se déduit du précédent par les inclusions triviales des espaces de Besov et les inégalités de Sobolev. Dans le cas particulier $0 \leq \rho < \sigma < 1$, $\sigma - \rho$ petit, on utilise l'équation intégrale

$$\varphi(t) = U(t)\varphi_0 - i \int_0^t d\tau U(t-\tau)f(\varphi(\tau)) \tag{4.14}$$

et la majoration suivante de l'intégrand.

LEMME 4.5

Sous les hypothèses faites, il existe $\delta_>$, $\delta_<$ et ν tels que $0 \leq \delta_< < 1 < \delta_> \leq \delta(r)$, $0 \leq \nu < 1$ et

$$\|U(t)f(\varphi) ; B_{r,2}^0\| \leq M(\|\varphi ; H^1\|) \underset{\geq}{\text{Min}}(|t|^{-\delta_>}) (1 + \|\varphi ; B_{r,2}^0\|^\nu). \tag{4.15}$$

On note en particulier que dans le second membre de (4.15), le premier facteur est contrôlé en termes de $\|\varphi\|_2$ et de l'énergie $E(\varphi)$, le second facteur est intégrable dans \mathbb{R} , et le dernier est sous-linéaire dans la norme qu'on cherche à contrôler. Admettant provisoirement le lemme 4.5 et le fait que $\varphi \in L_{loc}^q(B_{r,2}^0)$, on achève facilement la preuve de la proposition. On se limite pour simplifier aux temps positifs. On définit

$$k(t) = \|\varphi(t) ; B_{r,2}^0\| \tag{4.16}$$

$$k_0(t) = \|U(t)\varphi_0 ; B_{r,2}^0\| \tag{4.17}$$

Soit χ_a la fonction caractéristique de l'intervalle $[0, a]$. On déduit de (4.14) en utilisant (4.15) et en estimant l'intégrale sur le temps par l'inégalité de Young

$$\begin{aligned} \|\chi_a k ; \ell^\infty(L^q)\| &\leq \|k_0 ; \ell^\infty(L^q)\| + M(\|\varphi ; L^\infty(\mathbb{R}, H^1)\|) \\ &\times C(1 + \|\chi_a k ; \ell^\infty(L^q)\|^v) \end{aligned} \quad (4.18)$$

d'où il résulte que le premier membre est majoré uniformément en a puisque $v < 1$, ce qui achève la preuve.

La démonstration du fait que $\varphi \in L^q_{loc}(B^0_{r,2})$ se fait par une méthode voisine mais plus simple, en utilisant une majoration analogue à (4.15). La démonstration du lemme 4.5 s'effectue en utilisant successivement les lemmes 4.2 et 4.1 et en estimant les normes de φ ainsi produites en termes des normes dans H^1 et dans $B^0_{r,2}$. On renvoie à [D-8], proposition 5.2 et lemme 5.2 pour les détails. \square

Pour l'équation KGNL, on obtient un résultat très voisin avec pratiquement les mêmes hypothèses sur l'interaction f (voir les propositions 3.1 et 3.2 de [D-8]).

On passe maintenant à l'étude des propriétés de décroissance en temps des solutions d'énergie finie des équations SNL et KGNL. Plus précisément on veut montrer que ces solutions appartiennent à $\ell^m(L^q, B^0_{r,2})$ pour les mêmes valeurs de ρ, r, q et m que pour les équations libres correspondantes, ou du moins pour un sous ensemble aussi grand que possible de valeurs de ces paramètres. Les résultats qu'on obtiendra dans ce sens, au moins pour l'équation SNL, donneront des propriétés d'intégrabilité en temps

plus fortes que celles qui figurent dans la définition des espaces \mathcal{D}_0 correspondant à (3.28) avec $\varepsilon = 1$, assurant ainsi la complétude asymptotique dans l'espace d'énergie.

Les propriétés précédentes ne sont certainement pas satisfaites si l'équation considérée admet des solutions stationnaires, de la forme $u(x,t) = e^{i\omega t} v(x)$, qui sont l'analogue dans le cas présent des états liés de l'équation de Schrödinger linéaire avec potentiel. Pour exclure cette possibilité, on devra, à une étape convenable de la preuve, faire une hypothèse de répulsivité des interactions. Cette hypothèse prendra la forme (H_7) qu'on donnera ci-dessous en temps utile.

Le point de départ de la méthode est l'inégalité de Morawetz-Strauss, formulée dans le lemme 4.6 ci-dessous. On introduit dans ce but le potentiel auxiliaire

$$W_1(z) = \bar{z} f(z) - V(z)$$

Noter que sous l'hypothèse (H_3) , $W_1(z) = W(|z|)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Si $V(z) = \lambda |z|^{p+1}$, alors $W_1(z) = \lambda \frac{p-1}{2} |z|^{p+1}$. On définit également $g(x) = (1 + |x|^2)^{-1/2}$, $g'(x) = (d/d|x|)g(x)$ et $g_1 = \nabla \cdot x(g) = n g + |x|g'$. On vérifie facilement que $(n-1)g \leq g_1 \leq n g$ et que $\Delta g_1 \leq 0$ pour $n \geq 3$.

LEMME 4.6

Soit $n \geq 3$. Soit φ une solution d'énergie finie de l'équation SNL ou $(\varphi, \dot{\varphi})$ une solution d'énergie finie de l'équation KGNL. Alors pour tous les $s, t \in \mathbb{R}$, $s \leq t$, on a

$$\int_s^t d\tau \int dx g_1(x) W_1(\varphi(\tau, x)) \leq \begin{cases} \left. \langle \varphi, -\frac{i}{2} (xg \cdot \nabla + \nabla \cdot xg)\varphi \rangle \right|_s^t & \text{pour SNL,} \\ \left. \text{Re} \langle \varphi, -(xg \cdot \nabla + \nabla \cdot xg)\varphi \rangle \right|_s^t & \text{pour KGNL.} \end{cases} \quad (4.19)$$

$$\left. \text{Re} \langle \varphi, -(xg \cdot \nabla + \nabla \cdot xg)\varphi \rangle \right|_s^t \quad \text{pour KGNL.} \quad (4.19')$$

PREUVE

La preuve comprend un calcul formel et sa justification. On présente d'abord le calcul formel. Soit $A = xg \cdot \nabla + \nabla \cdot xg$. Pour l'équation SNL, on calcule

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \varphi, -\frac{i}{2} A \varphi \rangle &= 2 \text{Re} \langle \frac{i}{2} \Delta \varphi - if(\varphi), -\frac{i}{2} A \varphi \rangle \\ &= -\frac{1}{2} \text{Re} \langle \Delta \varphi, A \varphi \rangle + \text{Re} \langle f(\varphi), A \varphi \rangle. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Pour l'équation KGNL, on calcule

$$\frac{d}{dt} \text{Re} \langle \dot{\varphi}, -A \varphi \rangle = -\text{Re} \langle \Delta \varphi, A \varphi \rangle + \text{Re} \langle f(\varphi), A \varphi \rangle \quad (4.21)$$

où on a utilisé le fait que l'opérateur A est antihermitien. A partir de ce point, le calcul formel est le même pour les deux équations. Un calcul élémentaire de commutateurs donne (avec $\hat{x} = x/|x|$)

$$\begin{aligned} -\text{Re} \langle \Delta \varphi, A \varphi \rangle &= 2 \langle \nabla \varphi, (g \mathbb{1} + |x|g'(\hat{x} \otimes \hat{x})) \nabla \varphi \rangle \\ &\quad - \frac{1}{2} \langle \varphi, (\Delta g_1) \varphi \rangle \geq 0 \end{aligned} \quad (4.22)$$

car la matrice $g \mathbb{1} + |x|g'(\hat{x} \otimes \hat{x})$ est positive et $\Delta g_1 \leq 0$, et

$$\text{Re} \langle f(\varphi), A \varphi \rangle = \int g_1(x) W_1(\varphi(x)) dx. \quad (4.23)$$

Les inégalités (4.19) et (4.19') résultent de (4.20) - (4.23) par intégration sur le temps.

La justification du calcul formel s'effectue par régularisation et passage à la limite, de la même façon que pour démontrer la conservation de l'énergie (voir [D-7], lemme 5.2 et [D-8], lemme 4.3 pour les détails). □

Si on suppose maintenant, comme on le fera plus loin, que $w_1 \geq 0$, les inégalités (4.19) et (4.19') entraînent, pour des solutions d'énergie finie, que pour tous s et $t \in \mathbb{R}$, $s \leq t$, on a

$$\int_s^t d\tau \int dx g(x) w_1(\varphi(\tau, x)) \leq (n-1)^{-1} x \begin{cases} 2 \|\varphi\|_2 \sqrt{2E} & \text{(SNL)} \\ 2E & \text{(KGNL)} \end{cases} \quad (4.24)$$

c'est à dire que $g w_1(\varphi) \in L^1(\mathbb{R}^{n+1})$. Cette propriété interdit en particulier un comportement de φ en $\varphi(x, t) \sim \Psi(x-vt)$ pour une vitesse de fuite v finie et un Ψ localisé (par exemple à support compact). Un tel comportement donnerait en effet

$$\int dx dt g(x) w_1(\varphi(x)) \sim \frac{1}{|v|} \int \frac{dt}{t} \int w_1(\Psi(x)) dx = \infty.$$

L'estimation (4.24) implique donc intuitivement soit un étalement de φ à grand temps, soit une fuite à une vitesse croissant assez vite. Pour montrer que c'est le premier cas qui se produit, il faut exclure le second, et on a besoin d'une majoration complémentaire. Cette seconde majoration est le seul élément de la démonstration qui est très différent pour les deux équations SNL et KGNL. Pour l'équation SNL, la majoration adéquate est la suivante.

LEMME 4.7(SNL)

Soit φ solution d'énergie finie de l'équation SNL, $\varphi_0 = \varphi(0)$.

Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $a > 0$,

$$\int_{|x| \geq a} dx |\varphi(t, x)|^2 \leq \int dx \text{Min}(1, \frac{|x|}{a}) |\varphi_0(x)|^2 + a^{-1} |t| \|\varphi\|_2 \sqrt{2E} \quad (4.25)$$

PREUVE

Formellement, on calcule, pour $h(x) = \text{Min}(1, |x|/a)$

$$\frac{d}{dt} \langle \varphi, h\varphi \rangle = \text{Im} \langle \varphi, \nabla h \cdot \nabla \varphi \rangle$$

Mais $\nabla h = \hat{x} a^{-1} \chi(|x| \leq a)$, d'où on déduit

$$\left| \frac{d}{dt} \langle \varphi, h\varphi \rangle \right| \leq a^{-1} \|\varphi\|_2 \|\nabla \varphi\|_2,$$

puis (4.25) par intégration. La justification du calcul formel procède comme précédemment. □

Pour l'équation KGNL, le résultat correspondant vient de la propagation à vitesse finie, qu'il est commode d'utiliser sous la forme d'inégalités locales d'énergie. Pour toute boule ouverte $\Omega = B(x_0, R)$ dans \mathbb{R}^n , on définit $\Omega_{\pm}(t) = B(x_0, R \pm |t|)$ (avec la convention que $B(x_0, R) = \emptyset$ si $R \leq 0$). On définit l'énergie locale dans la boule Ω par

$$E(\varphi, \Psi; \Omega) = \int_{\Omega} dx (|\Psi|^2 + |\nabla \varphi|^2 + |\varphi|^2 + V(\varphi)) \quad (4.26)$$

On obtient alors les inégalités suivantes (voir [D-8], lemme 4.2).

LEMME 4.7' (KGNL)

Soit $(\varphi, \dot{\varphi})$ solution d'énergie finie de KGNL. Alors pour toute

boule $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

$$E(\varphi(t), \dot{\varphi}(t) ; \Omega_-(t)) \leq E(\varphi(0), \dot{\varphi}(0) ; \Omega) , \quad (4.27)$$

$$E(\varphi(t), \dot{\varphi}(t) ; \left[\Omega_+(t) \right) \leq E(\varphi(0), \dot{\varphi}(0) ; \left[\Omega \right) . \quad (4.28)$$

PREUVE

Formellement, le $(n+1)$ - vecteur

$$\begin{cases} \theta_0 = |\dot{\varphi}|^2 + |\nabla\varphi|^2 + |\varphi|^2 + v(\varphi) \\ \theta = - 2 \operatorname{Re} \dot{\varphi} \nabla \varphi \end{cases}$$

satisfait $\dot{\theta}_0 + \nabla \cdot \theta = 0$. En intégrant (pour $t > 0$) dans le tronc de cône

$$Q(\Omega, t) = \{(t', x') : 0 \leq t' < t, x' \in \Omega_-(t')\}$$

et en utilisant le fait que $\theta_0 \geq |\theta|$, donc que le $(n+1)$ - vecteur (θ_0, θ) est sortant sur la surface latérale de $Q(\Omega, t)$, on obtient (4.27), qui, joint à la conservation de l'énergie, entraîne (4.28). \square

En pratique on utilisera les lemmes 4.7 et 4.7' pour montrer que

$$\int_{|x| \geq \Psi(t)} dx |\varphi(t, x)|^2 \rightarrow 0 \text{ quand } |t| \rightarrow \infty$$

pourvu que $\Psi(t)/|t| \rightarrow \infty$ pour SNL, ou que $\Psi(t) - |t| \rightarrow \infty$ pour KGNL, grâce aux majorations

$$\begin{aligned} \int_{|x| \geq \Psi(t)} dx |\varphi(t, x)|^2 \leq & \int dx \operatorname{Min}(1, |x|\Psi(t)^{-1}) |\varphi(0, x)|^2 + \\ & + |t|\Psi(t)^{-1} \|\varphi\|_2 \sqrt{2E} \text{ pour SNL ,} \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} \int_{|x| \geq \Psi(t)} dx |\varphi(t, x)|^2 \leq & E(\varphi(0), \dot{\varphi}(0) ; \left[B(0, \Psi(t) - |t|) \right) \\ & \text{pour KGNL .} \end{aligned} \quad (4.29')$$

On prendra $\Psi(t) = (1+|t|) \text{Log}(1+|t|)$ pour SNL et $\Psi(t) = 2|t|$ pour KGNL.

L'exploitation pratique des majorations données par les lemmes 4.6 et 4.7, 4.7' est basée sur l'idée suivante. Soit k une fonction de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R}^+ , par exemple continue, dont on veut établir la décroissance à l'infini. Supposons que

(1) - k satisfait une inégalité du type

$$k(t) \leq k_0(t) + C k(t)^\nu \quad (4.30)$$

où k_0 est une fonction connue de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R}^+ , $C \geq 0$ et $\nu > 1$.

(2) - k tend vers zéro à l'infini.

Alors il existe $a > 0$ tel que $C k(t)^{\nu-1} \leq 1/2$ pour $t \geq a$, et par suite $k(t) \leq 2 k_0(t)$ pour $t \geq a$. Autrement dit, une inégalité surlinéaire et une information faible de décroissance à l'infini assurent pour k la même décroissance à l'infini que k_0 . Dans le cas présent, on obtiendra non pas (4.30), mais une inégalité du type

$$k \leq k_0 + \mu * k^\nu \quad (4.31)$$

avec $\mu \in L^1$, qui jouera le même rôle, et la propriété de décroissance faible à l'infini sera obtenue en deux étapes. Dans une première étape, on montrera au moyen des lemmes 4.6 et 4.7, 4.7', que k , qui en l'occurrence sera la fonction définie par (4.16), est petite dans des grands intervalles situés assez loin. Dans une deuxième étape on utilisera déjà l'inégalité (4.31) pour montrer que k tend vers zéro à l'infini dans un sens convenable. Pour effectuer la première étape, on commence par extraire du lemme 4.6 l'information suivante.

LEMME 4.8

Soit $n \geq 3$, et $W_1 \geq 0$. Soit φ une solution d'énergie finie de SNL, ou $(\varphi, \dot{\varphi})$ une solution d'énergie finie de KGNL, et Ψ défini comme plus haut. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, $a_0 > 0$ et $\ell_0 > 0$, il existe $c > a_0$ tel que

$$\int_c^{c+\ell_0} d\tau \int_{|x| \leq \Psi(\tau)} dx W_1(\varphi(\tau, x)) \leq \varepsilon. \tag{4.32}$$

PREUVE

$|x| \leq \Psi(\tau)$ entraîne $g(x)^{-1} \leq 1 + \Psi(\tau)$. Il résulte alors de (4.24)

que

$$\begin{aligned} \infty > D &\geq \int_{a_0}^{\infty} d\tau \int dx g(x) W_1(\varphi(\tau, x)) \\ &\geq \int_{a_0}^{\infty} d\tau (1 + \Psi(\tau))^{-1} \int_{|x| \leq \Psi(\tau)} dx W_1(\varphi(\tau, x)) \\ &\geq \sum_{j=1}^{\infty} (1 + \Psi(a_0 + j \ell_0))^{-1} u_j \end{aligned} \tag{4.33}$$

avec
$$u_j = \int_{a_0 + (j-1)\ell_0}^{a_0 + j\ell_0} d\tau \int_{|x| \leq \Psi(\tau)} dx W_1(\varphi(\tau, x))$$

La série (4.33) serait divergente en l'absence des u_j , donc il existe des u_j arbitrairement petits. (En fait pour tout $\varepsilon > 0$, il en existe une infinité qui sont $\leq \varepsilon$). □

On peut maintenant énoncer le premier résultat de décroissance faible de k . On considère d'abord l'équation SNL. Les hypothèses sur f comprennent celles de la proposition 4.2, qui assure une majoration de k uniforme en temps, et en outre une propriété de répulsivité, qu'on peut formuler de la façon suivante

(H₇) Il existe C > 0 et p₄, p₅ (1 < p₄ ≤ p₅ < ∞) tels que pour tout s ∈ ℝ⁺,

$$W_1(s) \geq C \text{Min}(s^{p_4+1}, s^{p_5+1}) \tag{4.34}$$

On obtient alors le résultat suivant, qu'on énonce seulement pour SNL. Pour KGNL, on peut obtenir un résultat très voisin, avec pratiquement la même preuve.

LEMME 4.9 (SNL)

On suppose n ≥ 3, p₁ > 1 + 2/n, et (H₇). Soient r, ρ et q comme dans la proposition 4.1, avec en outre ρ < 1 et σ > 0. Soit φ solution d'énergie finie de l'équation SNL. Alors pour tout ε > 0 et ℓ > 0, il existe a > 0 tel que

$$\| \varphi ; \mathcal{L}^\infty(L^q, [a, a+\ell], B_{r,2}^0) \| \leq \varepsilon . \tag{4.35}$$

Esquisse de preuve

Comme pour la proposition 4.2, il suffit de démontrer le résultat pour 0 ≤ ρ < σ < 1 et σ - ρ assez petit. On utilise encore l'équation intégrale (4.14). Prenant la norme dans B_{r,2}⁰, on obtient avec les définitions (4.16), (4.17)

$$k(t) \leq k_0(t) + \int_0^t d\tau \| U(t-\tau)F(\varphi(\tau)) ; B_{r,2}^0 \| . \tag{4.36}$$

Le terme libre est contrôlé par la proposition 4.1, car k₀ ∈ ℒ^m(L^q) entraîne que \| k₀ ; ℒ[∞](L^q, [a, ∞)) \| → 0 quand a → ∞. Pour estimer l'intégrale, il est commode de considérer séparément les régions t - τ ≥ θ₂, 0 ≤ t - τ ≤ θ₁ et θ₁ ≤ t - τ ≤ θ₂ pour 0 < θ₁ < θ₂. La contribution des deux premières régions à (4.35) peut être rendue arbitrairement petite dans ℒ[∞](L^q) en pre-

nant θ_1 assez petit et θ_2 assez grand, par les mêmes estimations que dans le lemme 4.5. Pour θ_1 et θ_2 fixés, l'intégration sur τ dans la troisième région est inoffensive, et on pourra l'estimer de façon grossière (par exemple en appliquant l'inégalité de Hölder). Dans cette région, on estime l'intégrand de façon analogue à celle qui conduit au lemme 4.5, mais en séparant les contributions des régions $|x| \leq \Psi(\tau)$ et $|x| \geq \Psi(\tau)$. On fait apparaître une petite puissance η de la norme de la restriction de φ dans L^{p_4+1} ou L^{p_5+1} dans la première région, et dans L^2 dans la seconde. Utilisant la condition (H_7) , on finit par obtenir une estimation du type

$$\begin{aligned} & \int_{t-\theta_2}^{t-\theta_1} d\tau \left\| U(t-\tau) F(\varphi(\tau)) ; B_{r,2}^0 \right\| \leq M \left(\|\varphi ; L^\infty(H^1)\| \right) \\ & \times \int_{t-\theta_2}^{t-\theta_1} d\tau |t-\tau|^{-1} \left(1 + \|\varphi(\tau) ; B_{r,2}^0\| \right) \left\{ \|\varphi_{>}(\tau)\|_2^2 + \int dx w_1(\varphi_{<}(\tau)) \right\}^\eta \\ & \leq M' \left(\|\varphi ; L^\infty(H^1)\| \right) C(\theta_1, \theta_2) \left\{ \int_{t-\theta_2}^t d\tau \{.\} \right\}^\eta \end{aligned}$$

avec
$$\begin{aligned} \varphi_{\leq}(\tau, x) &= \varphi(\tau, x) \quad \text{si } x \leq \Psi(\tau) \\ &= 0 \quad \text{si } x \geq \Psi(\tau) \end{aligned}$$

On termine la preuve en estimant la contribution de $\varphi_{<}$ par le lemme 4.8 et celle de $\varphi_{>}$ par (4.29) ou (4.29') selon l'équation considérée. On renvoie pour le détail des calculs au lemme 5.9 de [D-7] pour l'équation SNL dans un cas simplifié et au lemme 4.5 de [D-8] pour l'équation KGNL. \square

L'étape suivante consiste à établir l'inégalité surlinéaire (4.31). Dans ce but, on a besoin d'une décroissance à l'infini de l'interaction, c'est à dire d'une borne inférieure sur p_1 , plus forte que précédemment, à savoir $p_1 > 1+4/n$. On rencontre à ce stade des difficultés

techniques qui compliquent la situation pour l'équation KGNL, et on se limite désormais à l'équation SNL, pour laquelle les résultats suivants gardent une forme simple.

LEMME 4.10 (SNL)

On suppose $n \geq 3$ et $p_1 > 1+4/n$. Soit $0 \leq \rho < \sigma < 1$, $\sigma - \rho$ suffisamment petit. Alors il existe $\delta_>$, $\delta_<$ et ν_1, ν_2 tels que $0 \leq \delta_< < 1 < \delta_> \leq \delta(r)$, $1 < \nu_1 < \nu_2 < 1+2(1-\delta_<)\sigma^{-1}$ tel que pour tout $\varphi \in H^1 \cap B_{r,2}^0$

$$\begin{aligned} \|U(t)f(\varphi) ; B_{r,2}^0\| \leq M(\|\varphi ; H^1\|) \text{Min}(|t|^{-\delta_<}) \\ (\|\varphi ; B_{r,2}^0\|^{v_1} + \|\varphi ; B_{r,2}^0\|^{v_2}) . \end{aligned} \quad (4.37)$$

La preuve du lemme 4.10, comme celle du lemme 4.5, s'effectue en utilisant successivement les lemmes 4.2 et 4.1 et en estimant les normes de φ ainsi produites en termes des normes dans H^1 et $B_{r,2}^0$. La restriction supérieure sur ν_2 est nécessaire pour assurer que la convolution avec $|t|^{-\delta}$ ramène de L_{loc}^{q/ν_2} à L_{loc}^q . Le lemme 4.10 entraîne immédiatement pour la fonction $k(t)$ définie par (4.16) à partir d'une solution d'énergie finie φ une inégalité du type (4.31), plus précisément

$$k \leq k_0 + \mu * (k^{v_1} + k^{v_2}) \quad (4.38)$$

avec
$$\mu(t) = M(\|\varphi ; L^\infty(H^1)\|) \text{Min}(|t|^{-\delta_<}) . \quad (4.39)$$

Sachant que k satisfait l'inégalité surlinéaire (4.38) et est petit dans des grands intervalles au sens du lemme 4.9, on peut maintenant démontrer que k tend vers zéro à l'infini et que k satisfait les mêmes propriétés de décroissance que k_0 par des arguments abstraits élémentaires

qui ne font plus aucune référence aux équations initiales.

LEMME 4.11

Soient k_0 et k deux fonctions de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R}^+ , $k \in \mathcal{L}^\infty(L^q, \mathbb{R}^+)$ et $k_0 \in \mathcal{L}^m(L^q, \mathbb{R}^+)$ avec $2 \leq q \leq \infty$, $2 \leq m < \infty$. On suppose en outre que

$$(1) \forall \ell > 0, \forall \varepsilon > 0, \exists a > 0 \text{ tel que } \|k ; \mathcal{L}^\infty(L^q, [a, a+\ell])\| \leq \varepsilon,$$

$$(2) k \text{ satisfait l'inégalité (4.38) avec } \mu \in \mathcal{L}^1(L^{\bar{s}}, \mathbb{R}^+) \text{ et}$$

$$1 < \nu_1 \leq \nu_2 \leq 1 + q/s. \text{ Alors}$$

$$(1) \|k ; \mathcal{L}^\infty(L^q, [a, \infty))\| \text{ tend vers zéro quand } a \text{ tend vers l'infini}$$

$$(2) k \in \mathcal{L}^m(L^q, \mathbb{R}^+).$$

Esquisse de preuve

On suppose pour simplifier qu'il n'y a qu'une seule puissance de k au second membre de (4.38), i.e. $\nu_1 = \nu_2 = \nu = 1 + q/s$.

(1) - On montre d'abord que, si $\|k ; \mathcal{L}^\infty(L^q, [a, b])\| \leq \varepsilon$ pour ε assez petit et $b-a$ assez grand, alors $\|k ; \mathcal{L}^\infty(L^q, [a, b+c])\| \leq \varepsilon$ pour un $c \in (0, 1]$ dépendant de ε mais indépendant de b . Supposant pour simplifier $q = \infty$, on estime pour $b \leq t \leq b+c$

$$\begin{aligned} (\mu * k^\nu)(t) &= \int_0^t d\tau \mu(t-\tau) k(\tau)^\nu \\ &\leq \|k\|_\infty^\nu \|\mu ; L^1([0, c] \cup [b-a, \infty))\| + \varepsilon^\nu \|\mu\|_1. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Si on prend maintenant ε assez petit pour que $\varepsilon^{\nu-1} \|\mu\|_1 \leq 1/4$, c assez petit, dépendant de ε mais indépendant de a et b , pour que $\|k\|_\infty^\nu \|\mu ; L^1([0, c])\| \leq \varepsilon/4$ et $b-a$ assez grand pour que

$||k||_{\infty}^{\nu} ||\mu ; L^1([b-a, \infty))|| \leq \varepsilon/4$ et $||k_0 ; L^{\infty}([b, \infty))|| \leq \varepsilon/4$, on déduit de (4.40) que $k(t) \leq \varepsilon$ pour $b \leq t \leq b+c$. Le même argument s'applique pour q quelconque. On peut ensuite itérer le processus avec le même c pour conclure (dans le cas général pour q) que $||k ; \mathcal{L}^{\infty}(L^q, [a, \infty))|| \leq \varepsilon$. On applique enfin ce résultat pour une suite $\{\varepsilon_j\}$ tendant vers zéro en utilisant l'hypothèse (1) et on en déduit la conclusion (1) du lemme.

(2) - Soit $0 < a < b$. On estime

$$||k ; \mathcal{L}^m(L^q, [0, b])|| \leq ||k_0 ; \mathcal{L}^m(L^q)|| + ||\mu ; \mathcal{L}^1(L^{\bar{s}})|| \\ \times \{ ||k ; \mathcal{L}^{m\nu}(L^q, [0, a])||^{\nu} + ||k ; \mathcal{L}^{m\nu}(L^q, [a, b])||^{\nu} \} \quad (4.41)$$

en utilisant l'inégalité de Young. Les deux dernières normes dans (4.41) sont majorées respectivement par

$$||k ; \mathcal{L}^{\infty}(L^q)||^{\nu} a^{1/m}$$

et par

$$||k ; \mathcal{L}^m(L^q, [0, b])|| \quad ||k ; \mathcal{L}^{\infty}(L^q, [a, \infty))||^{\nu-1} \quad (4.42)$$

La deuxième norme dans (4.42) tend vers zéro quand $a \rightarrow \infty$ par la première partie du lemme. Prenant a tel que

$$||\mu ; \mathcal{L}^1(L^{\bar{s}})|| \quad ||k ; \mathcal{L}^{\infty}(L^q, [a, \infty))||^{\nu-1} \leq 1/2$$

on obtient uniformément en b

$$||k ; \mathcal{L}^m(L^q, [0, b])|| \leq 2 \{ ||k_0 ; \mathcal{L}^m(L^q)|| + ||\mu ; \mathcal{L}^1(L^{\bar{s}})|| a^{1/m} \\ \times ||k ; \mathcal{L}^{\infty}(L^q)||^{\nu} \} \quad \square$$

On peut maintenant énoncer le résultat final.

PROPOSITION 4.3 (SNL)

Soit $n \geq 3$. On rappelle que f satisfait (H_1) et (H_3) avec $V \geq 0$. On suppose en outre $p_1 > 1 + 4/n$ et (H_7) . Soit $2 \leq r \leq \infty$, $\rho < 1$ et $\sigma < 1$, $2/q = \sigma_+$ et $2/m = \text{Min}_{\neq}(\delta(r), 1)$. Alors toute solution d'énergie finie de SNL appartient à $\mathcal{L}^m(L^q, B_{r,2}^0)$.

Esquisse de preuve

La propriété annoncée résulte des lemmes 4.9, 4.10 et 4.11 pour $0 < \rho < \sigma < 1$, $\sigma - \rho$ assez petit. Par l'inclusion triviale des espaces de Besov à r fixé, par les inclusions de Sobolev et par interpolation avec la majoration uniforme dans H^1 , ce cas particulier entraîne le cas général à l'exception de la frontière $2 < r < 2^*$, $2/m = \delta(r)$. On obtient le résultat final en injectant une dernière fois les majorations disponibles dans l'équation intégrale (4.14) et en utilisant des estimations analogues à celles qui conduisent aux lemmes 4.5 et 4.10 (voir [D-8], lemme 5.4 pour une estimation de ce type). □

En combinant les résultats des propositions 3.5 et 4.3, on obtient en particulier le résultat suivant de complétude asymptotique.

PROPOSITION 4.4(SNL)

Soit $n \geq 3$. On suppose que f satisfait (H_1) , (H_2) , (H_3) avec $V \geq 0$, $p_1 > 1 + 4/n$ et (H_7) . Alors les opérateurs Ω_{\pm} , Ω_{\pm}^{-1} , S et S^{-1} sont des homéomorphismes bornés de H^1 sur H^1 , et les opérateurs S et S^{-1} sont isométriques dans H^1 .

On conclut cet exposé par deux remarques.

(1) - Il est naturel d'attendre, au vu de la proposition 4.3, que la norme de φ dans $\mathcal{L}^m(L^q, B_{r,2}^0)$ soit estimée en termes de $\|\varphi\|_2$ et de l'énergie $E(\varphi)$. La méthode qu'on vient d'exposer est incapable de donner ce résultat, la raison évidente étant qu'on va d'une estimation intégrale invariante par translation dans le temps, donnée par le lemme 4.6, à une majoration de même type, donnée par la proposition 4.3, en passant à un stade intermédiaire par une estimation ponctuelle, à savoir celle du lemme 4.9, ce qui fait perdre toute uniformité. Une question ouverte et intéressante est de trouver une méthode plus directe pour passer de l'inégalité de départ (lemme 4.6) au résultat final en préservant l'uniformité.

(2) - Dans le cas de l'équation NLKG, les résultats correspondants nécessitent des hypothèses plus fortes et assez compliquées sur f , et en particulier sur p_1 et p_2 . La difficulté apparaît au stade de la démonstration de l'inégalité surlinéaire (4.38) (comparer par exemple le lemme 4.10 de cet exposé avec le lemme 4.6 de [D-8]). On peut se demander si ce phénomène est dû à un mauvais choix des espaces. Pour l'équation SNL qui est invariante par le groupe de Galilée, les surfaces $t = \text{cte}$ jouent un rôle particulier et fournissent un feuilletage de \mathbb{R}^{n+1} invariant par ce groupe. Il est donc naturel d'utiliser des espaces fonctionnels où l'on teste successivement les propriétés en x à t fixé, puis les propriétés en temps des normes ainsi obtenues. Il n'en n'est plus de même pour l'équation KGNL qui est invariante par le groupe de Poincaré et pour laquelle les surfaces $t = \text{cte}$ ne jouent aucun rôle particulier. Une question ouverte et intéressante est de reprendre le traitement de l'équation KGNL ab initio avec des topologies adaptées aux propriétés d'invariance de l'équation.

Bibliographie

Problème de Cauchy

- [1] J.B. Baillon, T. Cazenave, M. Figuera, C.R. Acad.Sci. Paris 284 (1977), 869-872.
- [2] P. Brenner, Math. Z. 167 (1979), 99-135.
- [3] P. Brenner, W. von Wahl, Math. Z. 176 (1981), 87-121.
- [4] F.E. Browder, Math. Z. 80 (1962), 249-264.
- [5] T. Cazenave, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 84 (1979), 327-346.
- [6] T. Cazenave, A. Haraux, Ann. Fac. Sc. Toulouse 2 (1980), 21-25.
- [7] J. Ginibre, G. Velo, J. Funct. Anal. 32 (1979), 1-32.
- [8] J. Ginibre, G. Velo, Ann. IHP(Anal. non lin.)1 (1984), 309-323.
- [9] J. Ginibre, G. Velo, Math. Z. 189 (1985), 487-505.
- [10] J. Ginibre, G. Velo, Ann. IHP.(Anal. non lin.)2 (1985), 309-327.
- [11] R. Glassey, M. Tsutsumi, Comm. Part. Diff. Eq.7 (1982), 153-195.
- [12] E. Heinz, W. von Wahl, Math. Z. 141 (1975), 33-45.
- [13] K. Jörgens, Math.Z.77 (1961), 295-308.
- [14] S. Klainerman, Comm. Pure Appl. Math.33(1980), 43-101, Ibid 36 (1983), 325-344.

- [15] S. Klainerman, G. Ponce, *Comm. Pure Appl. Math.* 36 (1983), 133-141.
- [16] J.L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod Gauthier-Villars, Paris, 1969.
- [17] C. Parenti, F. Strocchi, G. Velo, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Serie IV* 3 (1976), 443-500.
- [18] H. Pecher, *Math. Z.* 150 (1976), 159-183.
- [19] H. Pecher, *Math. Z.* 161 (1978), 9-40.
- [20] H. Pecher, *Math. Z.* 185 (1984), 261-270.
- [21] H. Pecher, W. von Wahl, *Manuscripta Math.* 27 (1979), 125-157.
- [22] I.E. Segal, *Ann. Math.* 78 (1963), 339-364.
- [23] I.E. Segal, *Bull.Soc. Math. France* 91(1963), 129-135.
- [24] W. Strauss, *Anais Acad. Brazil. Ciencias* 42 (1970), 645-651.
- [25] M. Tsutsumi, N. Hayashi, *Math. Z.* 177 (1981), 217-234.
- [26] W. von Wahl, *Math.Z.* 112 (1969), 241-279.

Théorie de la diffusion

- [D1] P. Brenner, *Math. Scand.* 51 (1982), 333-360.
- [D2] P. Brenner, *Math. Z.* 186 (1984), 383-391.
- [D3] P. Brenner, *J.Diff. Eq.* 56 (1985), 310-344.
- [D4] J. Chadam, *Ann. Scuola. Norm. Sup. Pisa*, 26 (1972), 33-95.

- [D5] J. Ginibre, G. Velo, J. Funct. Anal. 32 (1979), 33-71.
- [D6] J. Ginibre, G. Velo. Ann. IHP (Phys. Théor.) 28 (1978), 287-316.
- [D7] J. Ginibre, G. Velo, Scattering theory in the energy space for a class of non linear Schrödinger equations, J. Math. Pur. Appl., sous presse.
- [D8] J. Ginibre, G. Velo, Ann. IHP (Phys. Théor.) 43 (1985), 399-442.

- [D9] J.E. Lin, W. Strauss, J. Funct. Anal. 30 (1978), 245-263.
- [D10] B. Marshall, W. Strauss, S. Wainger, J. Math. Pur. Appl., 59 (1980), 417-440.
- [D11] C. Morawetz, W. Strauss, Comm. Pure Appl. Math. 25 (1972), 1-31.
- [D12] H. Pecher, Math. Z. 136 (1974), 67-92.
- [D13] H. Pecher, Math. Z. 185 (1984), 245-263.
- [D14] H. Pecher, J. Funct. Anal. 63 (1985), 101-122.

- [D15] M. Reed. Abstract non linear wave equations, Lecture notes in Math, Springer, Berlin 1976.
- [D16] I.E. Segal, Quantization and dispersion for non linear relativistic equations, Proc. Conference on Math. Theory Elem. Part., MIT Press, Cambridge, 1966, 79-108.

- [D17] I.E. Segal, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 1 (1968), 459-497.
- [D18] W. Strauss, J. Funct. Anal. 2 (1968), 409-457.
- [D19] W. Strauss, J. Funct. Anal. 41 (1981), 110-133.
- [D20] W. Strauss, J. Funct. Anal. 43 (1981), 281-293.
- [D21] R. Strichartz, Duke Math. J. 44 (1977), 705-714.
- [D22] Y. Tsutsumi, Scattering problem for non linear Schrödinger equations, Ann. IHP (Phys. Theor.), 43, (1985), 321-347.
- [D23] M. Tsutsumi, J. Math. Soc. Japan 35 (1983), 521-538.
- [D24] M. Tsutsumi, N. Hayashi, Scattering of solutions of nonlinear Klein-Gordon Equations in higher space dimensions. Nonlinear PDE '83 Proceedings, Lecture Notes in numerical and applied analysis, Vol.6, North-Holland.

Références générales

- [G1] J. Bergh, J. Löfström, Interpolation Spaces, Springer Berlin, 1976.
- [G2] L. Hörmander, The analysis of linear partial differential operators I, Springer, Berlin, 1983.