

JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

ANTONIO BOVE

Problème de Cauchy pour des opérateurs fuchsien

Journées Équations aux dérivées partielles (1984), p. 1-15

http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1984____A4_0

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PROBLEME DE CAUCHY POUR DES OPERATEURS FUCHSIENS

par A. Bove

On se propose de donner dans cet exposé certain résultats contenus dans le travail [4], concernant l'existence, l'unicité et la propagation des singularités pour des solutions du problème de Cauchy (pdC) associé à une classe d'opérateurs fuchsien.

1. Le résultat principal

Soit M une variété C^∞ de dimension n sans bord (ou, à la fois, $M = \mathbb{R}^n$), m un entier positif et $k = 1, 2, \dots, m$. On considère un opérateur différentiel

$$(1.1) \quad P(t, x, D_t, D_x) = t^k P_m(t, x, D_t, D_x) + t^{k-1} P_{m-1}(t, x, D_t, D_x) + \dots + P_{m-k}(t, x, D_t, D_x),$$

où

- a) P_{m-j} est un opérateur d'ordre $m-j$ à coefficients C^∞ , défini sur $\mathbb{R}_t \times M$
- b) P_m est (homogène d'ordre m) strictement hyperbolique par rapport à t ; on désigne par $\tau = \lambda_j(t, x, \xi)$ les racines en τ de l'équation $P_m(t, x, \tau, \xi) = 0$, $j = 1, \dots, m$ (les λ_j seront appelées les "racines hyperboliques de P ").

Un tel P sera appelé fuchsien hyperbolique d'ordre m et poids $m-k$.
On associe à P le polynôme indiciel (reduit):

$$(1.2) \quad I_P(x, \zeta) = \sum_{j=0}^k (\sqrt{-1})^{j-m} P_{m-j}(0, x, 1, 0) \zeta(\zeta-1) \dots (\zeta-(k-j-1)),$$

$$x \in M, \quad \zeta \in \mathbb{C},$$

et on dit que P vérifie la condition de Fuchs si

$$(1.3) \quad I_P(x, \zeta) \neq 0, \quad \forall x \in M, \quad \forall \zeta \in \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, \dots\}.$$

Pour un opérateur fuchsien hyperbolique de poids $m-k$ on s'intéresse au pdC suivant

$$(1.4) \quad \begin{cases} Pu = f & , \text{ dans } R \times M \\ \delta_t^j u|_{t=0} = g_j & , \text{ dans } M, \quad j=0, 1, \dots, m-k-1 \end{cases}$$

(il n'y a pas des données de Cauchy si $k=m$).

Le pdC (1.4) a été étudié par nombreux auteurs, soit dans le cas analytique, soit dans le cas C^∞ . En supposant que les coefficients sont analytiques en x , Baouendi et Goulaouic [1] ont donné des théorèmes du type Cauchy-Kowalewski et Holmgren pour des classes plus générales d'opérateurs. Dans le cadre hyperfonctions (1.4) a été étudié de façon très précise par Tahara [10] et, du point de vue microlocal, par Kashiwara-Oshima [7] et Ôaku [9]. Dans le cadre C^∞ , les opérateurs fuchsien hyperboliques ont été étudié, du point de vue microlocal, par B.L.P. [3] et par Tahara, pour ce qui concerne le pdC (1.4) où les données sont lisses [11], [12].

Ici on s'interesse à des résultats d'existence, unicité et propagation des singularités quand les données sont des distributions. De façon plus précise, on suppose que $g_j \in \mathcal{D}'(M)$ et que f est une distribution régulière sur $R \times M$, c'est à dire $f \in C^\infty(R; \mathcal{D}'(M))$ et $WF(f) \cap N_t^* M = \emptyset$, $t \neq 0$, où $N_t^* M = \{(t, x, \tau, 0) \in T^*(R \times M) \mid \tau \neq 0\}$ désigne le fibré conormal à la section $\{t\} \times M$ (on écrit $f \in \mathcal{D}'_r(R \times M)$). Dès que la surface $\{t = 0\}$ est caractéristique pour l'opérateur P , on va utiliser une notion adaptée de WF (voir Chazarain [5] et Melrose - Sjöstrand [8]). On dit qu'un point $(x, \xi) \in T^* M \setminus 0$ n'est pas dans le $\partial WF(f)$ s'il existe un opd classique $B(x, D_x)$, d'ordre zéro, qui est elliptique près du point (x, ξ) et tel que $B(x, D_x)f \in C^\infty(\cdot - \varepsilon, \varepsilon[\times M)$, pour quelque $\varepsilon > 0$, suffisamment petit. Nous posons

$$(1.5) \quad \widetilde{WF}(f) = \partial WF(f) \cup WF(f|_{\{t \neq 0\} \times M}).$$

On obtient alors le théorème suivant:

Théorème. Soit P un opérateur fuchsien hyperbolique de poids $m-k$ dans $R \times M$, vérifiant la condition de Fuchs (1.3). Alors pour toute $f \in \mathcal{D}'_r(R \times M)$ et toute $g_j \in \mathcal{D}'(M)$, $j = 0, 1, \dots, m-k-1$, il existe une distribution régulière unique u , qui resout (1.4). En plus on peut décrire les singularités de u comme suit:

$$i) \quad \partial WF(u) \subset \partial WF(f) \cup \bigcup_{j=0}^{m-k-1} WF(g_j);$$

$$ii) \quad WF(u|_{\{t \neq 0\} \times M}) \subset \{(t, x, \tau, \xi) \mid t \neq 0, (t, x, \tau, \xi) \in WF(f)\} \cup$$

$$\bigcup_{j=1}^m \{(t, x, \lambda_j(t, x, \xi), \xi) \mid \exists s, \frac{s}{t} \in]0, 1[, \exists (y, \eta) \in T^* M \setminus 0, (s, y, \lambda_j(s, y, \eta), \eta) \in WF(f), (x, \xi) = \Phi_j^{t-s}(y, \eta)\} \cup$$

$$\bigcup_{j=1}^m \{(t, x, \lambda_j(t, x, \xi), \xi) \mid t \neq 0, \exists (y, \eta) \in \partial WF(f) \cup$$

$$\bigcup_{\ell=0}^{m-k-1} WF(g_\ell), (x, \xi) = \Phi_j^t(y, \eta)\}.$$

\bigoplus_j^s étant le flot hamiltonien associé au facteur $\tau - \lambda_j(t, x, \xi)$,
 $j=1, \dots, m$;

iii) $WF(u) \cap N_0^* M = WF(f) \cap N_0^* M$

iv) Soit $x_0 \in M$ et supposons que

a) $WF(f) \cap \pi^{-1}(0, x_0) = \emptyset$ ($\pi : T^*(R \times M) \setminus 0 \rightarrow R \times M$ étant la projection canonique),

b) $(x_0, \xi_0) \in \bigcup_{j=0}^{m-k-1} WF(g_j), \quad \xi_0 \neq 0,$

alors il existe au moins un indice $j \in \{1, \dots, m\}$ tel que ou bien $WF(u|_{\{t > 0\} \times M})$ ou bien $WF(u|_{\{t < 0\} \times M})$ contient un petit arc de la courbe bicaractéristique correspondante à $\tau - \lambda_j(t, x, \xi)$ et sortante du point $(0, x_0, \lambda_j(0, x_0, \xi_0), \xi_0)$.

2. Idée de la démonstration

La preuve du théorème est faite en construisant un paramétrix à gauche et à droite pour le problème de Cauchy (1.4). D'abord on doit faire quelques préparations.

Soit $R : \mathcal{D}'(M) \rightarrow \mathcal{D}'_r(R \times M)$, tel que

$$(2.1) \quad \partial_t^j Rv|_{t=0} = \begin{cases} v & \text{si } j=0 \\ 0 & \text{si } j>0 \end{cases}, \quad \tilde{WF}(Rv) = \partial WF(Rv) \subset WF(v).$$

En posant $v(t, x) = \sum_{j=0}^{m-k-1} \frac{t^j}{j!} (Rg_j)(t, x)$, on a $u = v + t^{m-k} w$, où

$w \in \mathcal{D}'_r(R \times M)$ est une distribution régulière convenable. Si l'on

applique P a w on obtient $\tilde{P}w = f - Pv$, où $\tilde{P}(t, x, D_t, D_x) =$
 $= \sum_{j=0}^m t^{m-j} P_{m-j}(t, x, D_t, D_x)$, est un opérateur hyperbolique fuchsien
de poids 0 et $I_{\tilde{P}}(x, \zeta) = (\zeta - (k-m)) \cdot (\zeta - (k-m-1)) \dots (\zeta + m) I_P(x, \zeta)$;
on note que pour \tilde{P} il n'y a pas des données de Cauchy sur $t = 0$

et que $\tilde{WF}(f-Pv) \subset \tilde{WF}(f) \cup \bigcup_{j=0}^{m-k-1} WF(g_j)$.

Il est clair alors qu'il suffit de démontrer le théorème pour
"une équation" $Pu = f$, où P a poids 0 et qu'un tel P peut
s'écrire de la façon suivante:

$$(2.2) \quad P(t, x, D_t, D_x) = P'(t, x, t\partial_t, D_x) =$$

$$= \sum_{j=0}^m \sum_{h=0}^{m-j} t^{m-j-h} A_{m-j-h, j}(t, x, D_x) (t\partial_t)^h,$$

les $A_{m-j-h, j}$ étant des opérateurs différentiels convenables.

Dès que la condition de Fuchs est satisfaite on peut calculer toutes

les traces de u à partir de celles de f : $\partial_t^j u|_{t=0} =$

$$= \sum_{r=0}^j L_{j-r, j}^P(x, D_x) (\partial_t^r f|_{t=0}), \text{ où } L_{j-r, j}^P \text{ est un opérateur}$$

différentiel d'ordre $j-r$ et $L_{0, r}^P = 1/I_P(x, j)$. On pose alors

$$v_p(t, x) = \sum_{j=0}^{p-1} (t^j/j!) R(\partial_t^j u|_{t=0}) \text{ et l'on a } u - v_p = t^p w_p,$$

$f - Pv_p = t^p h_p$, w_p, h_p étant des distributions régulières convenables.

Il en résulte que $P(t^p w_p) = t^p P'(t, x, t\partial_t + p, D_x) w_p = t^p h_p$,

c' est à dire qu' on peut se borner à résoudre l' équation:

$$(2.3) \quad P(t, x, t\partial_t + p, D_x) u = f, \quad f \in \mathcal{D}'_r(\mathbb{R} \times M), \quad p \in \mathbb{Z}_+ \text{ assez grand.}$$

On a le lemme suivant:

Lemme 1. Le problème (2.3) est équivalent mod. $C^\infty(\mathbb{R} \times M)$ à un système $N \times N$ ($N = m(m+1)/2$) de la forme

$$(2.4) \quad \mathcal{P} \vec{u} = (I_N t\partial_t - tA(t, x, D_x) - B(t, x, D_x)) \vec{u} = \vec{f} \quad \text{sur } \mathbb{R} \times M,$$

où $\widetilde{WF}(\vec{f}) = \widetilde{WF}(f)$ et $A(t, x, D_x), B(t, x, D_x)$ sont des matrices $N \times N$ d' op d' ordre 1, 0 resp., ayants les propriétés suivantes:

i) le symbole principal de A , $\sigma_1(A)(t, x, \xi)$, est diagonal et ses valeurs propres sont les racines hyperboliques de P .

ii) $\text{Re } \sigma_0(B)(t, x, \xi) \leq -I_M$, pour tout $(x, \xi) \in T^*M \setminus 0$.

L' exemple suivant montre comment on peut faire la réduction du Lemme 1.

Exemple. On se donne l' opérateur hyperbolique fuchsien de poids 0 ($M = \mathbb{R}^n$):

$$P(t, x, t\partial_t + p, D_x) = (t\partial_t + p)^2 + t^2 \sum_{j=1}^n D_{x_j}^2 + a(t, x)(t\partial_t + p) + \\ + t \sum_{j=1}^n b_j(t, x) D_{x_j} + c(t, x),$$

où $a, b_j, c \in C^\infty(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n)$, $p \in \mathbb{Z}_+$. Soit $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_+$,

$Z(t, x, D_x) = \pm i |D_x|$ (la choix du signe \pm n' a aucune importance), $L = t\partial_t + p - tZ - \gamma$ et Λ un opérateur elleptique invertible (Λ^{-1} désigne l' invers de Λ). On a :

$$\begin{aligned}
P &= I^2 + t^2 \left((Z^2 + \sum_{j=1}^n D_{x_j}^2) \Lambda^{-2} \right) \Lambda^2 + 2 t Z L + (2\gamma + a(t,x)) I + \\
&+ t \left\{ [(2\gamma + 1 + a(t,x)) Z + \sum_{j=1}^n b_j(t,x) D_{x_j}] \Lambda^{-1} \right\} \Lambda \\
&+ a(t,x) \gamma + \gamma^2 + c(t,x)
\end{aligned}$$

Alors si l'on pose $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $u_1 = t \Lambda u$, $u_2 = L u$, $u_3 = u$, l'équation $Pu = f$ est équivalente mod $C^\infty(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n)$ au système

$$\begin{aligned}
(2.5) \quad t \partial_t \vec{u} &= t \begin{bmatrix} Z & 0 & 0 \\ (Z^2 + \sum_{j=1}^n D_{x_j}^2) \Lambda^{-1} & -Z & 0 \\ 0 & 0 & Z \end{bmatrix} \vec{u} + \\
&+ \begin{bmatrix} +1-p & 0 & 0 \\ -[(2\gamma+1+a)Z + \sum_{j=1}^n b_j D_{x_j}] \Lambda^{-1} & -(\gamma+a)-p & -(a\gamma + \gamma^2 + c) \\ 0 & 1 & \gamma-p \end{bmatrix} \vec{u} + \\
&+ \begin{bmatrix} 0 \\ f \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

qui a la forme (2.4). On remarque que si p est assez grand, (2.5) vérifie la condition ii). Enfin il est évident que le symbole prin-

principal de A dans (2.5) est diagonalisable, de sorte qu'on obtient un système qui vérifie i), ii) en opérant avec des opd matriciels elliptiques d'ordre 0.

Dans le cas strictement hyperbolique, le procédé standard pour construire la parametrix d'un système est de le découpler à l'aide d'un opd elliptique d'ordre 0. Malheureusement on ne peut le découpler dans la région où $t|\xi|$ est grand. A ce but on a besoin des classes suivantes d'opd.

Définition 1. Soit $m, k \in \mathbb{R}$. Par $S^{m,k}$ on désigne la classe des fonctions $a(t, x, \xi) \in C^\infty(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n)$ telles que pour tout $\Omega \subset\subset \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n$ et pour tout j, α, β , il existe une constante C telle que

$$|\partial_t^j \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(t, x, \xi)| \leq C (1+|\xi|)^{m-|\beta|} (|t|+1/|\xi|)^{k-j}.$$

$$\text{On pose } S^{-\infty, k} = \bigcap_m S^{m-k}, \quad S^{m, \infty} = \bigcap_k S^{m, k}.$$

Les classes $S^{m,k}$ sont liées aux classes introduites par Boutet de Monvel [2]. On désigne par $OPS^{m,k}$ la classe des opd A de la forme $A = a(t, x, D_x) + R$, où $a \in S^{m,k}$ et R est partiellement régularisant, c'est à dire

$$Rf(t, x) = \int r(t, x, y) f(t, y) dy, \quad f \in C^\infty(\mathbb{R}_t; C_0^\infty(\mathbb{R}^n)),$$

avec $r \in C^\infty(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_y^n)$.

Il est commode de travailler dans une sous-classe de $S^{m,k}$, qui a une structure bien adaptée à (2.4).

Définition 2. Soit $k \in \mathbb{R}$. On désigne par \mathcal{S}^k la classe des fonctions $\varphi(x, \xi'; z) \in C^\infty(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{S}_\xi^{n-1} \times \mathbb{R}_z)$ telles que $\varphi(x, \xi'; z) \sim \sum_{j \geq 0} \varphi_{-j}(x, \xi') z^{-j}$,

pour certaines fonctions $\varphi_{-j}(x, \xi') \in C^\infty(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{S}^{n-1})$. On désigne

par $\Sigma^{m,k}$, $m, k \in \mathbb{R}$ la classe des fonctions $a(t, x, \xi) \in C^\infty (R_t \times R_x^n \times R_\xi^n)$ telles que il existe $\hat{a}(x, \xi', z) \in \mathcal{S}^k$ pour laquelle $a(t, x, \xi) = |\xi|^{m-k} \hat{a}(x, \xi/|\xi|, t|\xi|)$. Encore, $\hat{\Sigma}^{m,k}$ indique l'espace de tous symboles $a \in \mathcal{S}^{m,k}$ tels que $a = \sum_{j < M} a_j \in \mathcal{S}^{m, k+M}$, pour une suite convenable de symboles $a_j \in \Sigma^{m, k+j}$ (on écrit $a \sim \sum_{j \geq 0} a_j$). Par $OP\Sigma^{m-k}$ on indique les opd A de la forme $A = a(t, x, D_x) + R$, $a \in \Sigma^{m,k}$ et R partiellement régularisant. Par $OP\hat{\Sigma}^{m,k}$ on indique les opd de la forme $A = a(t, x, D_x) + R + R'$, $a \in \hat{\Sigma}^{m,k}$, R partiellement régularisant et $R' \in OPS^{m, \infty}$.

On a alors la proposition suivante:

Proposition 1. Soit \mathcal{S} le système (2.4). Alors ils existent deux matrices $N \times N$ d'opd, $Q \in OP\hat{\Sigma}^{0,0}$, $\tilde{B} \in OP\hat{\Sigma}^{0,0}$ qui ont les propriétés suivantes

- i) Q est elliptique
- ii) pour chaque $\omega \subset \subset R^n$ il existe $\delta = \delta(\omega)$ tel que le symbole $\tilde{b}(t, x, \xi)$ de \tilde{B} est diagonal par blocs dans la région $\{|t| |\xi| \geq \delta, (x, \xi') \in \omega \times S^{n-1}\}$.

En posant $\tilde{\mathcal{S}} = I_N t \partial_t - t A(t, x, D_x) - \tilde{B}(t, x, D_x)$, on a

$$(2.6) \quad \mathcal{S}Q = Q\tilde{\mathcal{S}} \quad \text{mod. un opérateur partiellement régularisant.}$$

En plus $\tilde{\mathcal{S}}$ vérifie encore les conditions i) et ii) du lemme 1.

Pour la paramétrix de $\tilde{\mathcal{S}}$ on a besoin d'autres classes d'opd (voir [6]).

Definition 3. Soit $m, k \in \mathbb{R}$. On dit qu'une fonction $a(\rho, t, x, \xi) \in C^\infty ([0, 1] \times R_t \times R_x^n \times R_\xi^n)$ est dans la classe $HS^{m,k}$, si, pour chaque $\Omega \subset \subset R_t \times R_x^n$, $j, p, \alpha, \beta, \varepsilon > 0$, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\left| \rho^\varepsilon (\rho \partial_\rho)^p \partial_t^j \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(\rho, t, x, \xi) \right| \leq C (1+|\xi|)^{m-|\beta|} (|t| + 1/|\xi|)^{k-j}.$$

$(t, x) \in \Omega, \rho \in]0, 1], \xi \in \mathbb{R}^n$.

De façon tout à fait analogue, c' est à dire en rajoutant le comportement en ρ , on définit les classes $HZ^{m,k}, H\hat{Z}^{m,k}$.

On dit aussi qu' un opérateur R est partiellement régularisant du type de Hardy si l' on a

$$(2.7) \quad Rf(t, x) = \int_0^1 \int r(\rho, t, x, y) f(\rho t, y) d\rho dy,$$

$$f \in C^\infty(\mathbb{R}_t; C_0(R_x^n)),$$

où $r \in C^\infty(]0, 1] \times \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_{x,y}^{2n})$ satisfait aux inegalités

$$\sup_{\substack{(x,y) \in \text{compact} \\ |t| \leq \delta,]0, 1] \ni \rho}} \left| \rho^\varepsilon (\rho \partial_\rho)^j \partial_t^p \partial_x^\alpha \partial_y^\beta r(\rho, t, x, y) \right| \leq \text{const.}$$

On dit que $A \in \text{OPH}Z^{m,k}$ si $A = a(\rho, t, x, D_x) + R$, où R est partiellement régularisant du type de Hardy et

$$a(\rho, t, x, D_x) u(t, x) = \int_0^1 \int e^{ix \cdot \xi} a(\rho, t, x, \xi) \hat{u}(\rho t, \xi) d\rho d\xi$$

$\text{OPH}\hat{Z}^{m,k}$ est défini de façon analogue.

La parametrix à droite pour $\tilde{\mathcal{D}}$ est donnée par la proposition suivante (des petites modifications sont nécessaires pour la parametrix à gauche).

Proposition 2. Soit $\varphi_j(t, s, x, \xi) \in C^\infty(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_s \times \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus 0))$ la solution du pdC

$$(2.8) \quad \begin{cases} \partial_t \varphi_j(t, s, x, \xi) = \lambda_j(t, x, d_x \varphi_j(t, s, x, \xi)) \\ \varphi_j|_{t=s} = x \cdot \xi \end{cases}, \quad j=1, \dots, m$$

$$\bigcup_{j=1}^m \left\{ (t, x, \lambda_j(t, x, \xi), \xi) \mid \exists s, \frac{s}{t} \in]0, 1[, \exists (y, \eta) \in T^* \mathbb{R}^n \setminus 0, \right.$$

$$\left. (s, y, \lambda_j(s, y, \eta), \eta) \in \text{WF}(f), (x, \xi) = \Phi_j^{t-s}(y, \eta) \right\} \cup$$

$$\bigcup_{j=1}^m \left\{ (t, x, \lambda_j(t, x, \xi), \xi) \mid t \neq 0, \exists (y, \eta) \in T^* \mathbb{R}^n \setminus 0, \right.$$

$$\left. (y, \eta) \in \partial \text{WF}(f), (x, \xi) = \Phi_j^t(y, \eta) \right\}.$$

La proposition 2 permet de prouver l'existence et l'unicité d'une solution distribution régulière du pdC (1.4) ainsi que i) et ii) du théorème. Malheureusement, dès que nos classes d'opérateurs ne sont pas microlocal en t près de $t=0$ on ne gagne pas une information précise sur $t=0$ en utilisant la structure de la parametrix. En fait la démonstration des points iii) e iv) du théorème repose sur l'analyse microlocale, près du fibré conormal à $t=0$, qui a été faite dans B.L.P. [3].

3. Quelque conséquence. Le branchment des singularités.

Sous les hypothèses du point iv) du théorème, on peut voir aisement, en utilisant le théorème 3.1 de [3], que les singularités des données de Cauchy se propagent lelong une au moins des demi-bi caractéristiques (c'est à dire $t < 0$ ou $t > 0$) correspondantes aux facteurs $\tau - \lambda_j(t, x, \xi)$, $j=1, \dots, m$. Dans ce qui suit on s'intéresse au pdC

$$(3.1) \quad \begin{cases} Pu = f \in C^\infty(\mathbb{R} \times M) \\ \partial_t^j u|_{t=0} = g_j \in \mathcal{D}'(M), \quad j=0, 1, \dots, m-k-1, \end{cases}$$

où P est fuchsien hyperbolique de poids $m-k$.

On se propose de donner des conditions suffisantes qui assurent la propagation des singularités des données lelong une bicaracté-

ristique entière ou le long deux au moins bicaractéristiques différentes (branchement).

D'abord quelque notation; pour $(x, \xi) \in S^*M$, on désigne par $\rho_j(x, \xi)$ le point $(0, x, \lambda_j(0, x, \xi), \xi) \in \text{Char } P$ et par $\gamma_j(x, \xi)$ la courbe bicaractéristique de $\tau - \lambda_j(t, x, \xi)$ sortante de $\rho_j(x, \xi)$; on note $\gamma_j^\pm(x, \xi) = \gamma_j(x, \xi) \cap \{\pm t > 0\}$.

On aura aussi besoin de deux polynômes microlocaux :

$$(3.2) \quad I_j(x, \xi; \zeta) = D_t \sigma_m^{(P_m)}(\rho_j(x, \xi)) + \sigma_{m-1}^{(P_{m-1})}(\rho_j(x, \xi)),$$

$$j = 1, \dots, m, \zeta \in \mathbb{C}$$

$$(3.3) \quad J_j(x, \xi; \zeta) = \sum_{\ell=0}^k \frac{1}{\ell!} (D_t^\ell \tilde{P}_{m+\ell-1, j})(\rho_j(x, \xi)) \zeta (\zeta-1) \dots$$

$$\dots (\zeta - (\ell-1)), \quad j=1, \dots, m, \zeta \in \mathbb{C},$$

où les $\tilde{P}_{m+\ell-1, j}$ sont les symboles principaux des op $\tilde{P}_{m+\ell-1, j} \in \text{OPS}^{m-\ell-1}(\mathbb{R} \times M)$ définis par la formule

$$(D_t - \lambda_j(t, x, D_x))^{k-1} P = \sum_{r=0}^k t^{k-r} \tilde{P}_{m+k-1-r, j}(t, x, D_t, D_x).$$

On a

Proposition 3. Soit $u \in \hat{\omega}_r^!$ solution du pdC (3.1). Soit $(x, \xi) \in S^*M$ et $\lambda_1(0, x, \xi) < \dots < \lambda_m(0, x, \xi)$. Alors :

1 - On suppose $\rho_1(x, \xi), \rho_m(x, \xi) \in \text{WF}(u)$ et $I_1(x, \xi; \zeta) \neq 0 \neq I_m(x, \xi; \zeta), \forall \zeta \in \mathbb{Z}, \zeta \geq -(k-1)$. On suppose aussi que pour

chaque $j \in \{2, \dots, m-1\}$, une au moins des les deux demi-bica-
 ractéristique $\gamma^\pm(x, \xi)$ ne rencontre pas le $WF(u)$. On en de-
 duit que

$$\gamma_1(x, \xi) \cup \gamma_m(x, \xi) \subset WF(u)$$

2 - Soit $m > 2$ et $\rho_j(x, \xi) \in WF(u)$ pour un certain $j \in \{2, \dots, m-1\}$.

On a

α) Si $J_j(x, \xi; \zeta) \neq 0 \forall \zeta \in \mathbb{Z}, \zeta \geq -1$ alors $\gamma_j^+(x, \xi) \cup \gamma_j^-(x, \xi) \subset WF(u)$. En plus si une seulement des les deux demi-bica-
 ractéristiques $\gamma_j^\pm(x, \xi)$ est contenue dans le $WF(u)$, soit $\rho_{j-1}(x, \xi)$ soit $\rho_{j+1}(x, \xi) \in WF(u)$.

β) Si $J_j(x, \xi; \zeta) \neq 0 \forall \zeta \in \mathbb{Z}, \zeta \geq -1$ et si $I_j(x, \xi; \zeta) \neq 0 \forall \zeta \in \mathbb{Z}, \zeta \geq -(k-1)$, ou bien $\gamma_j^+(x, \xi)$ ou bien $\gamma_j^-(x, \xi)$ est contenue dans $WF(u)$ et ou bien $\rho_{j-1}(x, \xi)$ ou bien $\rho_{j+1}(x, \xi) \in WF(u)$.

Exemple 1. Soit P l'opérateur d'Euler - Poisson - Darboux

$$P(t, x, D_t, D_x) = t (D_t^2 - \sum_{j=1}^n D_{x_j}^2) + \alpha(t, x) D_t + \sum_{j=1}^n \beta_j(t, x) D_{x_j} + \gamma(t, x),$$

$(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, α, β_j, γ fonctions lisses. Supposons que $\zeta + i \alpha(0, x) \neq 0 \forall \zeta \in \mathbb{Z}_+, \forall x$ (P vérifie la condition de Fuchs) et que $u \in \mathcal{D}'_r$ soit solution du pdC $Pu = 0$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $u|_{t=0} = g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Alors

$$WF(u|_{\{t \neq 0\}}) = \bigcup_{(x, \xi) \in WF(g)} (\gamma_1(x, \xi) \cup \gamma_2(x, \xi))|_{\{t \neq 0\}}.$$

Exemple 2. Soit $P(t, x, D_t, D_x) = t(D_t - D_x) D_t + \alpha(t, x) D_t$, $t, x \in \mathbb{R}$, α lisse. Soit $I_p(x, \zeta) = \zeta + i\alpha(0, x) \neq 0 \quad \forall \zeta \in \mathbb{Z}_+, \forall x$, et $u \in \mathcal{D}'_r$ la solution du pdC $Pu = 0$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $u|_{t=0} = g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. On a $u(t, x) = 1_t \otimes g(x)$, $WF(u) = \{ (t, x, 0, \xi) \mid (x, \xi) \in WF(g) \}$, tandis que $I_1(x, \xi; \zeta) \equiv 0$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M.S.Baouendi, C.Goulaouic : Cauchy problem with characteristic initial hypersurface, C.P.A.M., 26 (1973), 455-475.
- [2] I.Routet de Monvel : Hypoelliptic operators with double characteristic and related pseudo-differential operators, C.P.A.M., 27 (1974), 585-639.
- [3] A.Bove, J.E.Lewis, C.Parenti : Propagation of singularities for Fuchsian operators, Lecture Notes in Math., 984 (1983).
- [4] ——— : Cauchy problem for Fuchsian Hyperbolic operators, à paraître.
- [5] J.Chazarain : Reflection of C^∞ singularities ... Publ.R.I.M.S. Kyoto, 12 (suppl.) (1977), 39-52.
- [6] N.Hanges : Parametrix and propagation of singularities... Indiana Univ. Math.J., 28 (1979), 86-97.
- [7] M.Kashiwara, T.Oshima : Systems of differential equations with regular singularities..., Ann.Math., 106 (1977), 145-200.
- [8] R.B.Melrose, J.Sjöstrand : Singularities of boundary value problems, I, C.P.A.M., 39 (1978), 593-617.
- [9] T.Ôaku : A canonical form..., Invent.Math., 65 (1982), 491-515.
- [10] H.Tahara : Fuchsian type equations and Fuchsian hyperbolic equations, Japan.J.Math., 5 (1979), 245-347.
- [11] ——— : Singular hyperbolic systems I, II, III, J.Fac.Sci.Univ.Tokyo, 26 (1979), 213-238; 26 (1979), 391-412; 27 (1980), 465-507.
- [12] ——— : Singular hyperbolic systems IV, Japan.J.Math., 8 (1982) 297-308.