JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

BERNARD LASCAR
JOHANNES SJÖSTRAND

Équation de Schrödinger et propagation des singularités. II

Journées Équations aux dérivées partielles (1983), p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1983____A4_0>

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

EQUATION DE SCHRODINGER ET PROPAGATION DES SINGULARITES (II)

par

B.LASCAR - J.SJÖSTRAND

On s'intéresse ici à des résultats de propagation de singularités pour des opérateurs pseudo-différentiels à symbole principal P réel.

Soit $N = \{\rho \in T^*\mathbb{R}^n \backslash 0 \mid dp(\rho) = 0\}$, on dispose sur N de deux invariants :

1) $\rho \in N$ la matrice fondamentale : $F_p(\rho)$ définie par :

$$\sigma(t, F_p(\rho)t') = (\mathrm{Hess}\,p)(\rho)(t,t').$$

2) Le symbole sous principal

$$p^s_{m-1}(x,\xi) = p_{m-1}(x,\xi) - \frac{1}{2i} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 p}{\partial x_j \partial \xi_j}(x,\xi)$$

Ce problème a été essentiellement étudié dans le cas des opérateurs à caractéristiques doubles par V. Ja Ivrï, R.Lascar, (B.L), R.Melrose et G.Ulhman.

Géométriquement le comportement des bicaractéristiques près de N joue un rôle très important et est fortemant influencé par la structure du spectre de $Fp(\rho), \rho \in N$.

Dans les cas non effectivement hyperboliques les bicaractéristiques n'ont pas de points limites et la propagation se fait aussi sur des sous ensembles de N limites de bicaractéristiques nulles ou non nulles selon les hypothèses sur les termes d'ordre inférieur. C'est le phénomène de la réfraction unique (voir V.Ja Ivri [4] et R.Lascar [6]). Des méthodes ont également été étudiées et dans le cas B.L. et R.L. [5] on rencontre des obstructions géométriques (caustiques) qui nécessitent l'emploi de techniques très lourdes.

Dans les cas effectivement hyperboliques on s'attend à avoir des points limites sur des courbes bicaractéristiques et des phénomènes de branchement de singularités se produisent (voir V Ja Ivri [4] et R.Lascar [6]).

Dans ce travail on va étudier une situation - non nécessairement hyperbolique - où les deux phénomènes mentionnés se produisent à la fois Nos méthodes sont des méthodes constructives – ce qui a pour avantage de donner des résultats plus explicites de propagation de singularités - mais l'utilisation des techniques développées par J.Sjöstrand [10] (passage dans le domaine complexe à l'aise de la transformée de Fourier-Bros-Iagolintzer) nous permet dans un cadre très général d'éviter le pénible problème de caustiques mentionné plus haut. Toute la difficulté nouvelle de ce travail par rapport à [11] se situe dans l'étude géométrique de la variété lagargienne $\exp(t\hat{H}_p)(\Delta)$ et de son évolution quand $t \to +\infty$. Les difficultés provenant du fait que l'on autorise des valeurs propres de parties réelles positives ou négatives (directions de croissance ou de décroissance exponentielle) et également d'évolutions " oscillantes " liées aux valeurs propres purement imaginaires de $F_p(\rho)$.

Nous nous contenterons de citer le résultat et de faire quelques remarques.

Soit $p(x,\xi)$ un symbole réel, défini dans un voisinage de $(x_o,\xi_o) \in T^*\mathbb{R}^*\backslash 0$, $p(x_o,\xi_o) = 0$ $dp(x_o,\xi_o) = 0$. Soit d'autre part ω, l'espace des fonctions continues croissantes : $h\ \bar{\mathbb{R}}_+^+ \to \mathbb{R}_+$ qui vérifient $h(t) = O(t)$ pour $t \to +\infty$. Si $h \in \omega$ et W est voisinage ouvert, suffisamment petit de (x,ξ_o) on peut définir

$$\Lambda(W,h)\ \{(x,y) \in W\times W\ ;\ \exists\ t \geq 0 \text{ avec } x=\exp(tHp)(y),\ |p(y)| \leq e^{-h(t)} \text{et}$$
$$\exp(s\ Hp)(y) \in W \quad < s \leq t\}\ .$$

Si $]0,1[\ni \varepsilon \to N(\varepsilon) \in \mathbb{R}_+$, on dit qu'une courbe $[0,T]\ni t \to \gamma(t) \in W$ est N admissible si $\forall\ \varepsilon \to 0$ on peut trouver une décomposition $[0,T] = \bigcup_{j=1}^{\bar{j}} I_j \cup \bigcup_{k=1}^{\bar{k}} J_k$ et intervalles fermés, dont les intérieurs sont deux à deux disjoints et $\bar{j} \leq N(\varepsilon)$, $\bar{k} \leq N(\varepsilon)$, $|J_k| \leq N(\varepsilon)$ et tel que pour $j \in \{1,\bar{j}\}$ il existe $\rho_j \in \{p = dp = 0\}$ avec $|\gamma(t) - \rho_j| \leq \varepsilon$ pour $t \in I_j$.

Soit $N = \{p=dp=0\}$, sur N ou disque du symbole sous principal p^s_{m-1} et $F_p(x,\xi)$ l'application hermiltonienne (voir [14]) .

Soit p le symbole réel d'un v.p.d P on fait les hypothèses suivantes :

(H_1) En tout point $\rho \in N$, la dimension de l'espace spédral engendré par les valeurs propres de partie réelle strictement positive de $Fp(\rho)$ est constante.

(H_2) Il existe un voisinage ouvert W_o de (x_o,ξ_o), $h_o \in \omega$ et $N_o(\varepsilon)$ si : $\gamma(t) : [0,T] \to W_o$ est une C.J. de Hp telle que : $|p(\gamma(0))| \leq e^{-h_o(T)}$ alors γ est N_o admissible.

(H_3) $$\operatorname{Im} p^s_{m-1}(\rho_o) + \frac{1}{2} \sum_{Z \in \operatorname{Spec}(F_p(p_o)} \operatorname{Re} z > 0$$

Concernant l'hypothèse (H_2) on fait les remarques suivantes :

1°)

Proposition . On suppose qu'il existe un voisinage ouvert W_o de (x_o,ξ_o), h_o ω et $\delta > 0$, tels que si $\gamma : [0,T] \to W_o$ est une courbe intégrale avec $|p(\gamma(0))| \leq e^{-h_o(T)}$, alors $\int_0^T |H_p| dt \leq \delta$. Alors (H_2) est satisfaite.

2°) Il sera prouvé plus loins que (H_2) est invariante par multiplication de p par un symbole elliptique.

Si W est un voisinage de (x_o,ξ_o), assez petit, on pose $C(\bar{W}) = \bigcap_{h \in \omega} \overline{\Lambda(W,h)}$, où les adhérences sont prises dans $\mathbb{R}^4$. $C(\bar{W})$ est un fermé de $\bar{W} \times \bar{W}$ que l'on peut considérer comme une relation $\bar{W} \to \bar{W}$.

Théorème *On suppose (H_1), (H_2) et (H_3). Soit W un voisinage assez petit de (x_o,ξ_o), si $u \in \mathcal{D}'$, $WF(Pu) \cap \bar{W} = \phi$ $\rho \in W$ et si $C(\bar{W})$ $(\rho) \cap \partial W \cap WF(u) = \phi$, alors $\rho \notin WF(u)$.*

que s'il y a effectivement des valeurs propres de partie réelle non nulle , si (H_3) n'est pas satisfaite on aura $- \operatorname{Im} p^s_{m-1}(\rho_o) + \frac{1}{2} \sum_{Z \in \operatorname{Spec}(Fp(\rho_o)), \operatorname{Re} z > 0}$
à -P

REMARQUES ET EXEMPLES.

Dans le cas où $\operatorname{Spec}(Fp(\rho)) \subset i\mathbb{R}$ $\forall \rho \in N$ on a des précisions supplémentaires (voir [11]) à savoir l'ensemble de propagation $C(\rho)$ se décrit par :

$$C(\rho) = \bigcap_{V \text{ voisinage de } \rho} \{\rho(t,\bar{\rho}) \mid t \geq 0, \bar{\rho} \in V \cap p^{-1}(0) \text{ et } \int_0^t H_p(\rho(s,\rho))| \, |ds| \leq \delta_o\}$$

et on voit donc que seules les limites de bicaractéristiques nulles interviennent (ceci est directement lié à H_3 qui signifie ici

$$\operatorname{Im} p^s_{m-1}(\rho_o) > 0)$$

EXEMPLES

1°) $\operatorname{Spec}(Fp(\rho) \subset i\,\mathbb{R}$

a) $p = -\xi_o^2 + q(x,\xi')$ où $q \geq 0$ et s'annule exactement à l'ordre 2 sur Σ sous variété C^∞ de $T^* \mathbb{R}^{n-1}$

b) $p(x,\xi) = \frac{1}{2}(B(x,\xi)\xi',\xi') + A(x,\xi)\ (\xi'' + ix''\xi_n, \xi'' + ix''\xi_n)$

où B est non dégénérée (mais n'a pas nécessairement la signature hyperbolique) et $A >> 0$.

c) $p(x,\xi) = (\xi_1^1 + x_1^2\,\xi_n^2) - (\xi_2^2 + x_2^2\,\xi_n^2)$

2°) $\operatorname{Spec}(Fp(\rho) \not\subset i\mathbb{R}$

a) $p = x_o\xi_o + b_1(x'\xi')$ où $b_1 > 0$ et satisfait à H_1 de [11]

b) $p = \sum_{j=1}^{r} a_j\, x_j\xi_j + b_1(x',\xi')$ où $a_j \in \mathbb{R}\setminus$, $b_1(x',\xi')$ satisfait à H_1 de [11].

BIBLIOGRAPHIE :

[1] : J.J. DUISTERMAAT - L. HORMANDER : "Fourier integral operators II". Acta Math. 128-183-269 (1972).

[2] : L. HORMANDER : "Fourier integral operators". Acta Math. 127-79-183 (1971).

[3] : L. HORMANDER : "The Cauchy problem for differential equations with double characteristics". Journal d'Analyse Mathématiques (1977).

[4] : V. Ia IVRI : "Wave fronts of solutions of some hyperbolic pseudo-differential equations". (en russe). Trudi Mosk, 39-83-112 (1979) et 39-49-82 (1979).

[5] : B. LASCAR - R. LASCAR : "Propagation des singularités pour des équations hyperboliques à caractéristiques de multiplicité au plus double et singularités masloviennes II". A paraître au Journal d'Analyse Mathématiques.

[6] : R. LASCAR : "Propagation des singularités des solutions pseudo-différentielles à caractéristiques de multiplicité variables". Lecture Notes in Math. n° 856 - Springer Verlag (1981).

[7] : A. MELIN - J. SJOSTRAND : "Fourier integral operators with complex valued phase functions". Lecture Notes in Maths. n° 459-121-213 Springer Verlag (1975).

[8] : J. SJOSTRAND : "On the eigenvalues of a class of hypo-elliptic operators IV". Annals de l'Institut Fourier 30-2 (1980) - 109-169.

[9] : J. SJOSTRAND : "Analytic singularities and microhyperbolic boundary value problems". Math. Ann. 254, 211 - 256 (1980).

[10] : J. SJOSTRAND : "Propagation des singularités analytiques des solutions d'équations pseudodifférentielles". Cours professé à l'Université de Paris Sud Orsay en 1981. Astérisque n° 95-1982.

[11] : B. LASCAR - J. SJOSTRAND : "Equation de Schrödinger et propagation des singularités pour des O.P.D. à caractéristiques de multiplicité variable. Astérisque n° 95-1982.