JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

NICOLAS LERNER

Unicité de Cauchy pour des opérateurs faiblement principalement normaux

Journées Équations aux dérivées partielles (1983), p. 1-7

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1983____A2_0>

Conférence n° 2

UNICITE DE CAUCHY POUR DES OPERATEURS FAIBLEMENT PRINCIPALEMENT NORMAUX

par Nicolas LERNER

INTRODUCTION

La notion d'opérateur différentiel principalement normal, introduite par Hörmander [3], est la suivante. Un opérateur différentiel P, de symbole principal p_m est dit principalement normal si l'identité (0-1) est vérifiée,

$$(0,1) \qquad \mathrm{Im}\ \overline{\frac{\partial p_m}{\partial \xi}(x,\xi)} \cdot \frac{\partial p_m}{\partial x}(x,\xi) = 2\ \mathrm{I\!Re}\overline{p_m(x,\xi)}\ q_{m-1}(x,\xi),$$

où q_{m-1} est un polynôme homogène (en ξ) de degré m-1. Rappelons que l'utilité de cette notion est reliée à l'unicité de Cauchy, pour laquelle Hörmander [3] a dégagé des conditions suffisantes, dites de " stricte pseudo-convexité ".

Nous vous proposons ici d'introduire une notion plus microlocale du type (0,1) et d'établir un théorème d'unicité de Cauchy. L'intérêt d'une telle généralisation réside tout d'abord dans l'unification qu'elle fournit pour les opérateurs principalement normaux et les elliptiques, qui rentrent dans la classe introduite, ce qui est naturel au vu des hypothèses de pseudo-convexité qui sont les mêmes pour ces deux types d'opérateurs. Par ailleurs, cette microlocalisation resserre le lien entre l'unicité de Cauchy et la résolubilité locale (voir Hörmander [3], [4], Nirenberg-Treves [5], Treves [7], Strauss-Treves [6] Egorov [1]). En outre cette notion permet de traiter des produits d'opérateurs (dont les variétés caractéristiques sont en position " générale") alors que le produit d'opérateurs (classiquement) principalement normaux n'est pas en général principalement normal (cf. exemple plus bas).

1. LES RESULTATS

1.1. Opérateurs faiblement principalement normaux.

Un opérateur différentiel P à coefficients (complexes) C^∞, d'ordre m, de symbole principal p_m, défini sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ sera dit faiblement principalement normal en x_o ($x_o \in \Omega$) si, pour tout $\xi_o \in \mathbb{R}^n \setminus 0$ tel que $p_m(x_o,\xi_o) = 0$, il existe un voisinage conique w de (x_o,ξ_o) dans $T^*(\Omega)$ 0 et une fonction q_{m-1}, C^∞ sur w, homogène de degré m-1 en ξ, tels que, pour $(x,\xi) \in w$, on ait :

$$(1.1)\qquad \mathrm{Im}\ \overline{\frac{\partial p_m}{\partial \xi}(x,\xi)} \cdot \frac{\partial p_m}{\partial x}(x,\xi) = 2\,\mathrm{Re}\ p_m(x,\xi)\ q_{m-1}(x,\xi).$$

REMARQUES

(a) Cette notion est trivialement invariante par changement de coordonnées.

(b) Les opérateurs principalement normaux et les elliptiques sont faiblement principalement normaux.

(c) Pour un opérateur de symbole principal p_m tel que $\mathrm{grad}_{x,\xi}\,\mathrm{Re}\ p_m$ et $\mathrm{grad}_{x,\xi}\,\mathrm{Im}\ p_m$ soient indépendants sur $p_m(x,\xi) = 0$, $\xi \neq 0$, x dans un voisinage de x_o, il est équivalent d'être faiblement principalement normal et de vérifier

$$(1.2)\qquad \mathrm{Im}\ \overline{\frac{\partial p_m}{\partial \xi}(x,\xi)} \cdot \frac{\partial p_m}{\partial x}(x,\xi) = 0 \quad \text{si} \quad p_m(x,\xi) = 0$$

pour x dans un voisinage de x_o.

En effet, si $p_m(x_o,\xi_o) = 0$, $|\xi_o| = 1$, posant

$$c_{2m-1}(x,\xi) = \frac{1}{2i}\ \{\overline{p_m}, p_m\} = \mathrm{Im}\ \overline{\frac{\partial p_m}{\partial \xi}} \cdot \frac{\partial p_m}{\partial x}\ ,$$

de l'hypothèse d'indépendance des gradients, on en déduit facilement l'existence de $q(x,\xi)$, C^∞ au voisinage de (x_o,ξ_o) (dans $\mathbb{R}^{2n}$) avec

$$c_{2m-1} = 2\,\mathrm{Re}\ \overline{p_m}\ q,$$

et de cette identité sur U × V (U voisinage de x_o, V voisinage de ξ_o, dans S^{n-1}), d'où le résultat en prolongeant q par homogénéité de degré m-1.

(d) Le produit de deux opérateurs faiblement principalement normaux en x_o de symboles principaux p_1, p_2, est faiblement principalement normal pourvu que ces opérateurs soient en position relative " générale " i.e.

$$\Sigma_{x_o}(p_1) \cap \Sigma_{x_o}(p_2) = \phi \; (\Sigma_x(p) = \{\xi \in \mathbb{R}^n \backslash 0,\ p(x,\xi) = 0\}) \; .$$

Ce résultat de stabilité par produit (en position générale) est faux pour des opérateurs principalement normaux comme le montre l'exemple suivant .

<u>EXEMPLE</u>

Dans $\mathbb{R}^3$, $x = (t,x_1,x_2)$, $\xi = (\tau, \xi_1, \xi_2)$ les opérateurs suivants sont principalement normaux

$$(1.3) \quad \begin{cases} p_1 = \tau^2 + t(\xi_1^2 + \xi_2^2) - i\, e^t\, \xi_1{}^2 \\ p_2 = \tau^2 + t(\xi_1^2 + \xi_2^2) + i\, e^t [\xi_2^2 + x_1\xi_1\xi_2 + x_1\xi_2^2 - x_2\xi_1^2 - x_2\xi_1\xi_2], \end{cases}$$

(et en position générale en (0,0,0)) alors que leur produit n'est pas principalement normal (mais seulement faiblement principalement normal).

En effet, posant $\Lambda = \operatorname{Im} \dfrac{\overline{\partial(p_1p_2)}}{\partial\xi} \cdot \dfrac{\partial(p_1p_2}{\partial x}$,

$\Lambda_{\,t=x_1=x_2=0} = 2\, \mathbb{R}e\, \overline{p_1}p_2\, (i\, \tau(p_1+p_2)) + M,$ avec

$M = (\tau^4 - \xi_1^2\, \xi_2^2)\;\; 2\tau\, (\xi_2^2 - \xi_1^2) + \tau^2(\xi_1^2 + \xi_2^2)\; 2\, \xi_1\, \xi_2\, (\xi_1 + \xi_2).$

Par suite si $p_1\, p_2$ était principalement normal, on pourrait trouver des <u>polynômes</u> $\alpha_k(\xi_1,\xi_2)$, $\beta_k(\xi_1,\xi_2)$, avec $M = 2\, \mathbb{R}e\, \overline{p_1p_2}\; [\sum_{k=0}^{3} (\alpha_k + i\beta_k)\, \tau^{3-k}]$ ce qui mène facilement à une contradiction en examinant les coefficients de τ^6 et de τ^2.

<u>1.2. Pseudo-convexité</u>.

Nous rappelons ici la définition de la stricte pseudo-convexité notion introduite par Hörmander [3] , identique pour les opérateurs principalement normaux, elliptiques, faiblement principalement normaux.

Soit P un opérateur différentiel de symbole principal p_m à coefficients C^∞ faiblement principalement normal en x_o et $S \equiv \varphi(x) = \varphi(x_o)$ une hypersurface C^∞ orientée passant par x_o. On dit que S est strictement pseudo-convexe par rapport à P au point x_o si pour tout $(\xi_o,\Gamma_o) \neq (0,0)$ tel que $p_m(x_o,\xi_o - i\Gamma_o \varphi'(x_o)) = \{p_m,\varphi\}(x_o,\xi_o - i\Gamma_o \varphi'(x_o)) = 0$, on a

$$\lim_{\theta \to o} (\Gamma_o+\theta)^{-1} \ \mathrm{Im}\ \overline{\frac{\partial p_m}{\partial \xi}(x_o,y_\theta)} \cdot \frac{\partial p_m}{\partial x}(x_o,y_o)$$

$$(1.4) \qquad + (-\varphi''(x_o)) \ \overline{\frac{\partial p_m}{\partial \xi}(x_o,y_o)} \ \frac{\partial p_m}{\partial \xi}(x_o,y_o) > 0,$$

avec $y_\theta = \xi_o - i(\Gamma_o + \theta)\varphi'(x_o)$.

Remarquons que l'expression (1.4) a toujours un sens si p_m est faiblement principalement normal en x_o.

1.3. Les résultats.

Théorème 1. Soit P *un opérateur différentiel à coefficients (complexes)* C^∞, *faiblement principalement normal en* x_o, S *une hypersurface orientée* ($S \equiv \varphi(x) = \varphi(x_o)$) *strictement pseudo-convexe par rapport à* P *en* x_o.

Alors il existe un voisinage V *de* x_o, *tel que si* $Pu = 0$ *sur* V *et*

$$V \cap \mathrm{supp}\, u \subset S_+ = \varphi(x) \geq \varphi(x_o),$$

alors $u \equiv 0$ *sur un voisinage de* x_o.

Autrement dit P possède l'unicité de Cauchy par rapport à S *près de* x_o.

Théorème 2. Soient $p^{(1)}$ *et* $p^{(2)}$ *des opérateurs différentiels à coefficients (complexes)* C^{∞} *, faiblement principalement normaux en* x_o, S *une hypersurface orientée* ($x_o \in S$) *strictement pseudo-convexe par rapport à* $p^{(1)}$ *et à* $p^{(2)}$ *en* x_o.

Si $p^{(1)}$ *et* $p^{(2)}$, *de symboles principaux* $p^{(1)}$, $p^{(2)}$, *sont en position générale par rapport à* S_o *en* x_o i.e

$$\Sigma(p^{(1)}, S, x_o) \wedge \Sigma(p^{(2)}, S, x_o) = \phi \tag{1.5}$$

avec

$$\Sigma(p, S, x_o) = \{(\xi, \Gamma) \in (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) \setminus (0,0),\ p(x_o, \xi + i\Gamma N) = 0\} \tag{1.6}$$

où $N \neq 0$ *est dans le conormal à* S *en* x_o *, on obtient alors que tout opérateur de symbole principal* $p^{(1)} p^{(2)}$ *possède l'unicité de Cauchy par rapport à* S *près de* x_o.

Ceci donne en particulier l'unicité de Cauchy par rapport à $S \equiv t = 0$ puis de $(0,0,0)$ pour $(P_1 P_2)$ donné par (1.3), produit non principalement normal.

3. Indication sur la preuve.

Posant $P_\gamma = e^{-\gamma\Psi} P\, e^{\gamma\Psi}$, avec

$$\Psi(x) = \varphi(x_o) + \varphi'(x_o)\,(x-x_o) + \frac{1}{2!}\,\varphi''(x_o)\,(x-x_o)^2 \tag{3.1}$$

$$- \frac{A}{2}\,(\varphi'(x_o)\,(x-x_o))^2 + \frac{1}{2A^2}\,|x-x_o|^2 \ , \ A, \gamma$$

paramètres réels, on démontre une inégalité de Carleman : il existe V, voisinage de x_o, $A > 0$ tels que si $\gamma \geq e^A$, pour tout $v \in C_o^\infty(V)$

$$\|P_\gamma v\|_{L^2} \geq A^{-1} \sum_{j=0}^{m-1} \gamma^{m-\frac{1}{2}-j'} \sum_{|\alpha|=j} \|D_x^\alpha v\|_{L^2} . \tag{3.2}$$

Pour cela $c(x,\xi,\gamma)$ désignant le symbole de $(P_\gamma)^* P_\gamma$ on prouve l'estimation suivante, commode à démontrer en raisonnant par l'absurde.

Il existe $A \geq 1$ tel que pour tout x, $|x-x_o| \leq A^{-2}$, pour tout $\gamma \geq e^A$, pour tout ξ de $\mathbb{R}^n$, on ait :

$$(3.3) \qquad \gamma^{-1}\, c(x,\xi,\gamma) \geq A^{-1}\, |\xi - i\,\gamma\Psi'(x)|^{2m-2}$$

Puis en utilisant l'inégalité de Garding avec gain de deux dérivées due à Fefferman et Phong [2] on obtient le résultat.

REFERENCES

[1] : Y. EGOROV : "On thesolvability of differential equations with simple characteristics". Russian Math. Surveys 26 (1971), p. 113-127.

[2] : C. FEFFERMAN - D.H. PHONG : "On positivity of pseudo-differential operators". Proc. Math. Acad. Sci. U.S.A., 75 (1978), p. 4 673 - 4 674.

[3] : L. HÖRMANDER : "Linear partial differential operators". Springer Verlag (1963).

[4] : L. HÖRMANDER : "Pseudo-differential operators and non elliptic boundary problems". Ann. of Math. 83 (1966), p. 129-209.

[5] : L. NIRENBERG - F. TREKES : "On local solvability of linear partial differential equations". Part. I, Necessary conditions, C.P.A.M. 23, 1970, p. 1-38. Part. II, Sufficient conditions, C.P.A.M. 23, p. 459-510.

[6] : M. STRAUSS - F. TREVES : "First order linear p de s' and uniqueness of the Cauchy problem". Journ. of diff. equations, 15 (1974), p. 195-209.

[7] : F. TREVES : "A linb between solvability of pseudo-differential equations and uniqueness of the Cauchy problem". Amer. Journ. of Math. 94 (1972), p. 267-288.