Journées Équations aux dérivées partielles

Claude Wagschal

Problème de Cauchy ramifié à caractéristiques multiples de multiplicité variable

Journées Équations aux dérivées partielles (1982), p. 1-6

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1982____A9_0>

PROBLEME DE CAUCHY RAMIFIE A CARACTERISTIQUES MULTIPLES DE MULTIPLICITE VARIABLE

par C. WAGSCHAL

On aborde l'étude du problème de Cauchy ramifié pour un opérateur holomorphe à caractéristiques multiples de multiplicité variable sous la seule hypothèse d'analyticité des racines caractéristiques.

Dans cet exposé, nous allons essentiellement énoncer un théorème de représentation de la solution. Ce théorème contient le théorème 1.1. de [2] concernant des opérateurs à caractéristiques multiples de multiplicité constante ; il contient également les théorèmes 1.1 et 1.3 de [5] lorsque les racines caractéristiques sont en involution et traite en outre le cas involutif avec une multiplicité d'ordre quelconque.

Dans le domaine réel, il est aisé d'utiliser les méthodes développées ici pour étudier le problème de Cauchy hyperbolique dans les espaces de Gevrey ; en raisonnant comme dans [2] , on constate que le problème de Cauchy hyperbolique est bien posé dans les espaces de Gevrey G^{α} lorsque $1 \leqslant \alpha \leqslant \frac{m_0}{m_0-1}$, où m_0 désigne la multiplicité maximum des racines caractéristiques.

Les démonstrations seront publiées dans [6] .

1. NOTATIONS

On considère au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^{n+1}$, de coordonnées $x = (x^j)_{0\leqslant j\leqslant n}$, un opérateur différentiel linéaire holomorphe d'ordre m

$$a(x,D) = \sum_{|\alpha|\leqslant m} a_{\alpha}(x)D^{\alpha}, \quad D^{\alpha} = D_0^{\alpha_0}\times \dots \times D_n^{\alpha_n},$$

de symbole principal

$$g(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_{\alpha}(x)\xi^{\alpha}, \quad \xi^{\alpha} = \xi_0^{\alpha_0}\times \dots \times \xi_n^{\alpha_n}.$$

On se propose d'étudier le problème de Cauchy ramifié

$$(1.1) \qquad \begin{cases} a(x,D)u(x) = 0, \\ D_0^h u(x)\big|_S = w_h(x'), \quad 0 \leqslant h < m, \end{cases}$$

où $x' = (x^1, \dots, x^n)$, l'hyperplan $S : x^0 = 0$ est supposé non caractéristique et les fonctions w_h sont ramifiées autour de l'hyperplan de S

$$T : x^0 = x^1 = 0 \ ;$$

plus précisément, il existe un voisinage ouvert connexe Ω de l'origine dans S tel que les fonctions w_h soient holomorphes sur le revêtement universel $\Omega - T$: étant donné un point $y \in \Omega - T$, les fonctions w_h sont donc holomorphes au voisinage de ce point et se prolongent analytiquement le long de tout chemin d'origine y et tracé dans $\Omega - T$.

Nous étudierons ce problème de Cauchy lorsque les racines caractéristiques sont holomorphes ; en d'autres termes, on suppose que

$$g(x,\xi) = \prod_{j \in J} \prod_{i=1}^{m_j} \left(\xi_0 - \lambda_j^i(x,\xi')\right), \tag{1.2}$$

où les fonctions λ_j^i sont holomorphes au voisinage du point $x = 0$, $\xi' = (1,0,\dots,0)$ et

$$\forall i \in [1,m_j]\ ,\ \lambda_j^i(0;1,0,\dots,0) = \alpha_j\text{, où } \alpha_j \neq \alpha_{j'}\text{, si } j \neq j'. \tag{1.3}$$

On se propose de donner ici une représentation de la solution du problème de Cauchy (1.1) permettant d'étudier la ramification de cette solution. A cet effet, nous utiliserons des "phases" dépendant analytiquement d'une infinité de variables complexes supplémentaires.

Ces variables seront notées $\tau^\ell \in \mathbb{C}$, ℓ décrivant $\mathbb{N}^\star$, et nous noterons Σ la somme directe des plans complexes $\mathbb{C}_{\tau^\ell}$, soit

$$\Sigma = \overset{\infty}{\underset{\ell=1}{\oplus}} \mathbb{C}_{\tau^\ell} \ ;$$

un point de Σ sera noté $\sigma = (\tau^\ell)_{\ell \in \mathbb{N}^\star}$. L'espace vectoriel Σ sera muni de la structure d'espace normé définie par la norme

$$\|\sigma\| = \sum_{\ell=1}^{+\infty} |\tau^\ell| .$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, nous noterons Σ^k le sous-espace vectoriel de dimension k

$$\Sigma^k = \{\sigma \in \Sigma \ ;\ \tau^\ell = 0 \text{ pour } \ell > k\} \ ;$$

lorsqu'il sera utile de préciser qu'un point $\sigma \in \Sigma$ appartient à Σ^k, il sera noté $\sigma^k = (\tau^1, \dots, \tau^k)$.

Une fonction $u = \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ définie sur un ouvert Ω de $\Sigma \times \mathbb{C}^n$ est dite holomorphe si elle est continue et si sa restriction à toute droite complexe est holomprphe, c'est-à-dire si, pour tout $k \geq 1$, la restriction de u à $\sum^k \times \mathbb{C}^n$ est une fonction holomorphe des k+n variables complexes (σ^k, x').

Construisons, pour tout $j \in J$, une fonction $\varphi_j(\sigma, x')$ holomorphe au voisinage de l'origine de $\sum \times \mathbb{C}^n$ en résolvant la suite de problèmes de Cauchy du premier ordre :

$$(1.4)_{k\geq 1} \qquad D_{\tau^k}\varphi_j(\sigma,x') = \lambda_j^k\big(\sigma_0, x', D'\varphi_j(\sigma,x')\big), \text{ pour } \sigma \in \textstyle\sum^k,$$

$$(1.5) \qquad \varphi_j(0,x') = x^1,$$

où

$$\sigma_0 = \sum_{\ell=1}^{\infty} \tau^\ell, \text{ pour tout } \sigma \in \textstyle\sum$$

$$\lambda_j^k(x,\xi') = \lambda_j^i(x,\xi'), \text{ si } i \equiv k \ (\text{mod. } m_j),\ 1 \leq i \leq m_j.$$

Ces équations déterminent, par récurrence sur k, des fonctions $\varphi_j(\sigma^k, x')$ holomorphes au voisinage de l'origine de $\sum^k \times \mathbb{C}^n$: en effet, $\varphi_j(\sigma^1, x')$ est la solution du problème de Cauchy défini par l'équation $(1.4)_1$ et la donnée de Cauchy (1.5) et, pour $k \geq 2$, $\varphi_j(\sigma^k, x')$ est la solution de $(1.4)_k$ de donnée $\varphi_j(\sigma^{k-1}, x')$. On montre que ces fonctions $\varphi_j(\sigma^k, x')$ définissent une fonction holomorphe

$$\varphi_j : \Omega_r \to \mathbb{C}, \text{ où } \Omega_r = \{(\sigma,x') \ ;\ \|\sigma\| + \|x'\| < r\},\ r > 0 \text{ et } \|x'\| = \sum_{i=1}^n |x^i|.$$

Le théorème de représentation énoncé ci-dessous fait apparaître des termes intégraux dont il faut préciser la signification. Notons Δ_k $(k \geq 1)$ le simplexe euclidien standard de $\mathbb{R}^k$ (dont les coordonnées sont notées $s = (s^i)_{1\leq i\leq k}$)

$$\Delta_k = \{s \in \mathbb{R}^k \ ;\ 0 \leq s^i \text{ et } s_0 \leq 1\}, \text{ où } s_0 = \sum_{i=1}^k s^i \ ;$$

soit S_k le k-simplexe singulier de $\sum$, où $x^0 \in \mathbb{C}$,

$$S_k : s \in \Delta_k \to \big(x^0 s, x^0(1-s_0), 0, \dots\big) \in \textstyle\sum .$$

Si u est une fonction holomorphe au voisinage de l'origine de $\sum$ on sait définir l'intégrale sur S_k de la k-forme différentielle $u(\sigma)d\sigma^k$, où $d\sigma^k = d\tau^1 \wedge \dots \wedge d\tau^k$,

$$I_k(x^0) \equiv \int_{S_k} u(\sigma)d\sigma^k = \int_{\Delta_k} u\big(x^0 s, x^0(1-s_0), 0, \dots\big)(x^0)^k ds,$$

où ds désigne la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^k$; la fonction $I_k(x^0)$ est bien définie et holomorphe au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}$; bien entendu, cette fonction ne dépend que de la restriction de u à $\sum^{k+1}$.

Etant donné un nombre $\omega > 0$, notons $\mathcal{R}_\omega$ le revêtement universel du disque pointé

$$\dot{D}_\omega = \{t \in \mathbb{C} \; ; \; 0 < |t| < \omega\}.$$

Une fonction u holomorphe au voisinage d'un point $a \in \dot{D}_\omega$, qui se prolonge analytiquement le long de tout chemin d'origine a tracé dans $\dot{D}_\omega$ définit une fonction holomorphe sur $\mathcal{R}_\omega$ qui sera encore notée u.

2. THEOREME DE REPRESENTATION

On peut alors énoncer le

Théorème : Il existe des nombres $\omega > 0$ et $r > 0$ tels que

$$|\varphi_j(\sigma,x')| < \omega, \text{ pour tout } (\sigma,x') \in \Omega_r,$$

et, pour tout $y \in S - T$, $\|y\| < r$, il existe des fonctions $u_j^k(t,\sigma,x')$, $k \in \mathbb{N}$, $j \in J$, holomorphes au voisinage du point $t = y^1$, $\sigma = 0$, $x' = y'$, qui se prolongent analytiquement à $\mathcal{R}_\omega \times \Omega_r$ et qui possèdent les propriétés suivantes :

$$(2.2)\quad \begin{cases} \text{il existe une constante } c>0 \text{ et, pour tout compact } K \subset \mathcal{R}_\omega, \\ \text{une constante } c_K > 0 \text{ telles que, pour tout } k \in \mathbb{N},\ j \in J \\ |u_j^k(t,\sigma,x')| \leqslant c^k k!\, C_K, \text{ pour } (t,\sigma,x') \in K \times \Omega_r \; ; \end{cases}$$

la série, qui converge normalement dans un voisinage de y,

$$(2.3)\qquad u(x) = \sum_{j\in J} \sum_{k\in\mathbb{N}} \int_{S_k} u_j^k\big(\varphi_j(\sigma,x'),\sigma,x'\big)\, d\sigma^k$$

est la solution du problème de Cauchy (1.1).

Voici d'abord quelques remarques concernant cet énoncé. La propriété (2.1) est vérifiée dès que r est suffisamment petit d'après la continuité de φ_j ; vu que $\varphi_j(0,y') = y^1$, elle montre que le point y^1 appartient bien au disque pointé $\dot{D}_\omega$. La convergence de la série (2.3) résulte alors de (2.2). En effet, soit $0 < \varepsilon < \mathrm{Min}\big(|y^1|,\ \omega - |y^1|\big)$, K le compact

$$K = \{t \in \mathbb{C} \; ; \; |t - y^1| \leqslant \varepsilon\} \subset \dot{D}_\omega \; ;$$

d'après la continuité de φ_j, si $\eta \in]0, t - \|y'\|[$ est suffisamment petit, on a $\varphi_j(\sigma,x) \in K$ lorsque $\|\sigma\| + \|x'-y'\| \leqslant \eta$. Etant donné que $\|S_k(s)\| = |x^0|$, ceci montre que la fonction

$$I_j^k(x) = \int_{S_k} u_j^k\big(\varphi_j(\sigma,x'),\sigma,x'\big)\, d\sigma^k$$

est bien défini et holomorphe dans la boule $\|x-y\| < \eta$ et, d'après (2.2)

$$|I_j^k(x)| \leqslant |x^0|^k c^k C_K, \text{ si } \|x-y\| < \eta,$$

ce qui prouve que la série (2.3) converge normalement au voisinage de y ; sa somme est donc holomorphe au voisinage de ce point.

Nous utiliserons le théorème précédent dans [7] pour étudier le support singulier de la solution du problème de Cauchy. Contentons-nous ici de quelques remarques élémentaires.

Considérons d'abord le cas où, pour une valeur de $j \in J$,

$$\lambda_j^1 = \ldots = \lambda_j^{m_j} ;$$

les équations (1.4) montrent que

$$\varphi_j(\sigma,x') = \varphi_j(\sigma_0,x') \text{ où } \sigma_0 = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \tau^\ell .$$

Le simplexe S_k étant tracé dans l'hyperplan $\sigma_0^{k+1} = x^0$, on a

$$I_j^k(x) = \mathcal{U}_j^k(\varphi_j(x),x)$$

où

$$\mathcal{U}_j^k(t,x) = \int_{S_k} u_j^k(t,\sigma,x')d\sigma^k$$

et la fonction $\varphi_j(x) = \varphi_j(x^0,x')$ est, d'après (1.4) et (1.5), la solution de

$$\begin{cases} D_0\varphi_j(x) = \lambda_j^1(x,D'\varphi_j(x)), \\ \varphi_j(0,x') = x^1 . \end{cases}$$

La fonction $\mathcal{U}_j^k$ est holomorphe sur $\mathcal{R}_\omega \times \Omega$, où $\Omega = \{x \in \mathbb{C}^{n+1} ; \|x\| < r\}$, et d'après (2.2) la série

$$\mathcal{U}_j(t,x) = \sum_{k=o}^{+\infty} \mathcal{U}_j^k(t,x)$$

converge dans l'espace $\mathcal{H}(\mathcal{R}_\omega \times \Omega)$ des fonctions holomorphes sur $\mathcal{R}_\omega \times \Omega$ muni de la topologie de la convergence compacte. Ceci prouve que

$$\sum_{k=o}^{+\infty} I_j^k(x) = \mathcal{U}_j(\varphi_j(x),x) .$$

En particulier, pour un opérateur à caractéristiques multiples de multiplicité constante, la solution du problème de Cauchy (1.1) s'écrit

$$u(x) = \sum_{j\in J} \mathcal{U}_j(\varphi_j(x),x) ;$$

<u>on retrouve ainsi le théorème 1.1 de</u> [2] : <u>la solution est ramifiée autour des hypersurfaces caractéristiques issues de</u> T.

<u>Plus généralement</u>, considérons le cas d'une racine multiple en involution, soit

$$\{\xi_0 - \lambda_j^i(x,\xi'), \xi_0 - \lambda_j^{i'}(x,\xi')\} = 0 \text{ pour } 1 \leq i, i' \leq m_j .$$

La fonction $\varphi_j(\sigma^{m_j}, x')$ est alors l'unique solution du système en involution

$$\begin{cases} D_{\tau^i}\varphi_j(\sigma^{m_j},x') = \lambda_j^i(\sigma_0^{m_j},x',D'\varphi_j(\sigma^{m_j},x')), \ 1 \leq i \leq m_j \ ; \\ \varphi_j(0,x') = x^1 . \end{cases}$$

On vérifie alors que

$$\varphi_j(\sigma,x') = \varphi_j(\zeta,x')$$

où

$$\zeta = (\zeta^1, \ldots, \zeta^{m_j}), \ \zeta^i = \sum_{\ell \equiv i (\text{mod}.m_j)} \tau^\ell$$

et on montre que

$$\sum_{k=o}^{+\infty} I_j^k(x) = \sum_{k=o}^{m_j-1} \int_{S_k} \mathcal{U}_j^k(\varphi_j(\sigma,x'),\sigma,x')\,d\sigma^k$$

où les fonctions $\mathcal{U}_j^k(t,\sigma,x')$ sont holomorphes sur $\mathcal{R}_\omega \times \Omega_r$. Ceci généralise les théorèmes 1.1 et 1.3 de [5] qui traitent le cas de la multiplicité double et triple.

<u>REFERENCES</u>

[1] A.K. GAUTESEN and D. LUDWIG.- Tangentiel characteristics and coupling of waves, J. Math. Anal. Appl. 38, 1972, p. 430-446.

[2] Y. HAMADA, J. LERAY et C. WAGSCHAL.- Systèmes d'équations aux dérivées partielles à caractéristiques multiples : problème de Cauchy ramifié ; hyperbolicité partielle, J. Math. pures et appl., 55, 1976, p. 297-352.

[3] T. ISHII.- On a representation of the solution of the Cauchy problem with singular initial data, Proc. Japan Acad., 56, 1980, Sér. A, p. 59-61.

[4] D. SCHILTZ, J. VAILLANT et C. WAGSCHAL.- Problème de Cauchy ramifié à caractéristiques multiples en involution, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 291, Sér. A, 1980, p. 659-662.

[5] D. SCHILTZ, J. VAILLANT et C. WAGSCHAL.- Problème de Cauchy ramifié : racine caractéristique double ou triple en involution, J. Math. pures et appl., à paraître.

[6] C. WAGSCHAL.- Problème de Cauchy ramifié à caractéristiques multiples holomorphes de multiplicité variable , J. Math. pures et appl., à paraître.

[7] C. WAGSCHAL.- en préparation.