

# JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

BERNARD HANOZET

JEAN-LUC JOLY

**Formes bilinéaires compatibles avec un système**

*Journées Équations aux dérivées partielles* (1982), p. 1-5

<[http://www.numdam.org/item?id=JEDP\\_1982\\_\\_\\_\\_A19\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1982____A19_0)>

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

FORMES BILINEAIRES COMPATIBLES AVEC UN SYSTEME

par B. HANOUZET et J.L. JOLY

1. Soit  $A(D) = \sum_{i=1}^n A_i D_i$  avec  $A_i \in \mathcal{M}_{MN}(\mathbb{C})$ . On pose  $A(\xi) = \sum_{i=1}^n \xi_i A_i$ .

Soit  $f: \mathbb{C}^N \times \dots \times \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}$  une forme k-linéaire et on cherche sous quelle condition f définit une application continue - encore notée f -

$$f : W(A, X, Y) \times \dots \times W(A, X, Y) \longrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

$$(u_1, \dots, u_k) \longmapsto f(u_1, \dots, u_k)$$

où  $W(A, X, Y) = \{u \in X, A(D)u \in Y\}$ .

X et Y étant deux espaces de distributions contenant les fonctions  $e^{i\langle x, \xi \rangle}$  et tels que  $e^{i\nu\langle x, \xi \rangle} \rightarrow 0$  lorsque  $\nu \rightarrow \infty$ .

Il se trouve qu'une telle exigence limite en général beaucoup les applications k-linéaires admissibles ; en fait les formes k-linéaires f sur  $\mathbb{C}^N$  doivent vérifier la condition nécessaire suivante

$$\forall \xi_1, \dots, \xi_k \in \mathbb{R}^n, \quad \sum_{i=1}^k |\xi_i| \neq 0, \quad \sum_{i=1}^k \xi_i = 0,$$

$$f(\text{Ker } A(\xi_1), \dots, \text{Ker } A(\xi_k)) = 0,$$

qu'on obtient en considérant les suites :  $u_i^\nu = e^{i\nu\langle x, \xi_i \rangle} p_i$ , avec  $p_i \in \text{Ker } A(\xi_i)$ . De telles formes k-linéaires, on dira qu'elles sont A-compatibles.

Il est facile de remarquer que la A-compatibilité entraîne en général une limitation sur le nombre de variables.

Ainsi il existe un sous-ensemble  $V \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  de dimension m possédant la propriété que le cône

$$\bigcup_{\xi \in V} \text{Ker } A(\xi)$$

engendre  $\mathbb{C}^N$  tout entier, alors il n'existe pas de formes k-linéaires A-compatibles à plus de m variables.

En particulier, si  $A(D)$  définit un autre système fortement hyperbolique

$$A(D) = ID_t + \sum_{i=1}^n B_i D_i$$

avec

$$B(\xi) = \sum_{i=1}^N \tau_i(\xi) \varpi_i(\xi)$$

$$\tau_i(\xi) \in \mathbf{R} \quad , \quad 1 \leq i \leq N$$

$$\varpi_i(\xi) \varpi_j(\xi) = \delta_{ij} \varpi_i(\xi) \quad , \quad 1 \leq i, j \leq N \quad ,$$

alors l'ensemble  $V$  associé à un  $\xi_0 \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ , et défini par

$$V = \{(\xi_0, \tau_1(\xi_0)), \dots, (\xi_0, \tau_N(\xi_0))\} \quad ,$$

permet de voir que les seules formes  $A$ -compatibles non triviales sont nécessairement linéaires ou bilinéaires.

On trouvera des exemples de formes  $A$ -compatibles correspondant à des systèmes classiques dans Tartar [3], Murat [2] et Hanouzet-Joly [1]. Indiquons seulement un des exemples les plus importants, qui concerne les systèmes différentiels extérieurs, où on sait décrire l'ensemble de toutes les formes compatibles : celles-ci s'obtiennent comme combinaisons linéaires des coefficients de tous les produits extérieurs non triviaux.

## 2. UN RESULTAT DE CONTINUITÉ POUR LES FORMES BILINÉAIRES COMPATIBLES DANS LES ESPACES DE SOBOLEV.

Théorème : Soit  $s_i, t_i, i = 1, 2$  des réels vérifiant

$$s_1 + s_2 < 0$$

$$s_1 + t_2 \geq -1$$

$$s_2 + t_1 \geq -1$$

$$s_1 \geq t_1 \geq s_1 - 1$$

$$s_2 \geq t_2 \geq s_2 - 1 \quad .$$

Alors pour qu'une forme bilinéaire  $f: \mathbb{C}^N \times \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}$  définisse une application continue

$$f : W(A, H_{loc}^{s_1}(\mathbb{R}^n), H_{loc}^{t_1}(\mathbb{R}^n)) \times W(A, H_{loc}^{s_2}(\mathbb{R}^n), H_{loc}^{t_2}(\mathbb{R}^n)) \longrightarrow H_{loc}^{s_1 * s_2}(\mathbb{R}^n)$$

où  $s_1 * s_2 = \{s = s_1 \wedge s_2 \wedge s_1 + s_2 - \frac{n}{2} - \varepsilon, \varepsilon > 0\}$ ,

il faut que  $f$  soit  $A$ -compatible et il suffit que  $f$  soit régulièrement  $A$ -compatible.

Remarques : 1) Quoique l'espace d'arrivée  $H_{loc}^{s_1 * s_2}(\mathbb{R}^n)$  ne dépende pas des deux indices  $t_1$  et  $t_2$ , ce résultat est optimal dans la classe des systèmes généraux : cf. [1].

2) Il n'est pas optimal pour les systèmes elliptiques (évidemment) ou hyperboliques.

3) La démonstration repose sur le fait que si  $f$  est  $A$ -compatible et si  $f(p, q)$  s'écrit  $(p, Fq)$  on a la propriété :  
 $\forall \xi \neq 0, \exists G(\xi)$  et  $D(\xi) \in \mathcal{M}_{MN}(\mathbb{C})$  telles que

$$(1) \quad F = {}^t A(\xi) \cdot D(\xi) + {}^t G(\xi) \cdot A(\xi) .$$

On peut maintenant expliciter la dernière hypothèse de l'énoncé du théorème : on dira que  $f$  est régulièrement  $A$ -compatible, s'il existe une famille de solutions de (1) :  $\xi \mapsto (G(\xi), D(\xi))$  homogènes de degré  $-1$  en  $\xi$  et bornées sur  $|\xi| = 1$ . La démonstration se fait en utilisant l'effet régularisant via Fourier de  $D(\xi)$  et  $G(\xi)$ .

### 3. DEUX REMARQUES CONCERNANT LE CAS HYPERBOLIQUE.

On suppose  $A(D)$  fortement hyperbolique. La solution du problème de Cauchy

$$(2) \quad \begin{cases} A(D)u = 0 \\ u(0) = \varphi \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \end{cases}$$

s'exprime, à  $C^\infty$  près,

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^N \int e^{i(\langle x, \xi \rangle - t \tau_k(\xi))} \omega_k(\xi) \hat{\varphi}(\xi) d\xi ,$$

l'intégrale ayant le sens d'une intégrale oscillante. Soit  $f$  une forme

bilinéaire, alors formellement si  $u$  et  $v$  sont deux solutions du problème (2), on écrit

$$f(u,v)(x,t) = \sum_{k,\ell} \iint e^{i[\langle x, \xi + \eta \rangle - t(\tau_k(\xi) + \tau_\ell(\eta))]} f(\omega_k(\xi) \hat{\varphi}(\xi), \omega_\ell(\eta) \hat{\psi}(\eta)) d\xi d\eta .$$

Pour donner un sens à cette intégrale, on doit regarder le comportement de l'amplitude au voisinage des points critiques de la phase

$$\Phi_{k\ell} = \langle x, \xi + \eta \rangle - t(\tau_k(\xi) + \tau_\ell(\eta)) ,$$

définis par

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_{k\ell}}{\partial x} &= \xi + \eta = 0 \\ \frac{\partial \Phi_{k\ell}}{\partial t} &= \tau_k(\xi) + \tau_\ell(\eta) = 0 . \end{aligned}$$

Si  $f$  est  $A$ -compatible,

$$\xi + \eta = 0 , \quad \tau_k(\xi) + \tau_\ell(\eta) = 0 \implies f(\omega_k(\xi), \omega_\ell(\eta)) = 0 ,$$

et par conséquent l'amplitude  $f$  s'annule sur les points critiques en général à un ordre fini sauf si  $n=1$ . Dans ce dernier cas, au contraire le support conique de  $f(\omega_k(\xi), \omega_\ell(\eta))$  est contenu dans  $\{(\xi, \eta) / \xi \cdot \eta \geq 0\}$ ; donc bien disjoint de l'ensemble des  $\{(\xi, \eta) / \xi + \eta = 0\}$ . Ceci permet de voir - d'une façon un peu compliquée! - que  $f(u,v)$  a un sens des  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$  pour des données initiales des  $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$ , mais surtout de comprendre mieux la propriété de  $A$ -compatibilité avec un système hyperbolique.

La deuxième remarque concerne le comportement quand  $t \rightarrow \infty$  du produit  $f(u,v)$ .

Supposons que  $u$  et  $v$  soient solutions de (2) avec des données initiales  $\varphi$  et  $\psi$  telles que  $\varphi$  et  $\psi$  soient dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ .

On sait alors que, par exemple  $u$ , s'exprime exactement sous la forme précédente :

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_k u_k(x,t) \\ u_k(x,t) &= \int e^{i(\langle x, \xi \rangle - t \tau_k(\xi))} \omega_k(\xi) \hat{\varphi}(\xi) d\xi , \end{aligned}$$

et que moyennant des hypothèses de régularité classiques sur les  $\tau_k$ ,

$$u_k(x, t) = \left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{n-1}{2}} \varpi_k(\theta_{x/t}^k) \psi_k(x, t) \int_0^\infty e^{i\rho t [(\langle \frac{x}{t}, \theta_{x/t}^k \rangle - \tau_k(\theta_{x/t}^k))]}$$

$$e^{i\frac{\pi}{4} \text{sig } \tau''(\theta_{x/t}^k)} \widehat{\varphi}(\rho(\theta_{x/t}^k)) \det \tau''(\rho(\theta_{x/t}^k)) d\rho + O\left(\left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{n+1}{2}}\right),$$

où  $x/t \mapsto \theta_{x/t} \in S^{n-1}$  est uniquement définie et différentiable dans un voisinage de la  $k$ -ième nappe du cône d'onde qui contient le support de la fonction tronquante  $\psi_k$ .

Ce résultat dit que  $u_k$ , donc  $u$ , est en  $O\left(\left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right)$  et par conséquent si  $f$  est une forme bilinéaire en général  $f(u, v) = O\left(\left(\frac{1}{t}\right)^{n-1}\right)$ . Toutefois, utilisant l'écriture explicite de chaque  $u_k$ , il est facile de voir que

$$f(u, v) = O\left(\left(\frac{1}{t}\right)^n\right) \iff f \text{ A-compatible},$$

ce qui semble indiquer que l'interaction quadratique décrite par  $f$  est plus faible si  $f$  est A-compatible.

#### BIBLIOGRAPHIE SOMMAIRE

- [1] B. Hanouzet, J.L. Joly : Formes multilinéaires sur des sous-espaces de distributions, Publications Analyse Appliquée et Informatique de Bordeaux I, n° 8203, Séminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz, exposé XIV (1982), Note aux C.R. Acad. Sc. Paris (à paraître).
- [2] F. Murat : Compacité par compensation, Ann. Sc. Sup. Pisa 5, 3 (1978), 489-507.
- [3] L. Tartar : Compensated compactness and applications to p.d.e. Non linear analysis and mechanics, Herriott-Watt Symposium, vol. IV, ed. P.R.J. Knops, Research Notes in Mathematics n° 39, Pitman, Londres (1979), 136-212.