

JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

TADATO MATSUZAWA

Opérateurs pseudo-différentiels et classes de Gevrey

Journées Équations aux dérivées partielles (1982), p. 1-6

http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1982____A12_0

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

OPERATEURS PSEUDO-DIFFERENTIELS ET CLASSES DE GEVREY

par T. MATSUZAWA

Le résultat que nous allons énoncer a été fait en collaboration avec S. Hashimoto et Y. Morimoto.

La définition d'une classe des opérateurs pseudo-différentiels analytiques se trouve dans le livre de F. Trèves, Ch. V, [4]. Nous voulons étendre ses résultats au point de vue de la propriété Gevrey pour une classe d'opérateurs pseudo-différentiels du type (ρ, δ) de L. Hörmander, [2]. F. Trèves a utilisé la théorie des fonctions complexes comme un outil fondamental. Par contre nous utilisons essentiellement les calculs réels élémentaires pour résoudre les propriétés Gevrey des opérateurs pseudo-différentiels.

Nous remarquons qu'il y a des résultats de G. Métivier [3] sur l'hypoellipticité analytique des opérateurs appartenant à $S_{\rho, \delta}^m$. Je le remercie pour les discussions que nous avons eues ensemble.

Soit Ω un ouvert dans \mathbf{R}^N et soit $\theta \geq 1$, alors on désigne par $G^\theta(\Omega)$ l'ensemble de toute fonction Gevrey d'ordre θ , i.e. $u \in C^\infty(\Omega)$ et pour tout compact $K \subset \Omega$ il existe deux constantes C_0 et C_1 telles que pour tout $\alpha \in \mathbf{Z}_+^n$

$$\sup_{x \in K} |D^\alpha u(x)| \leq C_0 C_1^{|\alpha|} (\alpha!)^\theta.$$

Ensuite, soient ρ , δ et m des nombres réels tels que $0 \leq \delta < \rho \leq 1$ et $-\infty < m < \infty$. On connaît bien la définition de la classe $S_{\rho, \delta}^m(\Omega \times \mathbf{R}^n)$ des symboles des opérateurs pseudo-différentiels de L. Hörmander.

En précisant la condition de $S_{\rho, \delta}^m$, nous allons donner la définition des symboles d'opérateurs Gevrey-analytiques.

Soient maintenant les constantes ρ , δ , σ et m telles que $0 \leq \delta < \rho \leq 1$, $\sigma \geq 1$ et $-\infty < m < \infty$.

Définition 1 : Nous désignons par $S_{\rho, \delta, \sigma}^m = S_{\rho, \delta, \sigma}^m(\Omega \times \mathbf{R}^n)$ l'ensemble de toute fonction $a(x, \xi) \in C^\infty(\Omega \times \mathbf{R}^n)$ telle que pour tout compact K de Ω il existe des constantes positives C_0 , C_1 et B telles que

$$(1) \quad \sup_{x \in K} |a_{(\beta)}^{(\alpha)}(x, \xi)| \leq C_0 C_1^{|\alpha+\beta|} \alpha! \beta!^\sigma (1 + |\xi|)^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}$$

$$\text{si } |\xi| \geq B |\alpha|^\theta, \quad \theta = \frac{\sigma}{\rho - \delta} .$$

Ici nous avons écrit comme d'habitude

$$a_{(\beta)}^{(\alpha)}(x, \xi) = \partial_{\xi}^{\alpha} D_x^{\beta} a(x, \xi) \quad , \quad \partial_{\xi} = \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \xi_n} \right)$$

$$D_x = \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_n} \right) .$$

Nous remarquons que $\theta \geq 1$ et si $\theta = 1$, i.e., si $\sigma = \rho = 1$ et $\delta = 0$, la classe $S_{1,0,1}^m$ est équivalente à la classe pseudo-analytique donnée par F. Trèves [4].

Soit $a(x, \xi) \in S_{\rho, \delta, \sigma}^m(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ alors l'opérateur pseudo-différentiel associé à $a(x, \xi)$ est défini par la formule

$$(2) \quad a(x, D) u(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x, \xi \rangle} a(x, \xi) u(\xi) d\xi ,$$

où $u(x) \in C_0^\infty(\Omega)$, et

$$u(\xi) = \int e^{-i\langle x, \xi \rangle} u(x) dx .$$

On sait bien que $a(x, D)$ agit comme un opérateur linéaire continu de $\mathcal{E}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ et cet opérateur est C^∞ -pseudolocal.

Pour un symbole $a(x, \xi) \in S_{\rho, \delta, \sigma}^m(\Omega \times \mathbb{R}^n)$, nous allons étudier les propriétés de l'opérateur $a(x, D)$ et son noyau distribution qui est défini par l'intégrale oscillatoire :

$$(3) \quad K(x, y) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x-y, \xi \rangle} a(x, \xi) d\xi .$$

Théorème 1 : Soit $a(x, \xi) \in S_{\rho, \delta, \sigma}^m(\Omega \times \mathbb{R}^n)$. Alors on a

- (i) $K(x, y) \in G^\theta(\Omega \times \Omega \setminus \Delta)$, $\theta = \frac{\sigma}{\rho - \delta}$, $\Delta = \{(x, x); x \in \Omega\}$.
- (ii) $a(x, D)$ est pseudolocal Gevrey d'ordre θ , i.e. pour $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ quelconque $a(x, D)u$ est une fonction Gevrey d'ordre θ dans tout ouvert où c'est vrai de $u(x)$.

Pour démontrer (i), on doit estimer l'intégrale oscillatoire

$$D_x^\alpha D_y^\beta k(x,y) = (2\pi)^n \sum_{\gamma \leq \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} \int e^{i\langle x-y, \xi \rangle} (-\xi)^\beta \xi^\gamma a_{(\alpha-\gamma)}(x, \xi) d\xi .$$

Cela est fait à partir de l'hypothèse (1).

Le symbole de l'opérateur pseudo-différentiel est souvent donné comme une série formelle :

$$(4) \quad \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x, \xi) \quad , \quad a_j(x, \xi) \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^n) \quad , \quad j = 0, 1, \dots .$$

Dans ce cas nous posons l'hypothèse suivante :

(H₁) Pour tout compact K de Ω , il existe trois constantes positives C₀, C₁ et B telles que

$$(5) \quad \sup_{x \in K} |a_{j(\beta)}^{(\alpha)}(x, \xi)| \leq C_0 C_1^{|\alpha+\beta|+1} (|\beta|+j)!^\sigma \alpha! (1+|\xi|)^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|-(\rho-\delta)j}$$

pour $|\xi| \geq B(j + |\alpha|)^\theta$, $\theta = \frac{\sigma}{\rho - \delta}$.

Alors on peut construire le vrai symbole Gevrey-pseudo-analytique de la série formelle (4) comme dans le cas analytique de F. Trèves.

On utilise une série de fonctions $\varphi_j(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $j = 0, 1, \dots$, vérifiant

$$(6) \quad 0 \leq \varphi_j(\xi) \leq 1 \text{ pour tout } \xi \text{ et } \varphi_j(\xi) = 0 \text{ si } |\xi| < 2R \sup(j^\theta, 1)$$

et $\varphi_j(\xi) = 1$ si $|\xi| > 3R \sup(j^\theta, 1)$;

$$(7) \quad |D^\alpha \varphi_j| \leq \left(\frac{C}{R j^{\theta-1}} \right)^{|\alpha|} \text{ si } |\alpha| \leq 2j .$$

Prenons $R > 2^{\theta-1} B$, où B est un nombre donné dans (5) et posons

$$(8) \quad a(x, \xi) \equiv \sum_{j=0}^{\infty} \varphi(j) a_j(x, \xi) .$$

Alors on a $a(x, \xi) \in S_{\rho, \delta, \sigma}^m(\Omega \times \mathbb{R}^n)$.

Ça c'est démontré par le procédé de F. Trèves.

Ensuite, nous considérons la composition des deux opérateurs.

Soient $a(x, \xi) \in S_{\rho', \delta', \sigma'}^{m'}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ et $b(x, \xi) \in S_{\rho'', \delta'', \sigma''}^{m''}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ avec $\delta' < \rho''$. Soit Ω' relativement compact dans Ω et prenons $h \in C_0^\infty(\Omega)$ avec $h \equiv 1$ sur un voisinage de $\overline{\Omega'}$. Alors le symbole de l'opérateur de composition $r(x, D) = a(x, D)hb(x, D)$ est donné par

$$(9) \quad r(x, \xi) = a(x, D + \xi) h(x) b(x, \xi) = \\ = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\Omega} e^{i\langle x-y, \eta \rangle} a(x, \xi + \eta) h(y) b(y, \xi) dy d\eta .$$

Posons $\delta = \max(\delta', \delta'')$, $\rho = \min(\rho', \rho'')$, $\sigma = \max(\sigma', \sigma'')$ et $m = m' + m''$.

Par le théorème 1, l'opérateur $r(x, D) = a(x, D)hb(x, D)$ est θ -pseudolocal dans Ω' avec $\theta = \frac{\sigma}{\rho - \delta}$. De plus si l'on pose

$$r_j(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=j} \frac{1}{\alpha!} a^{(\alpha)}(x, \xi) D_x^\alpha b(x, \xi) \quad , \quad j = 0, 1, 2 \dots ,$$

on voit aisément que la série $\{r_j(x, \xi)\}_{j=0}^\infty$ vérifie la condition (H_1) dans $\Omega \times \mathbb{R}^n$. Nous prenons une série de fonctions $\{\varphi_j\}_{j=0}^\infty$ comme ci-dessus et posons

$$(10) \quad \tilde{r}(x, \xi) = \sum_{j=0}^\infty \varphi_j(\xi) r_j(x, \xi) .$$

On a $\tilde{r}(x, \xi) \in S_{\rho, \delta, \sigma}^m(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ et on sait bien que $r(x, \xi) - \tilde{r}(x, \xi) \in S^{-\infty}(\Omega')$.

Théorème 2 : On a

$$(11) \quad r(x, D) = \tilde{r}(x, D) + F \quad \text{dans } \Omega' \quad ,$$

où F est un opérateur intégral à noyau $F(x, z) \in G^\theta(\Omega' \times \Omega')$.

Ensuite nous allons chercher le symbole de l'opérateur adjoint ${}^t a(x, D)$ de $a(x, D) \in S_{\rho, \delta, \sigma}^m$. Pour $a(x, \xi) \in S_{\rho, \delta, \sigma}^m(\Omega \times \mathbb{R}^n)$, posons

$$r_j(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=j} (-D_x)^\alpha a^{(\alpha)}(x, -\xi) \quad , \quad j = 0, 1, \dots .$$

Alors $\{r_j(x, \xi)\}_{j=0}^\infty$ satisfait à l'hypothèse (H_1) et on peut construire un symbole

$$r(x, \xi) = \sum_{j=0}^\infty \varphi_j(\xi) r_j(x, \xi) \in S_{\rho, \delta, \sigma}^m(\Omega = \mathbb{R}^n) \quad ,$$

avec $\{\varphi_j(\xi)\}_{j=0}^\infty$ donnée plus haut.

Théorème 3 : Soit $a \in S_{\rho, \delta, \sigma}^m$. Alors pour tout ouvert Ω' relativement compact de Ω on a

$${}^t a(x, D) = r(x, D) + F \quad \text{dans } \Omega' \quad ,$$

où F est un opérateur intégral à noyau $F(x,z) \in G^\theta(\Omega' \times \Omega')$ avec $\theta = \frac{\sigma}{\rho - \sigma}$.

Finalement nous allons considérer l'existence des paramétrix favorables.

Théorème 4 : Soit $a(x, \xi) \in S_{\rho, \delta, \sigma}^m(\Omega \times \mathbb{R}^n)$. On pose des hypothèses :

(H₂) pour tout compact K de Ω il existe des constantes C_0, C_1 et B telles que

$$(12) \quad |a_{(\beta)}^{(\alpha)}(x, \xi)| \leq C_0 C_1^{|\alpha+\beta|} \alpha! \beta!^\sigma |a(x, \xi)| (1+|\xi|)^{-\rho|\alpha| + \delta|\beta|}$$

pour $x \in K$ et $|\xi| \geq B |\alpha|^\theta$, $\theta = \frac{\sigma}{\rho - \delta}$;

(H₃) Il existe deux constantes c et m' telles que

$$(13) \quad |a(x, \xi)| \geq c |\xi|^{m'} \quad , \quad x \in K \quad , \quad |\xi| \geq B \quad .$$

Alors pour tout ouvert Ω' relativement compact de Ω , il existe un opérateur $b(x, D) \in S_{\rho, \delta}^{-m'}(\Omega) \cap S_{\rho, \delta, \sigma}^{-m'}(\Omega')$ paramétrix à droite de $a(x, D)$ dans Ω' tel que

(a) $a(x, D) b(x, D) = I + F$ dans Ω' ,

(b) F est opérateur intégral à noyau

$$F(x, z) \in G^\theta(\Omega' \times \Omega') \quad , \quad \theta = \frac{\sigma}{\rho - \delta} \quad ,$$

(c) $b(x, D)$ est θ -pseudolocal dans Ω' ,

(d) le noyau $k(x, y)$ de $b(x, D)$ est une fonction appartenant à $G^\theta(\Omega' \times \Omega' \setminus \Delta)$, où Δ est un ensemble diagonal.

Corollaire : Sous les hypothèses (H₂) et (H₃), l'opérateur $a(x, D)$ est hypoelliptique Gevrey d'ordre $\theta = \frac{\sigma}{\rho - \delta}$, i.e. si $a(x, D)u \in G^{\sigma'}(\Omega')$, $\Omega' \subset \Omega$, $\sigma' \geq 1$ et $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$, alors $u \in G^\gamma(\Omega')$, où $\gamma = \max\{\sigma', \theta\}$.

Exemple simple : Considérons une équation ordinaire

$$pu = x^\ell \frac{d}{dx} u(x) - u(x) = 0 \quad \text{dans } -\infty < x < \infty \quad ,$$

où ℓ est un entier ≥ 2 . Alors $p(x, \xi) = ix^\ell \xi - 1$ satisfait aux conditions (H₂) et (H₃) avec $\sigma = \rho = 1$, $\delta = 1/\ell$ et donc $\theta = \ell / (\ell - 1) > 1$.

D'autre part, une solution de $Pu = 0$ est donnée par

$$u(x) = \begin{cases} \exp\left\{\frac{1}{1-\ell} x^{1-\ell}\right\} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} .$$

On sait que $u(x) \in G^{\ell/\ell-1}(\mathbb{R})$, ce qui montre que le résultat du corollaire est optimal.

Nous remarquons qu'un résultat identique du corollaire a été obtenu tout récemment par Bolley, Camus et Métivier [1] dans le cas où $a(x,D)$ est un opérateur différentiel par une autre méthode.

Finalement nous remarquons que tous les résultats peuvent être considérés au point de vue microlocal : i.e. microlocalisation.

Le détail de la démonstration paraîtra ailleurs.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] P. Bolley, J. Camus, G. Métivier : à paraître.
- [2] L. Hörmander : Pseudodifferential operators and hypoelliptic equations, Proc. Symposium on Singular Integrals, Amer. Math. Soc. 10 (1967), 138-183.
- [3] G. Métivier : Analytic hypoellipticity for operators with multiple characteristics, Comm. in Partial Differential Equations, 6 (1), (1981), 1-90.
- [4] F. Trèves : Introduction to pseudodifferential and Fourier integral operators, Vol. 1, Plenum Press (1981).
- [5] P. Krée, L. Boutet de Monvel : Pseudo-differential operators and Gevrey classes, Ann. Inst. Fourier 17 (1), (1967), 295-323.
- [6] L.R. Volevič : Pseudodifferential operators with holomorphic symbols and Gevrey classes, Trans. of the Moscow Mathematical Society, Vol. 24 (1971), 43-68.