

JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

GILLES LEBEAU

Deuxième microlocalisation sur les sous-variétés isotropes

Journées Équations aux dérivées partielles (1982), p. 1-7

http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1982____A10_0

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DEUXIEME MICROLOCALISATION SUR LES
SOUS-VARIETES ISOTROPES

par G. LEBEAU

§ 0. INTRODUCTION

La notion de deuxième microlocalisation le long d'une sous-variété involutive réelle a été inventée par M. Kashiwara [cf. J. M. Bony 1] et ses aspects algébriques ont été développés par Y. Laurent [3]. Dans [5], J. Sjöstrand a construit, en utilisant ses propres techniques, la notion de deuxième front d'onde analytique sur une sous-variété lagrangienne réelle. Les résultats (à paraître) que nous donnons brièvement ici montrent que les idées et méthodes de [5], ainsi que la théorie géométrique de P. Schapira [4] permettent naturellement de construire une deuxième microlocalisation à partir d'une sous-variété isotrope réelle.

Cette notion a été développée pour traiter certains problèmes de diffraction pour les opérateurs P du second ordre, de type principal réel lorsque toute une bicaractéristique de P est contenue dans le bord, et permet d'étendre un théorème de Kataoka [2] sur la diffraction aux géométries non strictement convexes.

On utilise ici systématiquement les espaces H_φ de J. Sjöstrand [5] : Si X est un ouvert de \mathbb{C}^n , et φ une fonction continue sur X , à valeurs réelles, une fonction $u(x, \lambda)$ définie sur $X \times \mathbb{R}_+$, holomorphe en x appartient à $H_\varphi(X)$ si et seulement si :

$$0.1 \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \lambda(\varepsilon), \lambda \geq \lambda(\varepsilon) \implies \forall x \in X \quad |u(x, \lambda)| \leq e^{\lambda[\varphi(x) + \varepsilon]}$$

Pour $u \in H_\varphi(X)$, on définit son spectre, $SS(u)$, comme étant le fermé de X complémentaire des points au voisinage desquels on a une estimation 0.1 avec φ remplacé par $\varphi - C$ où C est strictement positif. Lorsque φ est pluri-sous-harmonique stricte, la 2-forme de Lévi $\frac{2}{i} \bar{\partial}\partial\varphi$ munit X d'une structure symplectique réelle, et les éléments de H_φ jouent le rôle des microfonctions sur $T^*\mathbb{R}^n$. Pour Γ sous-variété isotrope de X pour $\frac{2}{i} \bar{\partial}\partial\varphi$, on définit au § 1 la notion de Γ -analyticité et c'est cette notion qu'on microlocalise en associant à tout élément u de H_φ un deuxième micro support qui est un fermé d'une variété analytique réelle de dimension $2n$, notée $\tilde{\Gamma}$, construite au § 2. Il est remarquable que $\tilde{\Gamma}$ soit munie naturellement d'une structure symplectique homogène, et on a une injection canonique de $T^*\Gamma$ dans $\tilde{\Gamma}$. Dans le § 3, on énonce les deux théorèmes principaux, régularité microanalytique et Watermelon, et

on donne dans un cas particulier l'expression d'une transformation intégrale de type Bros-Iagolnitzer qui permet de lire le deuxième micro-support.

§ I. Γ -ANALYTICITE

Soit X une variété analytique complexe de dimension n . On note $X^{\mathbb{R}}$ la variété réelle sous-jacente, $TX \simeq TX^{\mathbb{R}}$ le fibré tangent à X , $T^*X^{\mathbb{R}}$ le fibré cotangent à $X^{\mathbb{R}}$, T^*X le fibré cotangent à X . On identifie T^*X et $T^*X^{\mathbb{R}}$ de la façon suivante : à la forme \mathbb{C} -linéaire $\zeta \in T_x^*X$ on associe la forme \mathbb{R} -linéaire $u \rightarrow -\operatorname{Im} \zeta(u)$. On note $\sigma = \partial[\zeta dz]$ la 2-forme canonique sur T^*X , $\operatorname{Re} \sigma$ et $\operatorname{Im} \sigma$ ses parties réelles et imaginaires qui sont des 2-formes sympléctiques sur $T^*X^{\mathbb{R}}$ identifié à T^*X ; alors $-\operatorname{Im} \sigma$ est la 2-forme canonique sur $T^*X^{\mathbb{R}}$. Suivant la terminologie de Schapira [4], pour une sous-variété de T^*X , on dit qu'elle est \mathbb{R} -symplectique (ou lagrangienne ou isotrope ou involutive) (resp. I symplectique etc...) si elle est symplectique pour la 2-forme $\operatorname{Re} \sigma$ (resp. $\operatorname{Im} \sigma$).

Soit φ une fonction sur X à valeurs réelles, on note j_φ l'injection de X dans T^*X :

$$I.1 \quad j_\varphi(x) = \left(x, \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x)\right)$$

et

$$I.2 \quad \Lambda_\varphi = j_\varphi(X).$$

Alors Λ_φ correspond par identification au sous-espace de $T^*X^{\mathbb{R}}$:

$$I.3 \quad \{(x, \xi) \in T^*X^{\mathbb{R}}, \xi = d\varphi(x)\}$$

et donc est I lagrangienne. On a :

$$I.4 \quad j_\varphi^*(\operatorname{Re} \sigma) = \frac{2}{i} \bar{\partial} \partial \varphi$$

Par suite Λ_φ est \mathbb{R} -symplectique si et seulement si $\bar{\partial} \partial \varphi$ est non dégénérée et dans ce cas [cf. 4] T^*X est complexifié de Λ_φ . On notera

$$I.5 \quad \mathcal{L}_\varphi(u, v) = \frac{2}{i} \bar{\partial} \partial \varphi(u, iv)$$

la 2-forme hermitienne de type de Lévi associée à φ . Dans la suite, φ désignera une fonction analytique de X dans \mathbb{R} strictement pluri-sous-harmonique, i.e. \mathcal{L}_φ est définie positive. Alors Λ_φ est I-lagrangien, \mathbb{R} symplectique, et X est muni de la 2-forme symplectique $\frac{2}{i} \bar{\partial}\partial\varphi$.

Lemme I.6 : Soit V un sous-espace \mathbb{R} linéaire de $T_x X$, V^\perp son orthogonal pour $\frac{2}{i} \bar{\partial}\partial\varphi$. Alors

- 1) $V^\perp \oplus iV = T_x X$
- 2) Si V est involutif et $H = V \cap iV$

$$V^\perp \oplus H \oplus iV^\perp = T_x X$$

D'après le lemme précédent, si Γ est une sous-variété isotrope de X , $T\Gamma \cap iT\Gamma = \{0\}$ donc est totalement réelle. Le lemme suivant caractérise les sous-variétés isotropes de X .

Lemme I.7 : Soit Γ une sous-variété totalement réelle de X de complexifié $\Gamma^\mathbb{C}$. Il y a équivalence entre

- 1) Γ est isotrope
- 2) Il existe h pluri harmonique sur $\Gamma^\mathbb{C}$ telle que

$$\varphi|_{\Gamma^\mathbb{C}} - h \geq 0 \quad \text{et} \quad (\varphi - h)|_\Gamma = 0$$

Si 2) est satisfait, h est unique et

$$I.8 \quad \varphi|_{\Gamma^\mathbb{C}} - h \simeq \text{dist}^2(z, \Gamma)$$

Soit à présent V une sous-variété involutive de X , au voisinage de V , d'après le lemme I.6, X s'identifie à \tilde{V} , la réunion des complexifiés des feuilles isotropes de V . On définit donc la fonction réelle φ_V sur X par :

I.9 Si Γ est feuille de V , $\varphi_V|_{\Gamma^\mathbb{C}} = h$, où h est défini par le lemme I.7

Alors φ_V est pluri-sous-harmonique et on a $\varphi \geq \varphi_V$ avec égalité exactement sur V . Soit à présent $\widetilde{j_\varphi(V)}$ la réunion des complexifiés des feuilles de $j_\varphi(V)$ dans T^*X .

Lemme I.10 : $\Lambda_{\varphi_V} = \widetilde{j_{\varphi}(V)}$,

d'où

Corollaire I.11 : Si Γ est une sous-variété isotrope de X , V et V' deux sous-variétés involutives dont Γ est une feuille, alors

$$\varphi_V - \varphi_{V'} \in O(\text{dist}^2(z, \Gamma^{\mathbb{C}}))$$

On pose donc la définition suivante de régularité analytique partielle :

Définition I.12 : Soit Γ une sous-variété isotrope de X pour $\frac{2}{i} \bar{\partial} \partial \varphi$, et $x_0 \in \Gamma$.

On dit que $u \in H_{\varphi}$ est Γ -analytique en x_0 si et seulement si il existe $M \geq 0$ et V sous-variété involutive dont Γ est une feuille, tels que au voisinage de x_0 , on ait $u \in H_{\varphi}$, où $\varphi'(x) = \varphi_V(x) + M \text{dist}^2(x, \Gamma^{\mathbb{C}})$, et on note $\Gamma\text{-supp.sing}(u)$ le fermé de Γ formé des x où u n'est pas Γ -analytique.

Cette définition est justifiée par le théorème suivant (prolongement analytique) qui se déduit du principe du maximum :

Théorème I.13 : Si u est Γ -analytique sur un ouvert connexe w de Γ , alors $SS(u) \cap w$ est soit \emptyset , soit égal à w .

§ II. CONSTRUCTION DE $\tilde{\Gamma}$:

Soit M une variété symplectique, analytique réelle de dimension $2n$ et Γ une sous-variété analytique isotrope de M , de dimension d . Alors au voisinage de chaque point de Γ , il existe une carte locale symplectique (X, ξ) de M , centrée en ce point, dans laquelle Γ a pour équation :

$$\text{II.1} \quad X_{d+1} = \dots = X_n = 0 \quad \xi = 0$$

Les résultats qui suivent se montrent en se ramenant à une telle carte.

Soit E l'ensemble des fonctions $s \rightarrow \gamma(s)$ de $C^{\infty}(\mathbb{R}, M)$ vérifiant $\gamma(0) \in \Gamma$, $\dot{\gamma}(0) \in (T_{\gamma(0)} \Gamma)^{\perp}$ et E_2 l'espace des jets à l'ordre 2 en $s = 0$ des éléments de E , qui est une variété analytique de dimension $4n$. On munit E de la relation d'équivalence \sim définie par :

$$\text{II.2} \quad \gamma_1 \sim \gamma_2 \quad \text{ssi} \quad \begin{aligned} & \gamma_1(0) = \gamma_2(0) ; \dot{\gamma}_1(0) - \dot{\gamma}_2(0) \in T\Gamma \\ & \forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R}), f|_\Gamma = 0, H_f|_\Gamma \in T\Gamma \Rightarrow (f \circ \gamma_1 - f \circ \gamma_2)(s) \in O(s^3) \end{aligned}$$

et on pose

$$\text{II.3} \quad \tilde{\Gamma} = E/\sim$$

Alors $\tilde{\Gamma}$ s'identifie à un quotient de E_2 et est une variété analytique de dimension $2n$. Pour $\gamma \in E$, on note $\tilde{\gamma}$ sa classe dans $\tilde{\Gamma}$ et π désigne l'application canonique de $\tilde{\Gamma}$ dans $(T\Gamma)^\perp/T\Gamma$ induite par $\gamma \mapsto (\gamma(0), \dot{\gamma}(0))$, qui est surjective. Soit 0 la section nulle de $(T\Gamma)^\perp/T\Gamma$ et γ tel que $\tilde{\gamma} \in \pi^{-1}(0)$. Alors pour f vérifiant $f|_\Gamma = 0$, $H_f|_\Gamma \in T\Gamma$, $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{2}{s} f[\gamma(s)]$ ne dépend que de $H_f[\gamma(0)]$ et définit une injection canonique j de $T^*\Gamma$ dans $\tilde{\Gamma}$. On a donc une "suite exacte" au-dessus de Γ .

$$\text{II.4} \quad 0 \longrightarrow T^*\Gamma \xrightarrow{j} \tilde{\Gamma} \xrightarrow{\pi} (T\Gamma)^\perp/T\Gamma \longrightarrow 0$$

Sur $\tilde{\Gamma}$ on a évidemment une homogénéité canonique définie par $t \cdot \tilde{\gamma} = \widetilde{s \rightarrow \gamma(ts)}$. Soit à présent TE l'ensemble des $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}, TM)$, $\phi(s) = (\gamma(s), v(s))$ vérifiant

- 1) $v(0) \in T\Gamma$, $\gamma \in E$
- 2) $\forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ $f|_\Gamma = 0, H_f|_\Gamma \in T\Gamma \Rightarrow df_{\gamma(s)}[v(s)] \in O(s^2)$

Pour $\phi \in TE$, on pose

$$\text{II.6} \quad 2\alpha(\phi) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \langle \gamma'(s), v(s) \rangle$$

Lemme II.7 : $\alpha(\phi)$ induit une 1-forme canonique $\alpha_{\tilde{\Gamma}}$ sur $\tilde{\Gamma}$, homogène de degré 2 et $\omega_{\tilde{\Gamma}} = d\alpha_{\tilde{\Gamma}}$ est une 2-forme symplectique sur $\tilde{\Gamma}$.

On appelle $\tilde{\Gamma}$ l'éclaté symplectique de Γ . Ces constructions géométriques s'expriment simplement dans la carte II.1 : Si pour $(\tilde{x}, \tilde{\xi}) \in \mathbb{R}^{2n}$ on pose :

$$\text{II.8} \quad \gamma(s) = (\tilde{x}', s\tilde{x}'', \frac{s^2}{2} \tilde{\xi}', s \tilde{\xi}'')$$

alors $(\tilde{x}, \tilde{\xi}) \rightarrow \tilde{\gamma}$ est un système de coordonnées locales sur $\tilde{\Gamma}$ dans lequel on a :

$$\text{II.9} \quad \begin{cases} 2\alpha_{\tilde{\Gamma}} = \tilde{\xi}' d\tilde{x}' + \tilde{\xi}'' d\tilde{x}'' - \tilde{x}'' d\tilde{\xi}'' \\ 2\omega_{\tilde{\Gamma}} = d\tilde{\xi}' \wedge d\tilde{x}' + 2d\tilde{\xi}'' \wedge d\tilde{x}'' \end{cases}$$

§ III. DEUXIEME MICRO-SUPPORT

Soit X et φ comme dans le § 1, et Γ une sous-variété isotrope de X pour $\frac{2}{i} \bar{\partial} \partial \varphi$. On montre qu'à tout $u \in H_{\varphi}(X)$, on peut associer un fermé homogène de $\tilde{\Gamma}$, noté $S_{\Gamma}^2(u)$ et qu'on appelle le Γ -deuxième micro-support de u . On pose alors :

$$\text{III.1} \quad S_{\Gamma}^2(u) = S_{\Gamma}^2(u) \cap j(T^*\Gamma) ; \quad \dot{S}S_{\Gamma}^2(u) = \dot{S}S_{\Gamma}^2(u) \cap j(T^*\Gamma \setminus \Gamma)$$

et on obtient l'analogie du théorème classique de la microlocalisation :

Théorème III.2 : 1) $S_{\Gamma}^2(u) = \emptyset$ ssi $SS(u) \cap \Gamma = \emptyset$
 2) Si p est la projection de $T^*\Gamma$ sur Γ , on a :

$$p(\dot{S}S_{\Gamma}^2(u)) = \Gamma \cdot \text{supp sing}(u)$$

Soit à présent τ une fonction analytique réelle sur Γ , telle que l'hypersurface $\tau = 0$ de Γ soit lisse. Si $\tilde{\gamma} \in \tilde{\Gamma}$ et θ est un vecteur tangent, alors la classe dans $\tilde{\Gamma}$ du chemin $s \rightarrow \gamma(s) + \frac{s^2}{2} \theta$ ne dépend que de la classe de θ modulo $(T\Gamma)^{\perp}$ donc définit une action additive de $T^*\Gamma$ sur $\tilde{\Gamma}$.

Théorème III.3 (Watermelon) : Soit $u \in H_{\varphi}(X)$ tel que $\Gamma \cap SS(u) \cap \tau < 0 = \emptyset$. Alors $S_{\Gamma}^2(u) \big|_{\tau=0}$ est invariant par $\mathbb{R} \cdot d\tau$.

Terminons en donnant un exemple de transformation intégrale caractérisant le deuxième micro-support : soit $X = \mathbb{C}^n$ $\varphi(x) = \frac{1}{2}(\text{Im } x)^2$, $\Gamma = \{x = (x', x''), \text{Im } x' = 0, x'' = 0\}$ avec $x' = (x_1, \dots, x_d)$. Pour $\mu > 0$, $z \in \mathbb{C}^n$ et w ouvert de Γ , on pose, pour $u \in H_{\varphi}$ au voisinage de w :

$$\text{III.4} \quad \tilde{u}_w(z, \mu, \lambda) = \int_w e^{\frac{-\lambda \mu^2}{2(1-\mu^2)} (z' - x')^2} u(x', \mu z'', \lambda) dx'$$

Alors pour $\text{Re } z' \in w$, $|\mu z''|$ assez petit, on obtient par déformation de contour d'intégration l'estimation :

$$\text{III.5} \quad |\tilde{u}_w(z, \mu, \lambda)| \leq e^{\lambda \mu^2 \varphi(z)} + \lambda \varepsilon$$

pour $\lambda \geq \lambda(\varepsilon)$ et $0 < \mu \leq \mu_0$, où μ_0 dépend de la distance de $\text{Re } z'$ au complémentaire de w .

Soit $\Delta_\mu(z)$ le point de X :

$$\text{III.6} \quad \text{Re } x' = \text{Re } z' \quad \text{Im } x' = \mu^2 \text{Im } z', \quad x'' = \mu z''$$

et $\tilde{\Delta}(z)$ la classe dans $\tilde{\Gamma}$ du chemin III.6 tracé dans X lorsque μ varie.

[Lorsqu'on écrit III.4 sous forme de transformation canonique (à $\mu > 0$ fixé),

$\Delta_\mu(z)$ est le point stationnaire de la phase qu'on obtient dans l'exponentielle].

Alors $z \rightarrow \tilde{\Delta}(z)$ est un isomorphisme de \mathbb{C}^n sur $\tilde{\Gamma}$ et $T^*\tilde{\Gamma}$ s'identifie à $z'' = 0$. De

plus, il est symplectique si on munit \mathbb{C}_z^n de la 2-forme $\frac{2}{i} \bar{\partial} \partial \varphi$. Alors pour

$z_0 \in \mathbb{C}^n$, $\text{Re } z'_0 \in w$, $\tilde{\Delta}(z_0) \notin S_{\tilde{\Gamma}}^2(u)$ équivaut à :

III.7 Il existe $C > 0$ et U voisinage de z_0 et $\mu_0 > 0$ tels que pour $0 < \mu \leq \mu_0$
et $\lambda \geq \lambda(\mu)$ décroissant en μ on ait :

$$\forall z \in U \quad |\tilde{u}_w(z, \mu, \lambda)| \leq e^{\lambda \mu^2 [\varphi(z) - c]}$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. M. Bony : Extension du théorème de Holmgren. Séminaire Goulaouic-Schwartz 1975-76, exposé 17.
- [2] M. Kataoka : Micro-local theory of boundary value problems II.
- [3] Y. Laurent : Théorie de la deuxième microlocalisation dans le domaine complexe. Thèse, Orsay, 1982.
- [4] P. Schapira : Condition de positivité dans une variété symplectique complexe. Application à l'étude des microfonctions. Ann. Sc. E.N.S. 14, 1981.
- [5] J. Sjöstrand : Singularités analytiques microlocales. Publ. univ. Paris Sud (1981).

*
* *
*