JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

PIERRE BOLLEY
JACQUES CAMUS
JEAN NOURRIGAT

La condition de Hörmander-Kohn pour les opérateurs pseudo-différentiels

Journées Équations aux dérivées partielles (1981), p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1981____A6_0>

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Conférence n° 6

LA CONDITION DE HÖRMANDER-KOHN
POUR LES OPERATEURS PSEUDO-DIFFERENTIELS

par

P. BOLLEY, J. CAMUS et J. NOURRIGAT

§ 1. ENONCE

On considère, dans un ouvert Ω de R^n, un système $A_1 \dots A_\ell$ d'opérateurs pseudo-différentiels dans $OPS^{m_j}_{1,0}(\Omega)$, proprement supportés (les m_j étant des réels quelconques). On suppose que $A_j - A_j^*$ est dans $OPS^{m_j-1}_{1,0}(\Omega)$ (où A_j^* désigne l'adjoint formel de A_j). On va alors établir le théorème suivant :

Théorème 1 : Soit (x_0,ξ_0) dans $\Omega \times R^n \setminus \{0\}$. On fait les hypothèses ci-dessus, et l'on suppose qu'il existe un commutateur itéré Y de longueur $r \geq 1$, c'est à dire un opérateur de la forme $Y = (\text{ad } A_{i_1})(\text{ad } A_{i_2})\dots(\text{ad } A_{i_{r-1}}) A_{i_r}$, qui est elliptique en (x_0,ξ_0). Alors on a l'implication suivante, pour tout s réel :

$$(1) \qquad \left.\begin{array}{l} u \in \mathcal{D}'(\Omega) \\ A_j u \in H^{s-m_j}(x_0,\xi_0) \quad (j = 1\dots\ell) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad u \in H^{s-1+\frac{1}{r}}(x_0,\xi_0)$$

Remarque 1 : Rappelons que $(\text{ad } X)Y$ désigne le commutateur $XY - YX$ des opérateurs X et Y. Un opérateur Y, de symbole $Y(x,\xi)$ dans $S^m(\Omega)$, est dit elliptique en (x_0,ξ_0), s'il existe un voisinage conique V de (x_0,ξ_0) et deux constantes $C > 0$ et $A > 0$, tels que

$$|Y(x,\xi)| \geq C|\xi|^m \qquad \forall\ (x,\xi) \in V \quad \text{si} \quad |\xi| \geq A.$$

Si les A_j sont des opérateurs pseudo-différentiels classiques, l'hypothèse du théorème 1 signifie qu'il existe un crochet de Poisson itéré de longueur r de leurs symboles principaux supposés réels qui est non nul en (x_0,ξ_0). Rappelons qu'une distribution $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est dans $H^s_{(x_0,\xi_0)}$ s'il existe un opérateur $\psi(x,D)$ d'ordre 0, elliptique en (x_0,ξ_0), tel que $\psi(x,D)u$ soit dans $H^s(R^n)$.

On déduit du théorème 1 le corollaire suivant, selon un argument tiré de H. M. Maire [9] .

Corollaire : Si les m_j sont égaux, l'opérateur $P = \sum_{j=1}^{\ell} A_j^2$ est hypoelliptique en (x_o, ξ_o), avec perte de $2(1 - \frac{1}{r})$ dérivées.

Dans le cas où les opérateurs X_j sont des champs de vecteurs réels dire que l'hypothèse du théorème 1 est vérifiée pour tout (x_o, ξ_o) dans $\Omega \times R^n \setminus \{o\}$ revient à exprimer la condition classique de Hörmander [3]. La version locale du théorème 1 et de son corollaire résulte alors des articles de L. Hörmander [3] et L. P. Rothschild, E. Stein [10]. Un résultat du même type, mais avec une estimation moins précise de la perte de dérivée, a été établi par J. J. Kohn [5], [6], pour des opérateurs pseudo-différentiels.Ce résultat a été aussi obtenu récemment par une méthode différente par C. Fefferman et D. H. Phong [11] .

On peut toujours ramener le théorème 1 au cas où $m_j = 1$ pour $j = 1, \ldots \ell$. Le théorème 1 est alors une conséquence de la proposition suivante :

Proposition 2 : Sous les hypothèses du théorème 1, il existe un voisinage compact K de x_o, un opérateur pseudo-différentiel $\psi(x,D)$, elliptique en (x_o, ξ_o), de symbole $\psi(x,\xi)$ nul si $x \notin \omega$, où ω est un voisinage de x_o relativement compact dans $\overset{\circ}{K}$, et deux constantes $C > 0$ et $\sigma \in [0, \frac{1}{r}[$, tels que l'on ait, pour tout $u \in \mathcal{C}_o^\infty(K)$,

(2) $$\|\psi(x,D_x)u\|_{1/r} \leqslant C\left(\sum_{j=1}^{\ell} \|A_j u\|_o + \|u\|_\sigma\right).$$

Comme cette inégalité est inchangée (sauf la constante C) si l'on ajoute aux A_j des opérateurs d'ordre 0, on pourra supposer que les opérateurs A_j sont formellement autoadjoints, et que leurs noyaux distributions sont à support compact dans $R^n \times R^n$.

Pour des raisons de commodité, on étudiera plutôt les opérateurs $X_j = iA_j$, qui vérifient donc $X_j^* = -X_j$. On désignera par $\mathcal{G}$ l'algèbre de Lie engendrée par $X_1, \ldots, X_\ell$. Tout $X \in \mathcal{G}$ est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 1 sur R^n, tel que $X^* = -X$, et dont le noyau distribution est à support compact dans $R^n \times R^n$.

§ 2. PROBLEMES DE CAUCHY HYPERBOLIQUES ET INTERPOLATION

On utilisera le résultat suivant (cf. J. Chazarain, A. Piriou [1]) :

Proposition 3 : Pour tout $X \in \mathfrak{g}$, il existe un groupe à un paramètre $t \to U(t)$ ($t \in \mathbb{R}$), d'opérateurs linéaires continus de $H^{-\infty}(R^n)$ dans $H^{-\infty}(R^n)$, tel que

i) Pour tout $s \in R$, pour tout $f \in H^s(R^n)$, la fonction $U(t)f$ est l'unique solution du problème de Cauchy :

$$(3)\qquad \begin{cases} U(t)f \in \bigcap_{j=0}^{\infty} \mathscr{C}^j(R, H^{s-j}(R^n)) \\ (\frac{\partial}{\partial t} - X)(U(t)f) = 0 \quad \text{dans } R \times R^n \\ U(0)f = f \quad \text{dans } R^n; \end{cases}$$

ii) Pour tous $f \in L^2(R^n)$ et $t \in R$, on a :

$$(4)\qquad \|U(t)f\|_0 = \|f\|_0 ;$$

iii) Pour tous s réel et $j \in N$, on a :

$$U \in \mathscr{C}^j(R, \mathscr{L}(H^s(R^n), H^{s-j-1}(R^n))).$$

Pour tout $X \in \mathfrak{g}$, on notera e^{tX} le groupe $U(t)$, et $\tilde{X}$ son générateur infinitésimal : d'après le théorème de Stone, $i\tilde{X}$ est une extension autoadjointe de l'opérateur iX, défini dans $\mathscr{C}_0^\infty(R^n)$.

La principale étape de la démonstration de la proposition 2 est la

Proposition 4 : Soit $Y \in \mathfrak{g}$ un commutateur itéré de longueur r des opérateurs X_j. Soit $\sigma \in [0,1]$. Alors il existe deux constantes $C > 0$ et $\varepsilon > 0$ telles que l'on ait :

$$(6)\qquad \|(e^{t^r Y} - I)^2 f\|_0 \leqslant C[\sum_{j=0}^{\ell} \|(e^{tX_j} - I)^2 f\|_0 + t^{(r+1)\sigma}\|f\|_\sigma].$$

pour tout $f \in \mathscr{C}_0^\infty(R^n)$ et pour tout $t \in [0,\varepsilon]$.

Admettons pour le moment cette proposition, et montrons qu'elle implique bien la proposition 2.

Si Y est un commutateur itéré de longueur r, elliptique en (x_o,ξ_o), il existe $\psi(x,D_x)$ comme dans l'énoncé de la proposition 2, tel que l'on ait

$$\|\psi(x,D_x)u\|_1 \leqslant C(\|Yu\|_o + \|u\|_o) \quad , \quad \forall\, u \in C_o^\infty(R^n).$$

Désignons par $D(\tilde{Y})$ le domaine de l'extension antiautoadjointe de Y définie plus haut, cet espace étant muni de la norme du graphe. On déduit de l'inégalité ci-dessus que $\psi(x,D)$ est linéaire continu de $D(\tilde{Y})$ dans $H^1(R^n)$. Puisque $\psi(x,D_x)$ est aussi un opérateur borné dans $L^2(R^n)$, on en déduit que $\psi(x,D_x)$ est linéaire continu de l'interpolé holomorphe $[L^2(R^n),\, D(\tilde{Y})]_{1/r}$ dans $H^{1/r}(R^n)$.

Pour tout $\alpha \in\,]0,2[$ et pour tout $X \in \mathfrak{g}$, on désigne par $D_\alpha(X)$ l'espace d'interpolation holomorphe $D_\alpha(X) = [L^2(R^n),\, D(\tilde{X^2})]_{\frac{\alpha}{2}}$. On sait (cf. J. L. Lions, J. Peetre [8]) que l'on a :

$$D_\alpha(X) = \{u \in L^2(R^n\ ,\ \int_o^\infty \frac{\|(e^{tX} - I)^2 u\|_o^2}{t^{2\alpha}}\ \frac{dt}{t} < \infty\} \tag{7}$$

avec équivalence des normes. On vérifie facilement que $D_1(X)$ coïncide avec le domaine $D(\tilde{X})$. D'après le théorème de réitération, si $\alpha \in\,]0,1[$, l'espace $D_\alpha(X)$ coïncide avec l'interpolé holomorphe $[L^2(R^n),\, D(\tilde{X})]_\alpha$.

D'après ce qui précède, il existe $C > 0$ tel que l'on ait :

$$\begin{aligned}\|\psi(x,D)u\|_{1/r}^2 \leqslant C\|u\|^2_{D_{\frac{1}{r}}(Y)} &\leqslant C'(\|u\|_o^2 + \int_o^\infty \frac{\|(e^{tY} - I)^2 u\|_o^2}{t^{2/r}}\ \frac{dt}{t} \\ &\leqslant C''(\|u\|_o^2 + \int_o^\infty \|(e^{t^rY} - I)^2 u\|_o^2\ \frac{dt}{t^3})\end{aligned} \tag{8}$$

pour tout $u \in \mathscr{C}_o^\infty(R^n)$.

Appliquons la proposition 4 en choisissant $\sigma \in\,]\frac{1}{r+1}\, ,\frac{1}{r}[$. On a, si ε est assez petit :

$$\begin{aligned}\|\psi(x,D)u\|_{1/k}^2 &\leqslant C(\|u\|_o^2 + \int_o^\varepsilon \|(e^{t^rY} - I)^2 u\|_o^2\ \frac{dt}{t^3}) \\ &\leqslant C(\|u\|_o^2 + \sum_{j=1}^{\ell} \int_o^\varepsilon \|(e^{tX_j} - I)^2 u\|_o^2\ \frac{dt}{t^3} + \int_o^\varepsilon t^{2(r+1)\sigma}\|u\|_\sigma^2\ \frac{dt}{t^3}\ )\end{aligned} \tag{9}$$

D'après le choix de σ , la dernière intégrale est convergente. D'après ce qui précède, chacune des intégrales dans la somme est majorée par la norme $\|u\|^2_{D_1(X_j)}$ correspondante.

L'inégalité (2) est donc démontrée. Les derniers paragraphes sont consacrés à démontrer la proposition 4.

§ 3. FORMULE DE CAMPBELL-HAUSDORFF

Soit $S(\mathfrak{g})$ l'espace des séries formelles, à une indéterminée $t \in R$, à coefficients dans $\mathfrak{g}$, de la forme

$$S \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k t^k \quad , a_k \in \mathfrak{g}. \tag{10}$$

On dira qu'une série formelle $S \in S(\mathfrak{g})$, de la forme (10), est nulle à l'ordre $m \geqslant 1$, si $a_k = 0$ pour tout $k \leqslant m-1$.

On associe à toute série formelle $S \in S(\mathfrak{g})$, une série formelle e^S à une indéterminée dont les coefficients sont des opérateurs pseudo-différentiels sur R^n. D'après la formule de Campbell-Hausdorff, pour tous S et S' dans $S(\mathfrak{g})$, il existe S'' dans $S(\mathfrak{g})$ unique, tel que $e^S e^{S'} = e^{S''}$, et l'on a

$$S'' = S + S' + \frac{1}{2}[S,S'] + \ldots \tag{11}$$

Si $Y_1 \ldots Y_p$ sont des éléments de $\mathfrak{g}$ et $\alpha_1 \ldots \alpha_p$ des entiers $\geqslant 1$, désignons par Z l'unique série formelle dans $S(\mathfrak{g})$, telle que

$$e^{t^{\alpha_1} Y_1} \ldots e^{t^{\alpha_p} Y_p} \sim e^Z \tag{12}$$

et par H_t l'opérateur unitaire dans $L^2(R^n)$ défini par :

$$H_t = e^{t^{\alpha_1} Y_1} \ldots e^{t^{\alpha_p} Y_p} . \tag{13}$$

On utilisera la proposition suivante :

<u>Proposition 5</u> : Avec les notations ci-dessus, si la série formelle Z définie en (12) est nulle à l'ordre $k \geqslant 1$, alors il existe $C > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que l'on ait

$$\|H_t f - f\|_0 \leqslant C\, t^k \|f\|_1 \tag{14}$$

pour tout $t \in [0,\varepsilon]$ et pour tout $f \in \mathcal{C}_0^{\infty}(R^n)$.

Montrons que la proposition 5 implique la proposition 4.

Si Y est un commutateur itéré de longueur r, on sait (cf. L. Hörmander [3]) qu'il existe une suite finie $j_1 \dots j_N$ d'entiers compris entre 1 et ℓ , et une suite $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_N$ de réels égaux à ± 1, tels que la série formelle $Z \in S(\mathfrak{g})$ définie par :

(15) $$e^Z \sim e^{-t\varepsilon_1 X_{j_1}} \dots e^{-t\varepsilon_N X_{j_N}} e^{t^r Y}$$

soit nulle à l'ordre r + 1. Soit H_t l'opérateur unitaire correspondant

(16) $$H_t = e^{-t\varepsilon_1 X_{j_1}} \dots e^{-t\varepsilon_N X_{j_N}} e^{t^r Y}$$

Soit $\sigma \in [0,1]$. On déduit de (14), et du caractère unitaire de H_t, par interpolation, qu'il existe $C > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que

(17) $$\| H_t f - f \|_0 \leq C t^{(r+1)\sigma} \| f \|_\sigma \quad , \quad \forall\, t \in [0,\varepsilon] \quad , \quad \forall\, f \in \mathscr{C}_0^\infty(R^n).$$

D'après (16), on a :

(18) $$\begin{aligned} \| (e^{t^r Y} - I) f \|_0 &\leq C\Big(\sum_{j=1}^{\ell} \| (e^{tX_j} - I) f \|_0 + \| H_t f - f \|_0 \Big) \\ & C\Big(\sum_{j=1}^{\ell} \| (e^{tX_j} - I) f \|_0 + t^{(r+1)\sigma} \| f \|_\sigma \Big) \end{aligned}$$

On en déduit que l'on a avec d'autres constantes :

(19) $$\| (e^{t^r Y} - I)^2 f \|_0 \leq C \sum_{j=1}^{\ell} \| (e^{tX_j} - I)(e^{t^r Y} - I) f \|_0 + C t^{(r+1)} \| f \|_\sigma$$

pour tout $f \in \mathscr{C}_0^\infty(R^n)$ et pour tout $t \in [0,\varepsilon]$. On démontre ensuite qu'il existe $C > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que l'on ait

(20) $$\| (e^{tX_j} - I)(e^{t^r Y} - I) f \|_0^2 \leq C \left[\| (e^{tX_j} - I)^2 f \|_0 \; \| (e^{t^r Y} - I)^2 f \|_0 + t^{2(r+1)\sigma} \| f \|_\sigma^2 \right]$$

pour tout $f \in \mathscr{C}_0^\infty(R^n)$ et pour tout $t \in [0,\varepsilon]$. Pour démontrer (20), on intègre par parties le membre de gauche, et l'on majore les commutateurs qui apparaissent en utilisant une nouvelle fois la proposition 5.

Des inégalités (19) et (20) on déduit immédiatement (6)

§ 4. OPERATEURS INTEGRAUX DE FOURIER

Pour démontrer la proposition 5, on remarque que, si la série formelle Z définie en (12) est nulle à l'ordre k, alors, pour tout f dans $C_o^\infty(R^n)$, la fonction $t \to H_t f$ (à valeurs dans $L^2(R^n)$) a ses dérivées à l'origine nulles jusqu'à l'ordre k-1. On a aussi :

$$(21) \qquad H_t f(x) - f(x) = O(t^k), \qquad f \in \mathscr{C}_o^\infty(R^n) \quad , \quad x \in R^n \ ;$$

mais compte tenu de (5), cette propriété ne suffit pas à impliquer l'inégalité (14).

On peut définir un homomorphisme d'algèbre de Lie, p, de $\mathfrak{g}$ dans $C^\infty(R^{2n})$ (munie du crochet de Poisson), tel que, pour tout Y dans $\mathfrak{g}$, le symbole complet de l'opérateur iY diffère de p(Y) d'un terme dans $S^o(R^n)$. Pour tout Y dans $\mathfrak{g}$, on désignera par H_Y le champ de vecteur suivant sur R^{2n}

$$H_Y = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial p(Y)}{\partial \xi j} \frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial p(Y)}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial \xi_j} \quad .$$

Pour t assez petit, on associe à l'opérateur H_t défini en (13) la transformation canonique

$$(22) \qquad \Phi_t = \exp(t^{\alpha_1} H_{Y_1}) \ldots \exp(t^{\alpha_p} H_{Y_p}) .$$

Si la série formelle Z définie en (12) est nulle à l'ordre k, on voit facilement qu'il existe C > O tel que, en posant $\Phi_t(y,\eta) = (x,\xi)$, on ait

$$(23) \qquad |x-y| \leqslant ct^k \quad , \quad |\xi - \eta| \leqslant ct^k |\eta|$$

pour tout $(y,\eta) \in R^n$ et pour tout t assez petit.

D'après L. Hörmander [4], H. Kumano-Go [7] et J. J. Duistermaat [2] , on sait qu'on peut écrire, pour t assez petit, l'opérateur H_t sous la forme suivante :

$$(24) \qquad H_t f(x) = \int e^{i\varphi(t,x,\eta)} q(t,x,\eta) \hat{f}(\eta) d\eta + R_t f(x)$$

où

1) La fonction φ est dans $S^1_{1,o}([O,\varepsilon] \times R^n ; R^n)$ réelle, égale à $x.\eta$ si t = O ou si x est en dehors d'un compact. De plus φ_t est une fonction génératrice de la transformation canonique Φ_t, c'est à dire que l'on a :

$$(25) \qquad (x, \frac{\partial\varphi}{\partial x}(t,x,\eta)) = \Phi_t(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}(t,x,\eta),\eta) \quad , \forall\ t \in [O,\varepsilon] \quad , \quad \forall\ (x,\eta) \in R^{2n} \ ;$$

2) $q(t,x,\eta) \in S^{o}_{1,o}([o,\varepsilon] \times R^n ; R^n)$

3) $R \in \mathscr{C}^{\infty}([o,\varepsilon]\, , \mathscr{L}(H^{\alpha}(R^n), H^{\beta}(R^n))$ pour tous α et β réels.

On déduit de (23) et (25) que l'on a

(26) $$\varphi(t,x,\eta) = x.\eta + t^k \psi(t,x,\eta)$$

où $\psi \in S^{1}_{1,o}$ est une fonction réelle. On peut donc écrire :

(27) $$H_t - I = t^k \int_o^1 A_{ts}\, ds + B_t$$

en posant

$$A_{t,s} f(x) = \int e^{i(x.\eta + st^k \psi(t,x,\eta))} \psi(t,x,\eta) q(t,x,\eta) \hat{f}(\eta) d\eta$$

$$B_t f(x) = \int e^{ix.\eta} [q(t,x,\eta) - 1] \hat{f}(\eta) d\eta + R_t f(x).$$

La théorie des opérateurs intégraux de Fourier montre qu'il existe $C > 0$ tel que l'on ait :

(28) $$\| A_{t,s} f \|_{L^2(R^n)} \leqslant C \| f \|_1$$

pour tous $f \in \mathscr{C}^{\infty}_{o}(R^n)$, $t \in [o,\varepsilon]$ et $s \in [o,1]$. D'autre part, on a :

(29) $$B \in \mathscr{C}^{\infty}([o,\varepsilon], \mathscr{L}(L^2(R^n))).$$

D'après (21) et (27), on voit que $B^{(j)}(o) = o$ si $j \leqslant k-1$. On a par conséquent :

(30) $$\| B(t) f \|_o \leqslant C.t^k \| f \|_o .$$

L'inégalité (14) résulte immédiatement de (27), (28) et (30). La proposition 5 est donc démontrée.

REFERENCES

[1] J. Chazarain, A. Piriou : Introduction à la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires. Gauthier-Villars.

[2] J. J. Duistermaat : Fourier integral operators. New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, 1973.

[3] L. Hörmander : Hypoelliptic second order differential equations. Acta Math. 119 (1967) 147-171.

[4] L. Hörmander : Spectral function of an elliptic operator. Acta Math. 121 (1968) 193-218.

[5] J. J. Kohn : Pseudo-differential operators and non elliptic problems. C.I.M.E. 1968.

[6] J. J. Kohn : Pseudo-differential operators and hypoellipticity. Proc. Symp. Pure Math. 23, A.M.S., 1973, p.61-69.

[7] H. Kumano-Go : A calculus of Fourier integral operators on R^n and the fundamental solution for an operator of hyperbolic type. Comm. in Partial Differential Equations 1 (1), 1-44 (1976).

[8] J. L. Lions, J. Peetre : Sur une classe d'espaces d'interpolation. Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Publications mathématiques n° 19 1964.

[9] H. M. Maire : Régularité optimale des solutions de systèmes différentiels et du laplacien associé; application au $\square_b$. A paraître.

[10] L. P. Rothschild, E. Stein : Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups. Acta Math. 137 (1976) p.247-320.

[11] C. Fefferman, D. H. Phong : The uncertainty principle and sharp Görding inequalities. CPAM, XXXIV (3) (1981).

***