

# JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

MASAKI KASHIWARA

PIERRE SCHAPIRA

## **Variété caractéristique de la restriction d'un module différentiel**

*Journées Équations aux dérivées partielles* (1981), p. 1-5

[http://www.numdam.org/item?id=JEDP\\_1981\\_\\_\\_\\_A17\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1981____A17_0)

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

VARIÉTÉ CARACTÉRISTIQUE DE LA RESTRICTION  
D'UN MODULE DIFFÉRENTIEL

par M. KASHIWARA et P. SCHAPIRA

Soit  $X$  une variété analytique complexe,  $T^*X$  son fibré cotangent,  $\pi$  la projection de  $T^*X$  sur  $X$ ,  $T_X^*$  la section nulle de  $T^*X$ ,  $\hat{T}^*X$  l'espace  $T^*X \setminus T_X^*$ .

Soit  $Y$  une sous-variété de  $X$ , et soit  $\rho$  l'application naturelle de  $T^*X \times Y$  sur  $T^*Y$  associée à l'immersion  $Y \hookrightarrow X$ . Notons  $\Lambda$  l'intersection  $T_Y^*X \cap \hat{T}^*X$ , où  $T_Y^*X$  désigne le fibré conormal à  $Y$  dans  $X$ . L'application lisse  $\Lambda \rightarrow Y$  définit l'immersion :

$$T^*Y \times_Y \Lambda \hookrightarrow T^*\Lambda$$

Soit  $H$  l'isomorphisme symplectique de  $T^*T^*X$  sur  $TT^*X$ . L'application  $H$  induit un isomorphisme de  $T^*\Lambda$  sur  $T_\Lambda T^*X$ , ce dernier espace désignant le fibré normal à  $\Lambda$  dans  $T^*X$ , et un isomorphisme de  $T^*Y \times_Y \Lambda$  sur  $T_\Lambda(T^*X \times_X Y)$ . On note  $\tilde{\rho}$  et  $\rho$  les applications naturelles de  $T^*Y \times_Y \Lambda$  et  $T_\Lambda(T^*X \times_X Y)$  sur  $T^*Y$  :

$$\begin{array}{ccc}
 & T^*Y \times_Y \Lambda & \hookrightarrow T^*\Lambda \\
 \tilde{\rho} \swarrow & \downarrow \cong & \downarrow \cong \\
 T^*Y & & T_\Lambda T^*X \\
 \rho \swarrow & \downarrow \cong & \downarrow \cong \\
 & T_\Lambda(T^*X \times_X Y) & \hookrightarrow T_\Lambda T^*X
 \end{array}$$

Si l'on choisit un système de coordonnées  $(y, t)$  sur  $X$ ,  $(y, t; \eta, \tau)$  sur  $T^*X$ ,  $Y$  étant défini par  $\{t = 0\}$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
 \Lambda &= \{(y; \tau)\} \\
 T^*\Lambda &= \{(y, \tau; \langle \tilde{\eta}, dy \rangle - \langle \tilde{t}, d\tau \rangle)\} \\
 T_\Lambda T^*X &= \{(y, \tau; \langle \tilde{\eta}, \frac{\partial}{\partial \eta} \rangle + \langle \tilde{t}, \frac{\partial}{\partial t} \rangle)\} \\
 T^*Y \times_Y \Lambda &= \{(y, \tau; \tilde{\eta}, \tilde{t}; \tilde{t} = 0)\} \\
 \tilde{\rho}(y, \tau; \tilde{\eta}, 0) &= (y, \tilde{\eta})
 \end{aligned}$$

Soit  $S$  une partie de  $T^*X$ . Le cône  $C(S, \Lambda)$  de  $TT^*X$  est défini dans une carte locale par :

$$\theta \in C_x(S, \Lambda) \subset T_x T^*X \iff \text{il existe une suite } (x_p, x'_p, c_p) \text{ dans } S \times \Lambda \times \mathbb{C} \text{ avec}$$

$$x_p \rightarrow x, \quad x'_p \rightarrow x, \quad c_p(x_p - x'_p) \rightarrow \theta.$$

On note  $C_\Lambda(S)$  l'image de  $C(S, \Lambda)$  dans le fibré normal  $T_\Lambda T^*X$  et on dit que  $C_\Lambda(S)$  est le cône normal à  $S$  le long de  $\Lambda$ .

Notons  $\dot{T}_\Lambda T^*X$  le fibré  $T_\Lambda T^*X$  privé de sa section nulle  $\Lambda$ . L'application

$$\left( \dot{T}^*X \times Y \setminus \Lambda \right) \cup \left( \dot{T}_\Lambda(T^*X \times Y) \right) \rightarrow \dot{T}^*Y$$

définit en passant aux fibrés projectifs une application :

$$\left( P^*X \times Y \setminus \Lambda \right) \cup \left( P_\Lambda(P^*X \times Y) \right) \rightarrow P^*Y$$

en notant encore  $\tilde{\Lambda}$  le fibré  $P^*X$ , et cette dernière application est holomorphe et propre quand on munit le premier espace de sa structure d'éclatée de  $\Lambda$  dans  $P^*X \times Y$ . La première partie du lemme ci-dessous en résulte.

**Lemme 1** : Soit  $S$  un ensemble analytique fermé conique de  $T^*X$ . Alors

$$\rho^{\#}_{\text{def}}(S) = \rho(S \cap T^*X \times Y \setminus \Lambda) \cup \check{\rho}(C_\Lambda(S) \cap T_\Lambda(T^*X \times Y))$$

est un ensemble analytique fermé conique de  $T^*Y$ . De plus dans les coordonnées  $(y, t; \eta, \tau)$  définies plus haut on a :

$$(y, \eta) \in \rho^{\#}(S) \iff \text{il existe une suite } (y_p, t_p; \eta_p, \tau_p) \text{ dans } S \text{ avec}$$

$$(y_p, \eta_p) \rightarrow (y, \eta), \quad t_p \rightarrow 0, \quad |t_p| \quad |\tau_p| \rightarrow 0.$$

Soit  $\mathcal{E}_X$  le faisceau sur  $T^*X$  des opérateurs microdifférentiels holomorphes d'ordre fini (cf. [8]),  $\mathcal{E}_X(k)$  le sous-faisceau des opérateurs d'ordre  $\leq k$ . Soit  $\mathcal{N}$  un  $\mathcal{E}_X$ -module cohérent sur un ouvert de  $T^*X$ . On note  $SS(\mathcal{N})$  le support de  $\mathcal{N}$  et on dit que  $SS(\mathcal{N})$  est la variété caractéristique de  $\mathcal{N}$ . Si  $\Lambda$  est une variété lagrangienne de  $T^*X$ , le cône  $C_\Lambda(SS(\mathcal{N}))$  est noté  $C_\Lambda(\mathcal{N})$  et s'appelle la variété microcaractéristique de  $\mathcal{N}$  le long de  $\Lambda$  [5].

Cet ensemble n'est pas assez précis pour le calcul que nous avons en vue et nous introduisons suivant [7] la variété 1-microcaractéristique de  $\mathcal{N}$  le long de  $\Lambda$  (cf. [6] pour une autre construction).

Soit  $\mathcal{J}_\Lambda = \{P \in \mathcal{E}_X(1); \sigma_1(P) | \Lambda = 0\}$ ,  $\sigma_1(P)$  désignant le symbole d'ordre 1 de l'opérateur P d'ordre  $\leq 1$ . On identifie l'anneau

$$\alpha = \bigoplus_{m \geq 0} (\mathcal{J}_\Lambda^m / \mathcal{E}_X(-1) \mathcal{J}_\Lambda^{m+1} + \mathcal{J}_\Lambda^{m-1})$$

à une sous-algèbre de  $\tau_* \sigma_{T_\Lambda T^*X}$   $\tau$  désignant la projection de  $T_\Lambda T^*X$  sur  $\Lambda$ . Si  $\mathcal{N}_0$  est un sous- $\mathcal{E}_X(0)$ -module de  $\mathcal{N}$  de type fini qui engendre  $\mathcal{N}$ , on définit  $C_\Lambda^1(\mathcal{N})$  la variété 1-microcaractéristique de  $\mathcal{N}$  le long de  $\Lambda$  comme étant le support dans  $T_\Lambda T^*X$  du faisceau :

$$\sigma_{T_\Lambda T^*X} \otimes_{\tau^{-1} \alpha}^{-1} \tau^{-1} \left( \bigoplus_{m \geq 0} \mathcal{J}_\Lambda^m \mathcal{N}_0 / \mathcal{J}_\Lambda^{m+1} \mathcal{E}_X(-1) \mathcal{N}_0 + \mathcal{J}_\Lambda^{m-1} \mathcal{N}_0 \right)$$

C'est un ensemble analytique fermé de  $T_\Lambda T^*X$ , ne dépendant que de  $\mathcal{N}$ , cône pour les deux actions de  $\mathbb{C}^x$  sur  $T_\Lambda T^*X$ , et cet ensemble contient  $C_\Lambda(\mathcal{M})$  (cf.[7]).

Si  $\mathcal{M}$  est un  $\mathcal{D}_X$ -module cohérent on l'identifiera au  $\mathcal{E}_X$ -module

$$\mathcal{N} = \mathcal{E}_X \otimes_{\pi^{-1} \mathcal{D}_X}^{-1} \mathcal{M} \text{ sur } T^*X.$$

Soit  $\mathcal{M}$  un  $\mathcal{D}_X$ -module cohérent à gauche. Le  $\mathcal{O}_Y$ -module

$$\mathcal{M}_Y \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{O}_Y \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M} \text{ est naturellement muni d'une structure de } \mathcal{D}_Y\text{-module à gauche.}$$

Si Y est non caractéristique pour  $\mathcal{M}$ , i.e. si la projection  $\rho$  est propre (donc finie) sur  $T^*X \times Y \cap SS(\mathcal{M})$ , il est bien connu ([2],[8]) que  $\mathcal{M}_Y$  est cohérent et que

$$SS(\mathcal{M}_Y) \subset \rho(T^*X \times Y \cap SS(\mathcal{M}))$$

(en fait on a même égalité).

Dans le cas général  $\mathcal{M}_Y$  est réunion (localement) d'une suite croissante de  $\mathcal{D}_Y$ -modules cohérents  $\mathcal{L}_k$ , et l'on posera :

$$SS(\mathcal{M}_Y) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_k SS(\mathcal{L}_k).$$

**Théorème 2** : Soit comme précédemment Y une sous-variété de X,  $\Lambda = T^*X \cap \dot{T}^*X$ ,

$\mathcal{M}$  un  $\mathcal{D}_X$ -module cohérent. Alors  $SS(\mathcal{M}_Y)$  est contenu dans :

$$\rho(SS(\mathcal{M}) \cap (T^*X \times Y \setminus \Lambda)) \cup \check{\rho}(C_\Lambda^1(\mathcal{M}) \cap T_\Lambda(T^*X \times Y))$$

et ce dernier ensemble est analytique fermé conique dans  $T^*Y$ .

Ce théorème est particulièrement utile quand  $C_{\Lambda}^1(\mathcal{M}) = C_{\Lambda}(\mathcal{M})$  d'après le lemme 1.

Corollaire 3 : Supposons que  $C_{\Lambda}^1(\mathcal{M}) = C_{\Lambda}(\mathcal{M})$ . Alors dans les coordonnées  $(y, t; \eta, \tau)$  on a

$$SS(\mathcal{M}_Y) \subset \{(y, \eta) \in T^*Y ; \exists \text{ une suite } (y_p, t_p; \eta_p, \tau_p) \text{ de } SS(\mathcal{M}) \text{ avec} \\ (y_p, \eta_p) \rightarrow (y, \eta), t_p \rightarrow 0, |t_p| |\tau_p| \rightarrow 0\}.$$

Soit  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  deux  $\mathcal{D}_X$ -modules à gauche. On définit le  $\mathcal{D}_X$ -module  $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{N}$  produit de  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{N}$  par restriction à la diagonale  $\Delta$  de  $X \times X$  du  $\mathcal{D}_{X \times X}$ -module  $\mathcal{M} \hat{\otimes} \mathcal{N}$ . On obtient

Corollaire 4 : Supposons que  $C_{\Lambda}^1(\mathcal{M} \hat{\otimes} \mathcal{N}) = C_{\Lambda}(\mathcal{M} \hat{\otimes} \mathcal{N})$ , avec  $\Lambda = \hat{T}_{\Delta}^*(X \times X)$ . Alors  $SS(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{N})$  est contenu dans  $\{(x, \xi) \in T^*X ; \exists \text{ une suite } (x_p, \xi_p) \text{ dans } SS(\mathcal{M}), \text{ une} \\ \text{suite } (x'_p, \xi'_p) \text{ dans } SS(\mathcal{N}) \text{ avec } x_p \rightarrow x, x'_p \rightarrow x, \xi_p + \xi'_p \rightarrow \xi, |x_p - x'_p| |\xi_p| \rightarrow 0\}$ .

Ce résultat est à comparer à celui obtenu par D. Iagolnitzer qui étudiait le support singulier du produit de deux distributions [1].

Remarque et exemple : M. Kashiwara a démontré (non publié) que si  $\mathcal{M}$  est un système holonome S.R. [4],  $C_{\Lambda}^1(\mathcal{M}) = C_{\Lambda}(\mathcal{M})$  pour toute variété lagrangienne  $\Lambda$ .

Soit alors  $f_1, \dots, f_{\ell}$  des fonctions holomorphes sur  $X$ ,  $\lambda_j \in \mathbb{C}$ , et

$$\mathcal{M} = \mathcal{D}_X \left( \prod_j f_j^{\lambda_j} \right)$$

sur  $X \times \mathbb{C}^{\ell}$  on considère le module

$$\mathcal{N} = \mathcal{D}_{X \times \mathbb{C}^{\ell}} \left( \prod_j (t_j + f_j)^{\lambda_j} \right)$$

dont la restriction à  $X \times \{0\}$  vaut  $\mathcal{M}$ .

On obtient ainsi en appliquant le corollaire 3 que  $SS(\mathcal{N})$  est contenu dans la réunion pour  $I$  partie de  $\{1, \dots, \ell\}$  des fermés  $S_I$  :

$$(x, \xi) \in S_I \iff \text{il existe une suite } (x_p, a_{j,p})_{j \in I} \text{ dans } X \times \mathbb{C}^I \\ \text{telle que } x_p \rightarrow x, \sum_{j \in I} a_{j,p} \frac{df_j(x_p)}{dx_p} \rightarrow \xi, a_{j,p} f_k(x_p) \rightarrow 0 \\ \forall j \in I, \forall k \in I.$$

Ce dernier résultat est à comparer à celui de [3].

REFERENCES

- [1] IAGOLNITZER, D. : Essential support of the product of two distributions at "u = 0 points". Sem. Goulaouic-Schwartz 1978-79.
- [2] KASHIWARA, M. : Algebraic study of partial differential equations. Thesis, Univ. of Tokyo 1971.
- [3] KASHIWARA, M., KAWAI, T. : On holonomic systems for  $\prod_{\ell=1}^N (f_{\ell} + \sqrt{-1} 0)^{\lambda_{\ell}}$   
Publ. RIMS Kyoto Univ. 15 (1979) 551-575.
- [4] KASHIWARA, M., KAWAI, T. : On holonomic systems of micro-differential equations III, Systems with regular singularities. Publ. RIMS, 1979, preprint.
- [5] KASHIWARA, M., SCHAPIRA, P. : Problème de Cauchy pour les systèmes micro-différentiels dans le domaine complexe. Inventiones Math. 46, 1978, pp.17-38.
- [6] LAURENT, Y. : Double microlocalisation et problème de Cauchy dans le domaine complexe, in Proc. Les Houches Colloquium, Lecture Notes in Physics 126, 1980, Springer.
- [7] MONTEIRO-FERNANDES, T. : Variété 1-microcaractéristique pour les  $\mathcal{E}_X^{\lambda}$ -modules cohérents, C. R. Acad. Sc. Paris, t.290, 1980, pp. 787-790.
- [8] SATO, M., KASHIWARA, M., KAWAI, T. : Microfunctions and pseudo differential equations, Lecture Notes in Math. 287, 1973, pp. 265-529.

\*  
\* \*  
\*