JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

CHARLES GOULAOUIC
NORIO SHIMAKURA

Régularité höldérienne de certains problèmes aux limites elliptiques dégénérés

Journées Équations aux dérivées partielles (1981), p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1981____A14_0>

Conférence n° 14

REGULARITE HÖLDERIENNE DE CERTAINS PROBLEMES AUX LIMITES ELLIPTIQUES DEGENERES

par C. GOULAOUIC et N. SHIMAKURA

Soient Ω un ouvert borné assez régulier dans $\mathbb{R}^n$ et φ une fonction positive dans Ω assez régulière et équivalente à la distance au bord.

Nous étudions l'action dans les espaces de Hölder d'une classe d'opérateurs elliptiques du second ordre dans Ω dont la partie principale s'annule comme φ sur $\partial\Omega$, l'exemple le plus simple étant $-\operatorname{div} \varphi \operatorname{grad} + 1$; nous obtenons en particulier des théorèmes d'isomorphisme ne faisant pas intervenir de conditions aux limites.

La méthode utilise l'écriture explicite des noyaux de Green d'opérateurs elliptiques dégénérés particuliers et une technique de perturbation pour obtenir des estimations a priori, puis un principe du maximum "avec poids" pour obtenir des résultats d'unicité et enfin un argument de continuité pour déduire l'existence dans un cas général à partir d'un cas particulier.

1. HYPOTHESES ET INEGALITES A PRIORI

Pour $\mu \in]0,1[$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, nous notons

$$C^{\mu}(\bar{\Omega}) = \{u \in C(\bar{\Omega}) ; \|u\|_{\mu} = \sup_{\Omega} |u| + \sup_{\Omega\times\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\mu}} < \infty\}$$

Nous écrivons aussi $\|u\|_{\mu} = \|u\|_{\infty} + [u]_{\mu}$ où $\|u\|_{\infty} = \sup_{\Omega} |u|$. Plus généralement, pour $k \in \mathbb{N}$ et $\mu \in]0,1[$, nous notons encore :

$$C^{k+\mu}(\bar{\Omega}) = \{u \in C(\bar{\Omega}) ; D^{\alpha}u \in C^{\mu}(\bar{\Omega}) \text{ pour } |\alpha| \leqslant k \}$$

muni de la norme naturelle.
Ces espaces $C^{k+\mu}(\bar{\Omega})$ sont des espaces de Banach.

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et φ une fonction positive sur Ω équivalente à la distance au bord, c'est-à-dire :

$$(1) \qquad \begin{cases} \Omega = \{x \in \mathbb{R}^n ; \ \varphi(x) > 0\} \\ \partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n ; \ \varphi(x) = 0\} \\ \text{et } d\varphi \neq 0 \text{ sur } \partial\Omega \ . \end{cases}$$

Nous supposons $\bar{\Omega}$ et φ de classe C^{∞} ; en fait, pour les problèmes de régularité C^{μ} considérés ci-dessous, il suffit de supposer $\bar{\Omega}$ de classe $C^{2+\mu}$ et φ de classe $C^{1+\mu}$, mais un changement de variables conservant la régularité des coefficients des opérateurs différentiels considérés permet tout de suite de supposer plus de régularité sur $\bar{\Omega}$ et φ sans restreindre la généralité. Nous notons encore

$$C_{\varphi}^{2+\mu}(\bar{\Omega}) = \{u \in C^{1+\mu}(\bar{\Omega}) ; \quad \varphi u \in C^{2+\mu}(\bar{\Omega})\}$$

muni de la norme naturelle notée $\| \quad \|_{2+\mu,\varphi}$.

Nous considérons une classe d'opérateurs différentiels sur Ω de la forme (avec $D_j = \dfrac{\partial}{\partial x_j}$)

$$\mathcal{A} = -\varphi \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} D_j D_k + \sum_{j=1}^{n} a_j D_j + a_o , \tag{2}$$

où les coefficients a_{jk}, a_j, a_o sont dans $C^{\mu}(\bar{\Omega})$; nous supposons de plus :

(3) Les coefficients a_{jk} sont réels et $a_{jk} = a_{kj}$.

(4) Il existe $C > 0$ tel que l'on ait, pour tout $x \in \bar{\Omega}$ et $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x)\xi_j\xi_k \geqslant C\,|\xi|^2 .$$

L'étude des problèmes aux limites pour de tels opérateurs $\mathcal{A}$ fait intervenir la fonction Z de $\partial\Omega$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$Z = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j D_j \varphi}{\displaystyle\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} D_j\varphi D_k\varphi} \quad \text{sur } \partial\Omega \quad ; \tag{5}$$

Nous supposons aussi

$$a_j = Z \sum_{k=1}^{n} a_{jk} D_k\varphi \quad \text{sur } \partial\Omega \qquad \text{pour } j = 1,\dots,n. \tag{6}$$

Il est facile de vérifier que Z est un invariant et que les conditions (2) (3) (4) (6) ci-dessus sont aussi invariantes par changement de variables et de fonction φ. Un exemple typique d'opérateurs $\mathcal{A}$ est $-\varphi\Delta + X$ où X est un opérateur du premier ordre qui, sur $\partial\Omega$, est de la forme $Z \operatorname{grad}\varphi . \operatorname{grad} + a_o$;

en particulier, pour $Z = -1$, nous retrouvons les opérateurs $-\mathrm{div}\,\varphi\,\mathrm{grad} + a_o$ qui furent étudiés dans [2].

La théorie hilbertienne de tels opérateurs $\mathcal{A}$ (cf.[6] [5] [3]) a montré que, selon les valeurs de Z, les réalisations de $\mathcal{A}$ font ou ne font pas intervenir de conditions aux limites sur $\partial\Omega$. Nous nous intéressons ici surtout aux cas où les problèmes sont bien posés dans les espaces C^{μ} sans conditions aux limites, ce qui s'avère correspondre à $\mathrm{Re}\, Z < 0$; ici, pour plus de clarté, nous supposerons Z réel et la condition $Z < 0$ peut encore s'écrire :

$$(7) \qquad \sum_{j=1}^{n} a_j D_j \varphi < 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega .$$

Nous pouvons maintenant énoncer le premier résultat, à savoir une estimation a priori analogue à celle de Schauder pour des opérateurs uniformément elliptiques.

<u>Théorème 1</u> : Soit un opérateur $\mathcal{A}$ vérifiant les hypothèses (2) (3) (4) (6) (7). Il existe $C > 0$ telle que l'on ait pour tout $u \in C^{2+\mu}_{\varphi}(\bar{\Omega})$

$$(8) \qquad \|u\|_{2+\mu,\varphi} \leqslant C(\|\mathcal{A}u\|_{\mu} + \|u\|_{\mu}) .$$

De plus la constante C dans (8) ne dépend que de la norme $C^{\mu}(\bar{\Omega})$ des coefficients de $\mathcal{A}$ et de la constante d'ellipticité dans (4), Ω et φ étant fixés ; elle peut être choisie indépendante de Z pourvu que Z prenne ses valeurs dans un compact de $]-\infty, 0[$.

Pour obtenir une telle estimation, nous nous ramenons par localisation, difféomorphisme et perturbation au cas d'un opérateur modèle sur $\mathbb{R}^n_+ = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n \,;\, x_n > 0\}$ de la forme

$$\mathcal{L} = -x_n \Delta + Z D_n .$$

Nous suivons une méthode analogue à celle de [1] mais sans noyau de Poisson et le noyau de Green a une singularité très différente au bord, ce qui complique considérablement les estimations.

Pour x,y distincts dans $\mathbb{R}^n_+$, nous notons

$$E(x,y) = \gamma y_n^{-Z-1} \int_0^1 \{|x-y|^2\theta + |x-\check{y}|^2(1-\theta)\}^{\frac{Z+2-n}{2}} \{\theta(1-\theta)\}^{\frac{-Z-2}{2}} \, d\theta$$

avec $\check{y} = (y_1, \dots, y_{n-1}, -y_n)$ et

$$\gamma = \gamma(Z) = 2^{-Z-2}\ \pi^{-\frac{n}{2}}\ \Gamma\left(\frac{n-2-Z}{2}\right)\ \frac{1}{\Gamma\left(\frac{-Z}{2}\right)} \quad ,$$

et $E(x,y)$ est une solution élémentaire de $\mathcal{L}$; plus précisément :

<u>Lemme 1</u> : i) Pour $x \in \mathbb{R}^n_+$, $E(x,.)$ est localement intégrable sur $\mathbb{R}^n_+$.

ii) Pour f continue et à support compact dans $\overline{\mathbb{R}^n_+}$ et $x \in \mathbb{R}^n_+$, Ef définie par

$$Ef(x) = \int_{\mathbb{R}^n_+} E(x,y) f(y) dy$$

est une solution de l'équation $\mathcal{L}u = f$ dans $\mathbb{R}^n_+$.

iii) Pour u de classe C^2 et à support compact dans $\overline{\mathbb{R}^n_+}$, $E\mathcal{L}u = u$ dans $\mathbb{R}^n_+$.

En particulier pour $Z = -1$ et $n = 3$, nous avons

$$E(x,y) = \frac{1}{2\pi\,|x-y|\,|x-\check{y}|} \quad .$$

Nous renvoyons à [4] pour la démonstration de ce résultat qui, dans le cas général, découle de la connaissance de la solution élémentaire de l'équation d'évolution associée (cf. [7]); dans le cas $Z = -1$, nous pouvons nous ramener à un opérateur elliptique par un changement de variables augmentant la dimension.

Nous renvoyons aussi à [4] pour la démonstration très technique du résultat suivant :

<u>Lemme 2</u> : Notons K l'un quelconque des opérateurs intégraux associés aux noyaux $D_{x_j} E$ ou $D_{x_j} D_{x_k} x_n E$ pour $1 \leqslant j,k \leqslant n$. Pour Z restant dans un compact de $]-\infty,0[$, il existe C tel que l'on ait pour tout $R > 0$ et tout $f \in C^\mu(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ nulle pour $|x| \geqslant R$,

$$[Kf]_\mu \leqslant C \|f\|_\mu \qquad \text{et}$$

$$\|Kf\|_\infty \leqslant C(\|f\|_\infty + R^\mu [f]_\mu) .$$

Le lecteur peut aisément voir comment ces lemmes permettent d'obtenir les inégalités a priori du théorème 1.

De même les inégalités a priori dans L^p pour $1 < p < \infty$ résultent du fait que les opérateurs K sont continus de $L^p(\mathbb{R}^n_+)$ dans lui-même pour

$$\text{Max}\,(1,-1/z) < p < \infty .$$

2. UNICITE ET EXISTENCE DE SOLUTIONS

Nous avons d'abord une inégalité analogue à celle du principe du maximum, à savoir :

Théorème 2 : Soit un opérateur $\mathcal{A}$ vérifiant les hypothèses (2) (3) (4) (6) à coefficients réels avec de plus $a_o > 0$ et $Z \leqslant -1$. Il existe alors C et $k > 0$ tels que, pour tout u réelle dans $C^2(\Omega) \cap C^o(\bar{\Omega})$ vérifiant $\mathcal{A}u = f \in C^o(\bar{\Omega})$, on ait :

$$\sup_{\bar{\Omega}} \left|\frac{u(x)}{C - \text{Log}\varphi(x)}\right| \leqslant k \sup_{\bar{\Omega}}\left|\frac{f(x)}{C - \text{Log}\varphi(x)}\right| .$$

La démonstration est très proche de celle du cas elliptique, après avoir effectué le changement de fonction $u = (C - \text{Log}\varphi)\,v$.

Ce théorème implique évidemment l'unicité de la solution u dans $C^{2+\mu}_{\varphi}(\bar{\Omega})$ de $\mathcal{A}u = f \in C^{\mu}(\bar{\Omega})$; en fait cette unicité peut aussi se montrer directement en utilisant le principe du maximum à l'intérieur et l'étude du comportement au bord sous des hypothèses plus faibles, à savoir :

Proposition 1 : Soit un opérateur $\mathcal{A}$ vérifiant les hypothèses (2) (3) (4) (7) à coefficients réels avec $a_o > 0$.

Alors $\mathcal{A}u = 0$ n'a dans $C^{2+\mu}_{\varphi}(\bar{\Omega})$ que la solution nulle.

Nous déduisons alors du théorème 1 et de la proposition 1 le résultat :

Théorème 3 : Soit un opérateur $\mathcal{A}$ vérifiant les hypothèses (2) (3) (4) (6) (7) à coefficients réels avec de plus $a_o > 0$.

Alors $\mathcal{A}$ est un isomorphisme de $C^{2+\mu}_{\varphi}(\bar{\Omega})$ sur $C^{\mu}(\bar{\Omega})$.

Nous montrons d'abord que l'opérateur $\mathcal{A}_o = -\text{div}\,\varphi\,\text{grad} + 1$ est un isomorphisme de $C^{2+\mu}_{\varphi}(\bar{\Omega})$ sur $C^{\mu}(\bar{\Omega})$ en utilisant la théorie hilbertienne et l'approximation par des situations très régulières. La fin de la démonstration utilise alors une méthode classique de continuité appliquée aux opérateurs $\mathcal{A}_t = t\mathcal{A} + (1 - t)\mathcal{A}_o$ pour $t \in [0,1]$.

3. REMARQUES

1) Par application des résultats ci-dessus et du théorème de Leray-Schauder ou de la méthode de continuité, nous obtenons des résultats d'existence pour des classes d'équations elliptiques dégénérées non linéaires; ainsi, par exemple, pour $f \in C^{\mu}(\bar{\Omega})$, il existe une unique fonction $u \in C_{\varphi}^{2+\mu}(\bar{\Omega})$ telle que

$$-\operatorname{div} \varphi \operatorname{grad} u + u^3 = f .$$

2) Un opérateur tel que $-\operatorname{div} \varphi \operatorname{grad}$ a le même spectre dans $C_{\varphi}^{2+\mu}$ que dans le cadre hilbertien; en particulier si $f \in C^{\mu}(\bar{\Omega})$ et vérifie $\int_{\Omega} f(x)dx = 0$, il existe une fonction $u \in C_{\varphi}^{2+\mu}(\bar{\Omega})$, définie à une constante près, solution de $-\operatorname{div} \varphi \operatorname{grad} u = f$; en notant $w = -\varphi \operatorname{grad} u$, nous obtenons une solution w dans $(C^{1+\mu}(\bar{\Omega}))^n$ de $\operatorname{div} w = f$ avec $w|_{\partial\Omega} = 0$.

3) La régularité d'ordre supérieur dans les problèmes considérés ici s'obtient aisément par récurrence en gagnant d'abord sur les dérivées tangentielles au bord puis sur les dérivées normales par utilisation de l'équation et des inégalités de Hardy; ainsi, dans le théorème 3, si on remplace μ par $k + \mu$ (avec $k \in \mathbb{N}$) dans les hypothèses, il en va de même pour les conclusions.

REFERENCES

[1] Agmon, S. , Douglis, A., Nirenberg, L. - Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions C. P. A. M. 12 (1959) 623-727.

[2] Baouendi, M. S., Goulaouic, C. - Régularité et théorie spectrale pour une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés. Arch. Rat. Mech. Anal. 34-5 (1969) 361-379.

[3] Bolley, P., Camus, J. - Sur une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés à plusieurs variables. Bull. Soc. Mat. de France 34 (1973) 55-140.

[4] Goulaouic, C., Shimakura, N. - Théorie höldérienne pour des opérateurs elliptiques dégénérés (à paraître).

[5] Kohn, J. J., Nirenberg, L. - Degenerate elliptic parabolic equations of second order. C. P. A. M. 20 (1967) 797-872.

[6] Oleinik, O. A. - A problem of Fichera. Dokl. Akad. Nauk. S.S.S.R. 157, 1297-1300 (1964).

*
* *