

ABDEREMANE MOHAMED

## Étude spectrale d'opérateurs hypoelliptiques à caractéristiques multiples

*Journées Équations aux dérivées partielles* (1981), p. 1-7

<[http://www.numdam.org/item?id=JEDP\\_1981\\_\\_\\_\\_A12\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1981____A12_0)>

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

ETUDE SPECTRALE D'OPERATEURS  
HYPCELLIPTIQUES A CARACTERISTIQUES MULTIPLES

par

A. MOHAMED

1. Introduction

Soit  $\Omega$  une variété  $C^\infty$  compacte sans bord de dimension  $n$ , munie d'une densité  $dx \in C^\infty$  positive. On se donne sur  $\Omega$  un o.p.d. classique d'ordre  $m$   $P(x,D)$ . On désigne par  $p_m(x,\xi)$  son symbole principal. Dans un système de coordonnées symplectiques  $(x,\xi)$  sur  $T^*\Omega \setminus 0$ ,  $P(x,D)$  a un symbole  $p(x,\xi)$  qui admet un développement asymptotique en parties homogènes :

$$p(x,\xi) \sim \sum_{j=0}^{\infty} p_{m-j}(x,\xi)$$

où  $p_{m-j}(x,\xi)$  est homogène de degré  $m-j$  en  $\xi$ .

On fait les hypothèses suivantes :

- (H<sub>1</sub>)  $\left\{ \begin{array}{l} P(x,D) \text{ est formellement auto-adjoint au sens suivant :} \\ \int_{\Omega} P(x,D)u \cdot \bar{v} \, dx = \int_{\Omega} u \cdot \overline{P(x,D)v} \, dx ; \forall u,v \in C^\infty(\Omega) \end{array} \right.$
- (H<sub>2</sub>)  $\left\{ \begin{array}{l} p_m(x,\xi) \geq 0 ; \forall (x,\xi) \in T^*\Omega \setminus 0 \text{ et} \\ \Sigma = \{(x,\xi) \in T^*\Omega \setminus 0 ; p_m(x,\xi) = 0\} \\ \text{est une sous-variété } C^\infty, \text{ conique, fermée de } T^*\Omega \setminus 0 \text{ de codimension } 2d \\ \text{(ici } d \text{ désigne soit un entier soit un demi entier } > 0) \end{array} \right.$
- (H<sub>3</sub>)  $\left\{ \begin{array}{l} p_m(x,\xi) \text{ s'annule exactement à l'ordre } 2k \text{ sur } \Sigma, \text{ où } k \text{ est un entier} \\ \text{vérifiant } 0 < k < m; \text{ de plus, on suppose que les } p_{m-j}(x,\xi) \text{ s'annulent} \\ \text{à l'ordre } [2k - 2j]_+ \text{ sur } \Sigma. \end{array} \right.$

Pour tout  $\rho \in \Sigma$  on associe à  $P(x,D)$  l'opérateur différentiel à coefficients polynomiaux sur  $\mathbb{R}^n$ ,

$$\sigma_\rho(P)(y,D_y) = \sum_{|\alpha+\beta|+2j=2k} \frac{1}{\alpha!\beta!} \left[ \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^\beta p_{m-j}(\rho) \right] y^\alpha D_y^\beta$$

- (H<sub>4</sub>)  $\left\{ \begin{array}{l} \text{On suppose que pour tout } \rho \in \Sigma, \sigma_\rho(P)(y,D_y) \text{ réalise un isomorphisme} \\ \text{sur } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n). \end{array} \right.$

Sous les hypothèses  $H_1, H_2, H_3$  et  $H_4$ , il résulte de [3] que  $P(x,D)$  est hypoelliptique dans  $\Omega$  avec perte de dérivées. De plus,  $P(x,D)$  admet une paramétrix dans la classe de L. Boutet de Monvel [2]  $OPS^{-m, -2k}(\Omega, \Sigma)$ .

Comme  $m-k > 0$ , l'opérateur non borné sur  $L^2(\Omega)$   $P$ , de domaine :

$$D(P) = \{u \in L^2(\Omega); Pu = p(x,D)u \in L^2(\Omega)\}$$

est autoadjoint à résolvante compacte.  $P$  admet un spectre discret réduit au spectre ponctuel. Si  $\{\lambda_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  désigne la suite des valeurs propres de  $P$  rangée dans l'ordre croissant, chacune d'elle étant répétée autant de fois que sa multiplicité, on pose, pour tout  $\lambda > 0$  :

$$N_+(\lambda) = \sum_{0 < \lambda_j < \lambda} 1, \quad N_-(\lambda) = \sum_{-\lambda < \lambda_j < 0} 1 \quad \text{et}$$

$$N(\lambda) = N_+(\lambda) + N_-(\lambda).$$

## 2. Énoncé des résultats

Théorème 1 : Sous les hypothèses  $H_1, H_2, H_3$  et  $H_4$  et si  $\Sigma$  est symplectique, on a le comportement asymptotique suivant :

i) si  $m\bar{d} - kn > 0$

$$N_+(\lambda) \sim \lambda^{\frac{n}{m}} a_1 \quad ; \quad \lambda \rightarrow +\infty$$

$$N_-(\lambda) = o(\lambda^{\frac{n}{m}}) \quad ; \quad \lambda \rightarrow +\infty$$

ii) si  $m\bar{d} - kn = 0$

$$N_+(\lambda) \sim \lambda^{\frac{n}{m}} \text{Log} \lambda^{\frac{n}{m}} a_2 \quad ; \quad \lambda \rightarrow +\infty$$

$$N_-(\lambda) = o(\lambda^{\frac{n}{m}} \text{Log} \lambda) \quad ; \quad \lambda \rightarrow +\infty$$

iii) si  $m\bar{d} - kn < 0$

$$N_+(\lambda) \sim \lambda^{\frac{n-d}{m-k}} a_3^+ \quad ; \quad \lambda \rightarrow +\infty$$

$$N_-(\lambda) \sim \lambda^{\frac{n-d}{m-k}} a_3^- \quad ; \quad \lambda \rightarrow +\infty$$

où

$$a_1 = (2\pi)^{-n} \int_{p_m(x, \xi) < 1} dx d\xi$$

$$a_2 = (2\pi)^{-n} \frac{d}{n} \int_{v(p_m)(\rho) > 1} d\rho$$

avec 
$$v(p_m)(\rho) = \int_{\text{Hess } p_m(\rho)(x) < 1} dx$$

$$a_3^+ = (2\pi)^{-n+d} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\mu_j(\rho) < 1} d\rho$$

$$a_3^- = (2\pi)^{-n+d} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\mu_{-j}(\rho) > -1} d\rho$$

et  $\{\mu_j(\rho) \mid j \in \mathbb{Z} \setminus 0\}$  est la suite des valeurs propres de l'opérateur différentiel sur  $\mathbb{R}^d$  globalement elliptique, obtenu par réduction de  $\sigma_\rho(P)(y, D_y)$  (cf. [4]).

( $dx d\xi$ ,  $d\rho$  et  $dx$  désignent les mesures canoniquement associées aux structures symplectiques respectivement sur  $T^*\Omega$ ,  $\Sigma$  et  $(T_\rho^*\Sigma)^+$  l'orthogonal de  $T_\rho^*\Sigma$  pour la 2-forme symplectique :  $\sum_j d\xi_j \wedge dx_j$ ).

**Proposition** : Sous les hypothèses  $H_1$ ,  $H_2$  et  $H_3$ , on a les équivalences suivantes :

$$A) \begin{cases} \forall \rho \in \Sigma, \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \\ \int_{\mathbb{R}^n} \sigma_\rho(P)(y, D_y) f \cdot \bar{f} dy \geq 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$B) \begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \exists C_\varepsilon \geq 0 \text{ tel que, } \forall u \in C^\infty(\Omega) \\ \int_{\Omega} P(x, D) u \cdot \bar{u} dx + \varepsilon \|u\|_{H^{\frac{m-k}{2}}(\Omega)}^2 \geq -C_\varepsilon \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \end{cases}$$

Remarquons que si  $\Sigma$  est connexe et non symplectique les hypothèses  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$  et  $H_4$  suffisent pour avoir A) et B).

**Théorème 3** : Sous les hypothèses  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $H_3$ ,  $H_4$  et A) on a le comportement asymptotique suivant de  $N(\lambda)$  :

i) si  $md - kn > 0$

$$N(\lambda) \sim \lambda^{\frac{n}{m}} a_1 ; \quad \lambda \rightarrow +\infty$$

ii) si  $md - kn = 0$

$$N(\lambda) \sim \lambda^{\frac{n}{m}} \text{Log} \lambda^{\frac{n}{m}} \tilde{a}_2 ; \quad \lambda \rightarrow +\infty$$

iii) si  $md - kn < 0$

$$N(\lambda) \sim \lambda^{\frac{n-d}{m-k}} a_3 ; \lambda \rightarrow +\infty$$

Les constantes  $\tilde{a}_2$  et  $a_3$  du théorème 3 s'obtiennent de la façon suivante.

Si  $\Sigma$  est donné par  $u_1 = \dots = u_{2d} = 0$ , avec les  $u_j$  ( $j = 1, \dots, 2d$ ) homogènes de degré zéro, on peut écrire microlocalement :

$$P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq 2k} A_\alpha(x, D) \circ (U(x, D))^\alpha ,$$

avec  $A_\alpha(x, D) \in OPS_{m - \frac{2k - |\alpha|}{2}}(\Omega)$ , homogène de symbole principal noté  $a_\alpha(x, \xi)$ . On a alors,

$$\sigma_\rho(P)(y, D_y) = \sum_{|\alpha| \leq 2k} a_\alpha(\rho) (\ell_\rho(y, D_y))^\alpha ,$$

où les  $\ell_\rho^j(y, D_y)$  ( $j = 1, \dots, 2d$ ) désignent les opérateurs différentiels sur  $\mathbb{R}^n$  à coefficients polynomiaux associés aux  $U_j(x, D_x)$  en  $\rho$ . On associe alors à  $P$  en tout point  $\rho$  de  $\Sigma$  un symbole  $a(\rho, X)$  sur  $N_\rho(\Sigma) = T_\rho(T^*\Omega) / T_\rho\Sigma$  et grâce aux hypothèses du théorème 3, on peut définir la puissance  $-\frac{n-d}{m-k}$  ième de  $a(\rho, X)$ ,  $\mu(\rho, X)$  dans l'algèbre de symboles introduite dans [3].

Plus précisément on a, pour tout  $\rho \in \Sigma$  :

$$[\sigma_\rho(P)(y, D_y)]^{n-d} \circ [\mu(\rho, \ell_\rho(y, D_y))]^{m-k} = I$$

Pour tout  $\rho \in \Sigma$ , on munit  $N_\rho(\Sigma)$  de la mesure de Lebesgue  $dx_\rho$  définie par :

$$\int_{\substack{2k \\ \text{Hess } p_m(\rho)(X) < 1}} dx_\rho = 1$$

A partir de  $dx \, d\xi$  et  $dx_\rho$  on définit une densité  $C^\infty$  positive, sur  $\Sigma$ ,  $d\rho$  homogène de degré  $-\frac{md-kn}{k}$ , ne dépendant que de  $p_m$ . En coordonnées microlocales, si  $dv$  est une  $(2n-2d)$ -forme telle que  $dx \, d\xi = dv \cdot du$  avec  $du = du_1 \dots du_{2d}$ ,  $d\rho$  est donné par :

$$d\rho = \left\{ \int_{|\alpha|=2k} \sum_{\Sigma} a_\alpha(\rho) u^\alpha < 1 \, du \right\} dv / \Sigma$$

si  $md - kn < 0$ , on peut poser :

$$\mu(\rho) = \int_{N_\rho(\Sigma)} \mu(\rho, x) dx_\rho ; \quad \forall \rho \in \Sigma .$$

On a  $\mu(\rho) > 0$  et  $a_3$  est donné par :

$$a_3 = (2\pi)^{-n} \frac{kn-md}{k(n-d)} \int \mu(\rho) < 1 \, d\rho .$$

Si  $md - kn = 0$ ,  $d\rho$  est homogène de degré zéro. Si on se donne une structure riemannienne sur  $\Omega$ , on peut écrire en coordonnées polaires,  $d\rho = \frac{dr}{r} dw$ .  $a_2$  est donné par :

$$a_2 = \frac{(2\pi)^{-n}}{n-d} \int_{\Sigma \cap S^* \Omega} dw ; \quad S^* \Omega = \{(x, \xi) \in T^* \Omega, \quad r(x, \xi) = 1\}$$

Les théorèmes 1 et 2 ont été établis dans le cas des caractéristiques doubles par A. Menikoff, J. Sjöstrand dans [7], [8] et [9] (cf. aussi [10]). R. B. Melrose [6] obtient un résultat meilleur dans le cas où  $\Sigma$  est symplectique et de codimension 2 toujours pour les o.p.d. à caractéristiques doubles.

Notons également un résultat de P. Bolley, J. Camus et Pham The Lai [1] relatif à des problèmes aux limites dégénérés où ils obtiennent un comportement similaire du  $N(\lambda)$ .

La proposition 2 généralise la condition de A. Melin [5].

### 3. Idée de la démonstration

Pour tout  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ , on note,  $|\lambda| = \mu^{2k}$  avec  $\mu > 0$ .

**Définition 4** : Nous dirons qu'un o.p.d.  $M_\lambda(x, D)$  dépendant du paramètre  $\lambda$  est dans  $OPS_{q, t}^{r, t}(\Omega, \Sigma)$  si et seulement si  $M_\lambda(x, D)$  et  $\mu^q M_\lambda(x, D)$  appartiennent respectivement aux classes de L. Boutet de Monvel [2]  $OPS_{2k}^{r, t}(\Omega, \Sigma)$  et  $OPS_{2k}^{r+q, t+q}(\Omega, \Sigma)$  ceci uniformément en  $\mu$ .

On a le lemme suivant :

**Lemme 5** : Sous les hypothèses  $H_1, H_2, H_3$  et  $H_4$ , pour tout  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  (et pour tout  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$  si A) est vérifié, il existe deux o.p.d.

$A_\lambda(x, D)$  et  $B_\lambda(x, D)$  dans  $CPS_{2k}^{-m, -2k}(\Omega, \Sigma)$  tels que l'on ait :

$$(P(x, D) - \lambda I) \circ A_\lambda(x, D) - I = R_\lambda(x, D) \in OPS_{2k}^{-1, -2}(\Omega, \Sigma)$$

$$(P(x, D) - \lambda I) \circ B_\lambda(x, D) - I = R'_\lambda(x, D) \in OPS_{2k}^{0, 1}(\Omega, \Sigma)$$

Pour construire  $A_\lambda(x, D)$  il suffit de prendre sur les cartes locales l'opérateur de symbole  $(p_m(x, \xi) + |\xi|^{m-k} - \lambda)^{-1}$ .

L'opérateur  $B_\lambda(x, D)$  s'obtient comme  $A_\lambda(x, D)$  hors de  $\Sigma$ . Dans un voisinage conique d'un point de  $\Sigma$  le symbole  $a(\rho, x) - \lambda$  associé à l'opérateur  $\sigma_\rho(D)(y, D_y) - \lambda I$  est inversible dans l'algèbre de [3] d'inverse,  $\sigma_\lambda(\rho, x)$ . Si  $(\rho, u)$  définit un système de coordonnées dans un voisinage conique d'un point de  $\Sigma$  (les  $(u_j)_{j=1, \dots, 2d}$  étant comme précédemment), on prend comme  $B_\lambda(x, D)$  l'opérateur dont le symbole est  $\sigma_\lambda(\rho, u)$ .

Le lemme 5 permet alors de construire une paramétrix de la résolvante de  $P$  en suivant un schéma classique de [2]. Soient

$$Q_{\lambda, 0}(x, D) = A_\lambda(x, D) - B_\lambda(x, D) \circ R_\lambda(x, D)$$

et

$$Q'_{\lambda, 0}(x, D) = B_\lambda(x, D) - A_\lambda(x, D) \circ R'_\lambda(x, D)$$

On a

$$(P(x, D) - \lambda I) \circ Q_{\lambda, 0}(x, D) - I \in OPS_{2k}^{-1, -1}(\Omega, \Sigma)$$

et

$$(P(x, D) - \lambda I) \circ Q'_{\lambda, 0}(x, D) - I \in OPS_{2k}^{-1, -1}(\Omega, \Sigma)$$

On construit une suite d'o.p.d.  $(Q_{\lambda, j}(x, D))_{j=0, 1, \dots}$  telle que :

$$Q_{\lambda, j}(x, D) \in OPS_{2k(j+1)}^{-m-j, -2k-j}(\Omega, \Sigma)$$

et telle que pour tout entier  $N$  on ait :

$$(P(x, D) - \lambda I) \left( \sum_{j=0}^{N-1} Q_{\lambda, j}(x, D) \right) - I \in OPS_{2kN}^{-N, -N}(\Omega, \Sigma)$$

on peut aussi bien partir de  $Q_{\lambda, 0}(x, D)$  que de  $Q'_{\lambda, 0}(x, D)$ . On en déduit la proposition suivante :

**Proposition 6** : Sous les hypothèses  $H_1, E_2, H_3, H_4$  et A) il existe une constante  $C \geq 0$  telle que l'opérateur  $P + CI$  soit positif. Pour tout  $s \in \mathbb{C}$  on a alors :

$$(P + CI)^s \in OP S^{mRes, 2kRes}(\Omega, \Sigma) .$$

La proposition 6 permet d'établir facilement la proposition 2.

On démontre que si  $(P - \lambda I)^{-1}$  est à trace, alors :

$$- \text{ si } md - kn > 0 \quad , \quad \text{Tr}(P - \lambda I)^{-1} \sim \text{Tr } A_\lambda \quad ; \quad |\lambda| \rightarrow + \infty$$

$$- \text{ si } md - kn \leq 0 \quad , \quad \text{Tr}(P - \lambda I)^{-1} \sim \text{Tr } B_\lambda \quad ; \quad |\lambda| \rightarrow + \infty$$

Les théorèmes 1 et 3 résultent de théorèmes tauberiens et du comportement asymptotique de la trace de  $A_\lambda(x, D)$  et de  $B_\lambda(x, D)$ .

---

#### REFERENCES

- [1] P. Bolley, J. Camus, Pham The Lai : Noyau, résolvante et valeurs propres d'une classe d'opérateurs elliptiques et dégérés. Lecture Notes in Math. 660, Berlin, Springer. (1978), 33-46.
- [2] L. Boutet de Monvel : Hypoelliptic operators with double characteristics and related pseudo differential operators. Comm. Pure Appl. Math. 27 (1974), 585-639.
- [3] L. Boutet de Monvel , A. Grigis, B. Helffer : Paramétrixes d'opérateurs pseudo-différentiels à caractéristiques multiples. Astérisque, 34-35 (1976) 93-121.
- [4] B. Helffer : Invariants associés à une classe d'opérateurs pseudo-différentiels et applications à l'hypoellipticité. Ann. de l'Inst. Fourier, Grenoble 26-2 (1976), 55-70.
- [5] A. Melin : Lower bounds for pseudo-differential operators. Ark. för Math. 9 (1971), 117-140.
- [6] R. B. Melrose : Hypoelliptic operators with characteristic variety of codimension two and the wave equation. Séminaire Goulaouic-Schwartz 1979-80, Centre Math. Ecole Polytechnique.
- [7] A. Menikoff, J. Sjöstrand : On the eigenvalues of a class of hypoelliptic operators. Math. Ann. 235 (1978), 55-85.
- [8] A. Menikoff, J. Sjöstrand : On the eigenvalues of a class of hypoelliptic operators II. Lecture Notes in Math. 755, 201-247, Springer, Berlin (1979).
- [9] A. Menikoff, J. Sjöstrand : The eigenvalues of hypoelliptic operators III. The non semi-bounded case. J. Analyse Math. 35 (1979), 123-150.
- [10] J. Sjöstrand : On the eigenvalues of a class of hypoelliptic operators IV. Ann. de L'inst. Fourier, Grenoble, 30-2 (1980), 109-169.