JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

CHRISTIANE RONDEAUX

Classes de Schatten d'opérateurs pseudo-différentiels

Journées Équations aux dérivées partielles (1980), p. 1-3

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1980____A6_0>

CLASSES DE SCHATTEN D'OPERATEURS PSEUDO-DIFFERENTIELS

par C. RONDEAUX

Soit A un opérateur pseudo-différentiel de symbole a. L'égalité $Tr(A) = \int a(X)dX$ est vraie si l'on fait les deux hypothèses suivantes assurant l'existence de chacun des deux membres : A est un opérateur à trace et $a \in L^1(\mathbb{R}^{2\nu})$. Cependant, aucune de ces hypothèses n'entraîne l'autre.

Soit A un opérateur compact sur $L^2(\mathbb{R}^{\nu})$ et soit (λ_n) la suite des valeurs propres de $(A^*A)^{1/2}$; on dit que A est dans la classe de Schatten $\mathfrak{I}_p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, si $\sum_n (\lambda_n)^p < \infty$.

On se propose de répondre aux questions suivantes :

1. L'appartenance à L^p des dérivées de a jusqu'à un certain ordre suffit-elle pour affirmer que A est dans $\mathfrak{I}_p$?
2. Que peut-on dire du symbole d'un opérateur de $\mathfrak{I}_p$?

On utilise la quantification de Weyl $Op_{1/2}$, définie pour $a \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2\nu})$ et $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{\nu})$ par :

$$Op_{1/2}(a)u(x) = \iint a(\frac{x+y}{2},\xi)\, e^{2i\pi\langle x-y,\xi\rangle}\, u(y)\,dy\,d\xi$$

L'espace de phase $\mathbb{R}^{2\nu}$ est muni d'un champ de normes symplectiques $Y \longmapsto \|\ \|_Y$ vérifiant la condition :

(i) il existe $C > 0$ tel que, pour tous $X,Y,Z \in \mathbb{R}^{2\nu}$, $\|X - Y\|_Y \leqslant C^{-1}$ entraîne $\|Z\|_X \leqslant C\|Z\|_Y$.

Si Y et $Y' \in \mathbb{R}^{2\nu}$, $\|.\|_{Y,Y'}$ désigne la norme définie par $\|Z\|^2_{Y.Y'} = 2 \inf_{Z_1+Z_2=Z} (\|Z_1\|^2_Y + \|Z_2\|^2_{Y'})$ et $\det_{Y,Y'}$ est le déterminant de la forme quadratique $\|\ .\ \|^2_{Y,Y'}$.

<u>Théorème 1</u> : Pour $a \in C^k(\mathbb{R}^{2\nu})$, soit

$$\|a\|_{L^p_k} = \sum_{0\leqslant q\leqslant k} \left(\int \Big(\sup_{\|V_j\|_X \leqslant 1} |V_1(D)\dots V_q(D)a(X)|\Big)^p dX\right)^{1/p}$$

1. Soit $1 \leqslant p \leqslant 2$. Supposons que le champ de normes vérifie les conditions (i) et (ii) : $\sup_X \int e^{-4\pi \| X-Y \|_Y^2} dY < \infty$.

Alors, pour tout entier pair $k > 2\nu\,(\frac{2}{p} - 1)$, si $\| a \|_{L_k^p} < \infty$,$op_{1/2}(a)$ appartient à $\mathfrak{J}_p$.

2. Soit $2 \leqslant p < \infty$. Supposons que le champ de normes vérifie les conditions (i), (ii), et (iii): il existe $m_o > 0$ tel que $\det_{YY'}^{1/4}\,(1 + \| Y-Y' \|_{Y,Y'})^{-m_o}$ soit le noyau d'un opérateur borné sur L^2.

Alors, pour tout entier pair $k > (2m_o + \nu)(1 - \frac{2}{p})$, si $\| a \|_{L_k^p} < \infty$,$Op_{1/2}(a)$ appartient à $\mathfrak{J}_p$.

La démonstration de ce théorème repose sur l'écriture des opérateurs pseudo-différentiels sous forme d'intégrales d'opérateurs de rang 1, mise en évidence par A. Unterberger [3].

Pour répondre à la deuxième question posée, introduisons le symbole normal W(A) de l'opérateur A, défini par :

$$W(A)(Y) = (A\,\varphi_Y,\ \varphi_Y)$$

où φ_Y est la fonction propre normalisée de l'oscillateur harmonique $op_{1/2}(X \mapsto \pi \| X-Y \|_Y^2)$ associée à la valeur propre $\nu/2$.

<u>Théorème 2</u> :

1. On suppose que le champ de normes vérifie les conditions (i) et (iv): $\det_{Y,Y'}^{1/2}\, e^{-\pi \| Y-Y' \|_{Y,Y'}^2}$ est le noyau d'un opérateur borné sur $L^2(\mathbb{R}^{2\nu})$.

Alors, si $2 \leqslant p \leqslant \infty$, pour tout A de $\mathfrak{J}_p$, W(A) appartient à $L^p(\mathbb{R}^{2\nu})$.

De plus, si $A \in \mathfrak{J}_\infty$,W(A)(Y) tend vers 0 quand $|Y|$ tend vers l'infini.

2. On suppose que le champ de normes vérifie (i) et (iii). Alors, si $1 \leqslant p \leqslant 2$, pour tout A de $\mathfrak{J}_p$, W(A) appartient à $L^p(\mathbb{R}^{2\nu})$.

Les théorèmes 1 et 2 permettent de prouver la caractérisation suivante, dans le cas où le champ de normes est constant, analogue pour $\mathfrak{J}_p$ d'une caractérisation par R . Beals [1] des opérateurs pseudo-différentiels.

Théorème 3 : Soit F_j la famille d'opérateurs définie par :

$$F_j = op_{1/2}(x_j) \quad \text{si} \quad j = 1\ldots\nu \quad ; \quad F_j = Op_{1/2}(\xi_{j-\nu}) \quad \text{si} \quad j = \nu+1,\ldots 2\nu \ .$$

Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

a. Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^{2\nu}$, $\int |D^\alpha a(X)|^p \, dX < \infty$

b. Pour tout k.uple $(j_1\ldots j_k)$, $[F_{j_1},[\ldots,[F_{j_k}, op_{1/2}(a)]\ldots]]$ appartient à $\mathfrak{I}_p$.

Enfin soit g une fonction ordre positive, compatible avec le champ de normes; supposons que les conditions permettant de définir les espaces de Sobolev généraux H^g soient satisfaites (on peut utiliser soit les espaces définis par R. Beals, soit ceux définies par N. Lerner [2]). Alors,

Théorème 4 : Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) $e^{-g} \in L^p(\mathbb{R}^{2\nu})$

2) Tout opérateur pseudo-différentiel d'ordre $-g$ est dans $\mathfrak{I}_p$

3) Soit i l'injection de H^g dans $L^2(\mathbb{R}^{2\nu})$, pour tout opérateur A borné de L^2 dans H^g, $i \circ A$ est dans $\mathfrak{I}_p$.

---

[1] R. Beals : Characterization of pseudo differential operators and applications. Duke Math. Journal (V. 44) n° 1, 1977.

[2] N. Lerner : Comptes Rendus de l'Acad. Sc., t.289; série A; 1979, p.663.

[3] A. Unterberger : Opérateurs métadifférentiels. Proceedings du meeting des Houches, 1979, à paraître aux Lectures Notes in Physics.

***