Journées Équations aux dérivées partielles

Bernard Helffer
Didier Robert

Comportement semi-classique du spectre des Hamiltoniens quantiques elliptiques

Journées Équations aux dérivées partielles (1980), p. 1-5
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1980____A5_0>

Conférence n° 5

COMPORTEMENT SEMI-CLASSIQUE DU SPECTRE DES HAMILTONIENS QUANTIQUES ELLIPTIQUES

par B. HELFFER et D. ROBERT

Introduction

L'un des postulats fondamentaux de la mécanique quantique (principe de correspondance de Bohr) dit que l'on doit retrouver les lois de la mécanique classique lorsque la constante de Planck $\hbar > 0$ tend vers zéro.

La dynamique d'une particule quantique, non relativiste, de masse m, obéit à l'équation de Schrödinger :

$$(S_h) \quad \begin{cases} i\hbar \dfrac{\partial \psi}{\partial t}(t,x) = -\dfrac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(t,x) + V(x).\,\psi(t,x) \\ \psi(0,x) = \psi_0(x) \end{cases}$$

ψ étant la fonction d'onde de la particule .

Posons $\hbar = h.\sqrt{m}$ et $Q(h) = -\dfrac{h^2}{2}\Delta + V$. $Q(h)$ est un hamiltonien quantique; l'hamiltonien classique correspondant est la fonction : $q(x,\xi) = \frac{1}{2}|\xi|^2 + V(x)$, $(x,\xi) \in T^*.\mathbb{R}^n$. La dynamique classique est décrite par les équations de Hamilton :

$$(\mathcal{H}) \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\partial q}{\partial \xi}(x,\xi) \\ \dfrac{d\xi}{dt} = -\dfrac{\partial q}{\partial x}(x,\xi) \\ x(0) = x_0 \;,\quad \xi(0) = \xi_0 \end{cases}$$

La vérification du principe de correspondance consiste à étudier comment le problème (S_h) se transforme en $(\mathcal{H})$ lorsque h tend vers zéro. Ce problème a déjà fait l'objet de nombreux travaux, en particulier de la part de Duistermaat, Leray, Maslov. Dans [2] J. Chazarain a donné des informations précises en étudiant la distribution tempérée :

$$S_h(t) = \text{Trace}\,[e^{-ih^{-1}.tQ(h)}] \quad ,$$

lorsque $h \to 0$. Ce comportement est relié aux périodes des trajectoires périodiques de $(\mathcal{H})$. L'objet du présent travail est de prolonger ce type de résultats à des hamiltoniens plus généraux, d'ordre 2, admettant un développement asymptotique en h. Ces résultats nous permettent de donner des informations sur le spectre d'opérateurs A(h) d'ordre 2m, $m > 0$, en étudiant : $S_h(t) = \mathrm{Trace}\,(\exp[ih^{-1}.t.(A(h)^{1/m}])$. On améliore ainsi, dans un cas particulier, des résultats récents de L. Hörmander ([5]).

Résultats : On pose $\lambda(x,\xi) = (1 + |x|^2 + |\xi|^2)^{1/2}$, $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}$ et, si $m \in \mathbb{R}$, on désigne par S^m l'espace des symboles $s \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ tels que pour tous α et $\beta \in \mathbb{N}^n$,
$\sup_{\mathbb{R}^{2n}} (\lambda(x,\xi)^{|\alpha|-m} . |\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta s(x,\xi)|) < +\infty$.

On appelle symbole admissible d'ordre $m \in \mathbb{R}$, toute application $h \longmapsto s(h)$ de $]0,h_o]$, $h_o > 0$, dans S^m telle qu'il existe une suite de symboles $(s_j)_{j \geq 0}$, $s_j \in S^{m-j}$, vérifiant :

$$h^{-N}(s(h,x,\xi) - \sum_{j=0}^{N-1} h^j s_j(x,\xi))$$

décrit un borné de S^{m-N} (pour la topologie usuelle) lorsque h décrit $]0,h_o]$.
On écrit alors : $s(h) \sim \sum_{j \leq 0} h^j.s_j$.

Soit alors a(h) un symbole admissible d'ordre $2m > 0$, $a(h) \sim \sum_{j\geq 0} h^j a_j$.
On suppose qu'il existe c et $C < 0$ telles que

(1) $c.\,\lambda(x,\xi)^{2m} \leq a_o(x,\xi) \leq C\,\lambda(x,\xi)^{2m}$ pour tout $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}$.

De plus on suppose que, pour tous α et $\beta \in \mathbb{N}^n$, il existe $C(\alpha,\beta)$ telle que :

$$(2)\quad |\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a_o| \leq C(\alpha,\beta).\,\lambda^{(2m-|\alpha|-|\beta|)_+}$$

$$(3)\quad |\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a_1| \leq C(\alpha,\beta).\,\lambda^{(2m-1-|\alpha|-|\beta|)_+}$$

Enfin on suppose que a(h,x,hD) est symétrique sur $C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$ pour tout $h \in]0,h_o]$.

Sous les hypothèses précédentes on a :

Théorème 1 : Il existe $h'_o > 0$ tel que pour tout $h \in]0,h'_o]$ l'opérateur a(h,x,hD) admette un unique prolongement autoadjoint positif injectif de $L^2(\mathbb{R}^n)$, noté A(h). De plus l'opérateur $(A(h))^{1/m}$ (défini par le calcul fonctionnel) est un opérateur pseudo-différentiel défini par un symbole admissible d'ordre 2 :
$q(h,x,\xi) \sim \sum_{j\geq 0} h^j q_j(x,\xi)$.

On a les propriétés suivantes :

(i) $q_o(x,\xi) = (a_o(x,\xi))^{1/m}$

(ii) $SPq \underset{def}{=} q_1 - \frac{1}{2i} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 q_o}{\partial x_j \partial \xi_j}$ est réel .

(iii) Pour tous α , $\beta \in \mathbb{N}^n$ il existe $C'(\alpha,\beta)$ telle que :

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta q_o| \leqslant C'(\alpha,\beta) . \lambda^{(2-|\alpha|-|\beta|)_+}$$

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta q_1| \leqslant C'(\alpha,\beta) . \lambda^{(1-|\alpha|-|\beta|)_+}$$

On constate facilement que $A(h)$ est à résolvante compacte pour tout $h \in]0,h'_o]$ Soit alors $(\lambda_j(h))_{j \geqslant 0}$ la suite croissante des valeurs propres de $A(h)$, où chaque valeur propre est répétée suivant sa multiplicité. On pose : $\mu_j(h) = (\lambda_j(h))^{1/m}$ et $S_h(t) = \text{Trace} \exp(-ih^{-1} t . Q(h)) = \sum_{j \geqslant 0} \exp(-ih^{-1} . t \, \mu_j(h))$ où $Q(h) = (A(h))^{1/m}$. On a bien sûr $S_h \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Désignons par H_{q_o} le champ hamiltonien associé à q_o. On introduit la terminologie suivante : une trajectoire d'énergie λ , $\lambda \in \mathbb{R}$, est une courbe intégrale de H_{q_o} située sur l'hypersurface : $\{q_o(x,\xi) = \lambda\}$.

I étant un intervalle réel, on désigne par $\mathcal{L}_I$ l'ensemble des périodes des trajectoires périodiques de H_{q_o} , d'énergie $-\tau$ avec $\tau \in I$. Soit alors une fonction test $\rho \in C_o^\infty(\mathbb{R})$ et posons : $I_\tau(h) = \langle S_h(t), \rho(t).e^{-ih^{-1}\tau.t}\rangle$

<u>Théorème 2</u> : Supposons qu'il existe $\varepsilon_o > 0$ tel que : $\text{supp}\, \rho \cap \mathcal{L}_{]\tau-\varepsilon_o, \tau+\varepsilon_o[} = \emptyset$. Alors : $I_\tau(h) = O(h^\infty)$ lorsque $h \longrightarrow 0$.

O étant toujours une période, on a une singularité décrite par le

<u>Théorème 3</u> : Supposons qu'il existe $\varepsilon_o > 0$ tel que : $\text{supp}\, \rho \cap \mathcal{L}_{]\tau_o-\varepsilon_o,\tau_o+\varepsilon_o[} = 0$ et que q_o n'ait pas de valeur critique dans $[-\tau_o - \varepsilon_o, -\tau_o + \varepsilon_o]$. On a alors :

$$I_\tau(h) = (2\pi h)^{1-n} \rho(0) \int_{q_o(x,\xi)=-\tau} \frac{dS_\tau}{|\text{grad}\, q_o|} + O(h^{2-n}) \ ; \quad h \longrightarrow 0$$

pour tout $\tau \in [\tau_o - \varepsilon_o, \tau_o + \varepsilon_o[$. De plus $O(h^{2-n})$ est uniforme par rapport à τ (dS_τ étant la densité riemannienne sur l'hypersurface : $\{q_o(x,\xi) = -\tau\}$).

Posons : $N_h(\lambda) = \text{card}\,\{j \in \mathbb{N}\ ;\ \mu_j(h) \leqslant \lambda\}$.

Théorème 4 : Soit $\lambda > 0$ non valeur critique de q_o . On a alors :

$$N_h(\lambda) = (2\pi h)^{-n} \iint_{q_o(x,\xi)\leqslant \lambda} dx\, d\xi + O(h^{1-n}) \ ;\ h \longrightarrow 0 .$$

Des résultats précédents on déduit le comportement de $N_h(\lambda)$, à h fixé lorsque $\lambda \longrightarrow +\infty$. Soit $a \in S^{2m}$, $a \sim \sum_{j<2m} a_j$, $a_j \in S^{2m-j}$. On suppose que a_{2m} est un polynôme homogène de degré 2m en (x,ξ) et que $a_{2m}(x,\xi) > 0$ si $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}\backslash(0)$. On fait l'hypothèse que $a(x,D)$ est symétrique sur $C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$. Il est bien connu qu'alors $a(x,D)$ est essentiellement autoadjoint et que son spectre est une suite croissante de valeurs propres $(\lambda_j)_{j \geqslant 0}$.

Posons : $N(\lambda) = \text{card}\{j, \lambda_j \leqslant \lambda\}$

Théorème 5 : (4) $N(\lambda) = \gamma_o \,.\, \lambda^{n/m} + O(\lambda^{(n-1/2)/m})$, $\lambda \longrightarrow +\infty$

où : $\gamma_o = (2\pi)^{-n} \iint_{a_{2m}(x,\xi) \leqslant 1} dx d\xi$

Si de plus $a - a_{2m} \in S^{2m-2}$ on :

$$(5)\quad N(\lambda) = \gamma_o .\ \lambda^{n/m} + O(\lambda^{n-1)/m}) \ ;\ \lambda \longrightarrow +\infty .$$

Remarque 1 : Le théorème 4 améliore le résultat (4.3)" de L. Hörmander [5]. En effet (4.3)" donnerait ici :

$$N_h(\lambda) = (2\pi h)^{-n} \iint_{q_o(x,\xi)\leqslant\lambda} dx\, d\xi + O(h^{2/3-n-\varepsilon}) \ ;\ \varepsilon > 0,\ h \longrightarrow 0 .$$

Remarque 2 : Les théorèmes 2 et 3 ont été établis par J. Chazarain [2] pour $Q(h) = -h^2 .\ \Delta + V$ sous des hypothèses analogues. Notre démonstration utilise les méthodes de [2] .

Remarque 3 : Guillemin-Sternberg [4] annoncent (5) dans le cas où $a(x,\xi)$ est un polynôme en (x,ξ) sans faire l'hypothèse $a_{2m-1} = 0$.

Remarque 4 : L. Hörmander [5] montre que si a_j est homogène de degré 2m-j , pour tout $j \leqslant 2m$, alors :

$$(6)\qquad N(\lambda) = \gamma_o .\ \lambda^{n/m} + \gamma_1 .\ \lambda^{(n-\frac{1}{2})/m} + O(\lambda^{(n-\delta)/m}) \quad \text{pour } \lambda \longrightarrow +\infty \text{ et pour tout } \delta < \frac{2}{3} .$$

où $$\gamma_1 = - \int_{a_{2m}=1} a_{2m-1} \cdot \frac{ds}{|\mathrm{grad}\ a_{2m}|} .$$

Notre résultat (5) montre que (6) est vérifiée pour $\delta = 1$ lorsque $a_{2m-1} = 0$. Nous pensons être en mesure de montrer prochainement que (6) est vérifiée avec $\delta = 1$ en supposant seulement que a_{2m-1} est homogène de degré 2m-1. Il est clair que $\delta = 1$ est la valeur optimale de δ pour avoir (6), en général, comme le montre l'exemple de l'oscillateur harmonique.

---

[1] K. Asada and D. Fujiwara : On some oscillatory integral transformations in $L^2(\mathbb{R}^n)$. Japan J. Math. 4 (1978) p.299-361.

[2] J. Chazarain : Spectre d'un hamiltonien quantique et mécanique classique (preprint, article à paraître à Comm. in P. D. E.).

[3] Y. Colin de Verdière : Spectres joints d'opérateurs pseudo-différentiels I. le cas non intégrable. A paraître in Duke Math. J.

[4] V. Guillemin and S. Sternberg : Some problems in integral geometry and some related problems in microlocal analysis. Amer. J. Math. (1979) vol.101, n° 4, p.915-955.

[5] L. Hörmander : On the asymptotic distribution of the eigenvalues of pseudodifferential operators in $\mathbb{R}^n$. Arkiv. för Math. vol.17, n°2 (Dec. 79) p. 296-313.

[6] D. Robert : Propriétés spectrales d'opérateurs pseudo-différentiels. Comm. in P. D. E. " (1978), p.755-828.

[7] V. N. Tuloskii and M. A. Subin : On the asymptotic distribution of eigen values of pseudo differential operators in $\mathbb{R}^n$. Math. USSR Sbornik 21 (1973), p.565-583.

* * *