

# JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

RICHARD BEALS

**Propagation de singularités pour les opérateurs du type  $D_t^2 - \square_b$**

*Journées Équations aux dérivées partielles* (1980), p. 1-3

<[http://www.numdam.org/item?id=JEDP\\_1980\\_\\_\\_\\_A19\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1980____A19_0)>

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

PROPAGATION DE SINGULARITES POUR LES  
OPERATEURS DU TYPE  $D_t^2 - \square_b$

par R. BEALS

Sur une variété compacte  $M$  on considère un opérateur (pseudo-)différentiel  $P$  du second ordre, de symbole principal  $p$ . On garde toujours les hypothèses suivantes :

(H 1)  $\int_M \bar{u} P u \, d\mu \geq 0$  pour chaque  $u \in C^\infty(M)$ , où  $\mu$  est une densité positive lisse.

(H 2)  $\Sigma = \{p = 0\} \subset X = T^*M \setminus 0$  est une sous-variété symplectique sur laquelle  $p$  s'annule exactement à l'ordre 2.

(H 3)  $P$  est hypoelliptique avec perte d'une dérivée (si  $\Sigma \neq \emptyset$ ).

Notons que d'après Boutet de Monvel [1], on sait qu'avec (H 2), la condition (H 3) équivaut à une condition explicite sur le symbole sous-principal de  $P$  sur  $\Sigma$ . L'exemple le plus important est (la partie de) l'opérateur  $\square_b$  au bord d'un domaine complexe strictement pseudo-convexe.

D'après (H 1),  $p$  est positif ou nul. Alors  $q = \sqrt{p}$  appartient à  $C^\infty(X \setminus \Sigma)$  et  $q$  engendre un flot hamiltonien  $\Phi_s = \exp(s H_q)$  sur  $X \setminus \Sigma$ .

Proposition : Le flot  $(\Phi_s)_{s \in \mathbb{R}}$  se prolonge en un groupe d'homéomorphismes de  $X$  (notés toujours  $\Phi_s$ ) qui fixent les points de  $\Sigma$ .

On considère aussi les groupes d'homéomorphismes de  $T^*\mathbb{R} \times X = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times X$  définis par

$$\Psi_s^\pm(t, \tau, w) = (t+s, \tau, \Phi_{\pm s}(w)) \quad , \quad w \in X .$$

Posons  $Q = P^{1/2}$ . La factorisation  $L = D_t^2 - P = L^+ L^- = L^- L^+$ , où  $L^\pm = D_t \pm Q$ , réduit l'étude de l'équation des ondes pour  $P$  à l'étude de l'équation de Schrödinger pour  $Q$ .  $Q$  engendre un groupe unitaire  $U(s) = \exp(isQ)$ , et on peut montrer que les opérateurs s'étendent à  $\mathcal{D}'(M)$ .

Théorème 1 : Soit  $f \in \mathcal{D}'(M)$ . Alors les spectres singuliers (fronts d'onde) satisfont à  $\text{WF}(U(s)f) = \Phi_{-s}(\text{WF}(f))$ .

Définissons car  $L^\pm = \{(t, \tau, w) \in T^*\mathbb{R} \times X : \tau \pm q(w) = 0\}$ .

Théorème 2 : Soit  $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times M)$ . Posons  $\Gamma = \text{WF}(f) \setminus \text{WF}(Lf)$ ,  $\Gamma^\pm = \Gamma \setminus \text{car } L^\mp$ ,  $\Gamma_\circ = \Gamma \cap \text{car } L^+ \cap \text{car } L^-$ . Alors  $\Gamma$  est la réunion disjointe  $\Gamma = \Gamma^+ \cup \Gamma^- \cup \Gamma_\circ$ . De plus,  $\Gamma^+$  et  $\Gamma_\circ$  (resp.  $\Gamma^-$  et  $\Gamma_\circ$ ) sont contenus dans  $\text{car } L^+$  (resp.  $\text{car } L^-$ ) et ils sont invariants par le flot  $(\Psi_s^+)$  (resp.  $(\Psi_s^-)$ ).

Signalons que dans le cas où  $\text{codim } \Sigma = 2$ , le Théorème 2 est dû à B. Lascar [2] et à Melrose [3]. Dans le cas classique  $\Sigma = \emptyset$ , l'opérateur  $P$  est elliptique, la racine carrée  $Q$  est pseudodifférentiel et classique, et les Théorèmes 1 et 2 se déduisent facilement du fait que pour n'importe quel opérateur pseudodifférentiel classique  $B$ , les opérateurs  $B(s) = U(s)BU(-s)$  restent pseudodifférentiels et leurs symboles principaux satisfont à  $b(s) = b \circ \Phi_s$ . De plus, ce fait peut être démontré facilement par récurrence à partir de l'identité :

$$\begin{aligned} B(s) &= B_s + \int_0^s \frac{d}{dr} [U(r)B_{s-r}U(-r)] ds \\ &= B_s + \int_0^s U(r)C_{s-r}U(-r) ds \end{aligned}$$

où les  $B_s$  ont pour symboles (complets)  $b \circ \Phi_s$ , puisque les  $C_r$  sont des opérateurs pseudodifférentiels d'ordre:ordre  $(B) - 1$ .

Dans le cas général  $Q$  est un opérateur pseudodifférentiel non-classique, mais classique en dehors de chaque voisinage conique de  $\Sigma$ . Alors  $B(s)$  est encore pseudodifférentiel si son symbole complet ne rencontre pas  $\Sigma$ . Pour aller jusqu'à  $\Sigma$  on définit le support essentiel de  $B : \mathcal{D}'(M) \rightarrow \mathcal{D}'(M)$  comme le plus petit fermé conique  $\Gamma \subset X$  tel que  $\text{WF}(f) \cap \Gamma = \emptyset$  implique  $Bf \in C^\infty(M)$ . Alors tout marche comme auparavant dès qu'on a le lemme suivant, qui est aussi démontré par la récurrence ci-dessus.

Lemme : Soit  $w \in \Sigma$  et soit  $V$  un voisinage conique de  $w$ . Alors pour chaque  $s_0 > 0$  il existe un opérateur pseudodifférentiel  $B$ , elliptique en  $w$ , tel que le support essentiel de  $B(s) = U(s)BU(-s)$  soit contenu dans  $V$  pour  $|s| \leq s_0$ .

Références

- [1] L. Boutet de Monvel : Comm. Pure Appl. Math. 27 (1974).
- [2] B. Lascar, à paraître. (Exposé à Orsay 10/1979).
- [3] R. B. Melrose, exposé au séminaire Goulaouic-Schwartz 1980.

\*  
\* \*  
\*