

AHMED SEBBAR

Prolongement des solutions d'un opérateur différentiel d'ordre infini

Journées Équations aux dérivées partielles (1980), p. 1-5

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1980____A17_0>

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PROLONGEMENT DES SOLUTIONS D'UN OPERATEUR
DIFFERENTIEL D'ORDRE INFINI

par A. SEBBAR

1. Introduction

Dans [4], C. O. Kiselman obtient pour les solutions holomorphes dans un ouvert convexe U de \mathbb{C}^n de $P(D)u = 0$ (où $P(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$, $a_\alpha \in \mathbb{C}$) un théorème de prolongement à un ouvert convexe maximal V , ne dépendant pas de u et dont la forme est gouvernée par les zéros de P_m : partie principale de $P(z) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha z^\alpha$. Ce même théorème est obtenu dans [3] par Bony et Schapira pour les opérateurs différentiels d'ordre fini et à coefficients variables. Ici, suivant la méthode de C. O. Kiselman, nous obtenons un théorème de prolongement pour les opérateurs différentiels d'ordre infini et à coefficients constants, vérifiant une propriété de croissance.

2. Prolongement des solutions

2.1 Définition : On appelle opérateur différentiel d'ordre infini vérifiant la propriété "P", tout opérateur :

$$f(D) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha D^\alpha ; \quad \text{où } f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha$$

est une fonction entière telle que :

(i) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C_\varepsilon > 0$ tel pour tout z dans \mathbb{C}^n

$$|f(z)| \leq C_\varepsilon \exp(\varepsilon \|z\|) .$$

(on dit que f est de type exponentiel nul).

(ii) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $R_\varepsilon > 0$ tel que pour tout z dans \mathbb{C}^n vérifiant $|f(z)| \leq 1$ et $\|z\| \geq R_\varepsilon$, on ait : $d(z, W_\varepsilon) < \varepsilon \|z\|$ où W_ε est l'ensemble des zéros de f dans \mathbb{C}^n .

2.2 Définition : Soit A une partie non bornée de \mathbb{C}^n , on appelle cône asymptotique de A et note $\alpha(A)$ le cône réel fermé engendré par l'origine de \mathbb{C}^n et les valeurs d'adhérences des suites $\zeta_j / \|\zeta_j\|$, $\zeta_j \in A$ et $\lim_{j \rightarrow +\infty} \|\zeta_j\| = +\infty$.

On obtient les résultats suivants ([5] [6]) :

2.3 Théorème de prolongement : Soient U un ouvert convexe de \mathbb{C}^n ,

$$V = \Gamma_{\alpha(Wf)}(U) = \bigcap_{\zeta \in \alpha(Wf)} \{z \in \mathbb{C}^n; \operatorname{Re} \langle z, \zeta \rangle \leq H_U(\zeta)\} \quad \text{où } f \text{ est une fonction entière}$$

de type exponentiel nul vérifiant la propriété "P". Toute solution u , holomorphe dans U , de $f(D)u = 0$, se prolonge en une solution v , holomorphe dans V , de $f(D)v = 0$.

Ce théorème repose essentiellement sur le :

2.4 Théorème de division : Soient dans \mathbb{C}^n une fonction entière de type exponentiel nul vérifiant "P" et $K \subset L$ deux compacts convexes de \mathbb{C}^n tels que :

$$H_L(\zeta) \leq H_K(\zeta) + b \log(2 + \|\zeta\|) \quad \text{si } f(\zeta) = 0$$

Pour toute fonction entière f_1 vérifiant

$$\log |f_1(\zeta)| \leq H_L(\zeta) + a_1 \log(2 + \|\zeta\|), \quad \zeta \in \mathbb{C}^n$$

et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions f_2, f_3 entières dans \mathbb{C}^n telles que :

- (i) $f_1 = ff_2 + f_3$
- (ii) $\log |f_2(\zeta)| \leq H_{L_\varepsilon}(\zeta) + a_2(\varepsilon) \log(2 + \|\zeta\|), \quad \zeta \in \mathbb{C}^n$
- (iii) $\log |f_3(\zeta)| \leq H_{K_\varepsilon}(\zeta) + a_3(\varepsilon) \log(2 + \|\zeta\|), \quad \zeta \in \mathbb{C}^n$

où L_ε (resp K_ε) est le ε -voisinage de L (resp. K). Les constantes $a_2(\varepsilon)$, $a_3(\varepsilon)$ et les fonctions f_2, f_3 dépendent de $\varepsilon, f, K, L, a_1$ et b , mais non de f_1 .

(On a noté par H_L la fonction d'appui de L

$$H_L(\zeta) = \sup_{u \in L} \operatorname{Re}(\zeta_1 u_1 + \dots + \zeta_n u_n) \quad \text{si } \left. \begin{array}{l} \zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \\ u = (u_1, \dots, u_n) \end{array} \right\}$$

2.5 Corollaire : Soient U un ouvert convexe de \mathbb{C}^n , $V = \Gamma_{\alpha(Wf)}(U)$, f étant comme dans (2.1). Soient $u \in \mathcal{H}(U)$ et $v \in \mathcal{H}(V)$ telles que $f(D)u = v|_U$, alors u est prolongeable en une solution u_0 holomorphe dans V , de $f(D)u_0 = v$.

2.6 Théorème : Soient f comme dans (2.1) et $\alpha(Wf)$ son cône asymptotique. Si toute solution u , holomorphe dans U de $f(D)u = 0$ se prolonge en une solution v , holomorphe dans V_1 de $f(D)v = 0$, alors $V_1 \subset V = \Gamma_{\alpha(Wf)}(U)$.

Contrairement au cas des opérateurs différentiels d'ordre fini, on a :

2.7 Proposition :

Soit f une fonction entière de type exponentiel nul qui n'est pas un polynôme. Si le cône asymptotique $\alpha(Wf)$ est stable par multiplication complexe, pour tout ouvert convexe U de \mathbb{C}^n , on a :

$$U = V = \Gamma_{\alpha(Wf)}(U)$$

Exemples :

(i) Une fonction entière f dans \mathbb{C}^2 vérifiant "P" et telle que $\alpha(Wf) \neq \mathbb{C}^2$:

$$f(z_1, z_2) = \prod_{n \geq 0} \left(1 - \frac{z_1^2 + z_2^2}{\alpha_n}\right), \quad \alpha_n = e^{e^n}.$$

(ii) Une fonction entière de type nul ne vérifiant "P" (Kiselman)

$$f(z) = \prod_{k \geq 0} \left(1 - \frac{z}{a^k}\right)^{n^k}; \quad a > n > 2.$$

3. Classe normale

3.1 Définition : On appelle classe normale, la classe de toutes les fonctions pluri-sous-harmoniques V , $V(0) > -\infty$ vérifiant

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{r \int_r^{+\infty} \frac{v(t)}{t^2} dt}{\int_0^r \frac{v(t)}{t} dt} = 0$$

(où on a désigné par $v(t) = v(0, t) = (2n-2)t^{2-2n} \mu(0, t)$ $\mu(0, t)$ étant la masse portée par la boule $B(0, t)$ pour la mesure de Radon μ associée à V). Une fonction entière f , $f(0) \neq 0$ est dite de la classe normale si la fonction pluri-sous-harmonique $V = \text{Log}|f|$ est de la classe normale.

Les résultats suivants s'appuient sur la méthode des boules d'exclusion de V. Avaniçsian [1] , [2].

3.2 Proposition : Toute fonction entière f , non constante, $f(0) \neq 0$ et est telle que:

$$M(R, f) = \sup_{\|z\| \leq R} \text{Log}|f(z)| = O((\text{Log } R)^2)$$

est de la classe normale.

3.3 Théorème : Soit f une fonction entière de la classe normale, $f(0) = 1$ et non constante. Soient $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ qui à r associe

$$\sup_{x \geq r} \left\{ \frac{\int_x^{+\infty} \frac{v(t)}{t^2} dt}{\int_0^x \frac{v(t)}{t} dt} \right\}^{1/4n}$$

et Ω_φ le φ -voisinage fermé de Wf

$$\Omega_\varphi = \{z \in \mathbb{C}^n, d(z, Wf) \leq \varphi(\|z\|)\|z\|\}$$

Si $\mathbb{C}^n \setminus \Omega_\varphi$ est non vide, on a uniformément par rapport au vecteur a , $|a| = 1$

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{\text{Log}|f(Ra)|}{M(R, f)} = 1, \quad z = Ra \in \mathbb{C}^n \setminus \Omega_\varphi$$

3.4 Corollaire : Toute fonction entière de la classe normale, non constante et telle que $f(0) = 1$ vérifie la propriété "P".

-
- [1] V. Avaniçsian : Comptes rendus, 274, série A, 1972, p.1915.
 [2] V. Avaniçsian : Quelques applications de la méthode des "boules d'exclusion". (Izvestia, série "Mathematika", Ac. Sc. Armenia VIII, n° 4, 1973).
 [3] J. M. Bony et P. Schapira : Existence et prolongement des solutions holomorphes des équations aux dérivées partielles. Inventiones Math. 17 (1972) p.95-105.

- [4] C. O. Kiselman : Prolongement des solutions d'une équation aux dérivées partielles à coefficients constants.
(Bull. Soc. Math. Fr. 97, 1969, p.329-356).
- [5] A. Sebbar : Prolongement des solutions d'un opérateur différentiel d'ordre infini. C. R. Acad. Sc. Paris, t. 289, série A, p.735-738.
- [6] A. Sebbar : Prolongement des solutions d'un opérateur différentiel d'ordre infini. Séminaire Lelong-Skoda, année 1979, à paraître , Lecture Notes, et thèse de 3ème cycle, Bordeaux 1980.

*
*
*