JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

T. MONTEIRO-FERNANDES

Problème de Cauchy microdifférentiel

Journées Équations aux dérivées partielles (1980), p. 1-3

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1980____A11_0>

PROBLEME DE CAUCHY MICRODIFFERENTIEL

par T. MONTEIRO FERNANDES

Soit X une variété analytique complexe. On note $T^*_X X$ la section nulle du fibré cotangent $T^* X$ et on pose $\dot{T}^* X = T^* X - T^*_X X$. Soit π la projection de $T^* X$ sur X. Dans $\dot{T}^* X$ on considère une sous-variété V involutive homogène lisse. On note $\mathcal{E}_X$ (resp. $\mathcal{E}_X(m)$) le faisceau des opérateurs microdifférentiels d'ordre fini (respectivement d'ordre inférieur ou égal à $\underline{m}$) de Sato, Kawai et Kashiwara et $\mathcal{D}^1_V$ le sous-faisceau d'anneaux de $\mathcal{E}_{X|_V}$, engendré par les opérateurs de $\mathcal{E}_X(1)$ dont le symbole d'ordre un s'annule sur V. On pose, pour $m \in \mathbb{Z}$,

$$\mathcal{D}^1_V(m) = \mathcal{D}^1_V \cap \mathcal{E}_X(m) \qquad \text{et} \qquad \operatorname{grad} \mathcal{D}^1_V = \bigoplus_{m \geqslant 0} \frac{\mathcal{D}^1_V(m)}{\mathcal{D}^1_V(m-1)} .$$

On note $\mathcal{O}_{T^* X}(j)$ le faisceau des fonctions holomorphes sur $T^* X$, homogènes de degré j par rapport à la variable de la fibre ; soit I_V l'idéal de définition de V et $I_V(j) = I_V \cap \mathcal{O}_{T^* X}(j)$. On a $\mathcal{O}_V = \mathcal{O}_{T^* X} / I_V$ et $\mathcal{O}_V(j) \underset{\text{def}}{=} \dfrac{\mathcal{O}_{T^* X}(j)}{I_V(j)}$.

Soit π_o la projection de $T_V(T^* X)$ sur V et notons S_V le faisceau (sur $T_V(T^* X)$) $\pi_o^{-1}(\operatorname{grad} \mathcal{D}^1_V \underset{\mathcal{O}_{T^* X}(0)}{\otimes} \mathcal{O}_V(0))$.

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}^1_V$-module cohérent; on appelle <u>bonne filtration</u> de $\mathcal{M}$ toute famille $\{\mathcal{M}_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ de $\mathcal{E}_X(0)$- sous-modules de $\mathcal{M}$, cohérents, vérifiant :

(i) $\mathcal{M} = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{M}_j$,

(ii) Pour tout $m \geqslant 0$, $\mathcal{D}^1_V(m) \mathcal{M}_j \subset \mathcal{M}_{j+m}$,

(iii) $\mathcal{M}_j = 0$ pour $j \ll 0$,

(iv) il existe $k_o \geqslant 0$ tel que pour $k \geqslant k_o$, $m \geqslant 0$,

$$\mathcal{D}^1_V(m)\, \mathcal{M}_k = \mathcal{M}_{k+m} .$$

On pose grad $\mathcal{M} = \bigoplus_j (\mathcal{M}_j/\mathcal{M}_{j-1})$; le sous-ensemble de $T_V(T^*X)$

$$C^1_V(\mathcal{M}) \underset{def}{=} \operatorname{supp}\left[\pi_0^{-1}(\operatorname{grad} \mathcal{M} \underset{\mathcal{O}_{T^*X}(0)}{\otimes} \mathcal{O}_V(0)) \underset{S_V}{\otimes} \mathcal{O}_{T_V}(T^*X)\right]$$ est analytique ,

conique par rapport aux deux actions de $\mathbb{C}^*$ et indépendant de la bonne filtration choisie. C'est la <u>variété 1-microcaractéristique de $\mathcal{M}$ le long de V</u>.

Soit maintenant $\mathcal{M}$ un $\mathcal{E}_X$-module cohérent et soit $\mathcal{M}_0$ un $\mathcal{D}^1_V$-sous-module cohérent de $\mathcal{M}$ qui l'engendre. Le sous ensemble $C^1_V(\mathcal{M}_0)$ est indépendant du choix de $\mathcal{M}_0$ ce qui permet de définir $C^1_V(\mathcal{M}) = C^1_V(\mathcal{M}_0)$. Ses élements sont appelés les <u>directions 1-microcaractéristiques de $\mathcal{M}$ le long de V</u>.

<u>Théorème 1</u> : Soit $0 \to \mathcal{L} \to \mathcal{M} \to \mathcal{N} \to 0$ une suite exacte de $\mathcal{E}_X$-modules cohérents; alors on a $C^1_V(\mathcal{M}) = C^1_V(\mathcal{L}) \cup C^1_V(\mathcal{N})$.

Si P est un opérateur dans $\mathcal{D}^2_V(m)$, $P \notin \mathcal{D}^1_V(m-1)$ et $m \geqslant 0$, on lui associe la partie homogène de degré m du développement de Taylor du symbole principal $\sigma_m(P)$ le long de V. On définit ainsi une section de $\mathcal{O}_{T_V(T^*X)}$ que l'on note $\sigma^1_V(P)$. Si $P \in \mathcal{E}_X(-1)$ on pose $\sigma^1_V(P) = 0$.

<u>Théorème 2</u> : Supposons $\mathcal{M}$ défini par une seule équation $\mathcal{M} = \mathcal{E}_X/\mathcal{E}_X P$, où $P \in \mathcal{D}^1_V(m)$, $P \notin \mathcal{D}^1_V(m-1)$ et $P \notin \mathcal{E}_X(-1)\mathcal{D}^1_V$. On a alors l'égalité :

$$C^1_V(\mathcal{M}) = \{(x^*,\theta) \in T_V(T^*X),\ \sigma^1_V(P)(x^*,\theta) = 0\}$$

Les directions non 1-microcaractéristiques sont alors non microcaractéristiques au sens de Kashiwara et Schapira [1]. Si $(\mathcal{M},\mathcal{N})$ est un couple de $\mathcal{E}_X$ -modules cohérents on définit (de manière analogue à [1]) la variété 1-microcaractéristique $C^1(\mathcal{M},\mathcal{N})$, comme suit : on note Δ le fibré conormal à X dans $X \times X$ (où l'on identifie X à la diagonale de $X \times X$) et on pose $C^1(\mathcal{M},\mathcal{N}) = C^1_\Delta(\mathcal{M} \hat{\otimes} \mathcal{N}^*)$, $\mathcal{N}^*$ désignant le module adjoint de $\mathcal{N}$ (cf. [S.K.K.]).

Soit maintenant Y une sous-variété de X. On dit que Y est non 1-microcaractéristique pour le $\mathcal{E}_X$-module $\mathcal{M}$ le long de V, si, pour toute fonction holomorphe φ nulle sur Y, avec $d\varphi \neq 0$, le champ hamiltonien H_φ est non 1-microcaractéristique pour $\mathcal{M}$ le long de V.

Cette définition s'étend de manière évidente à un couple $(\mathcal{M},\mathcal{N})$. Soit d la codimension de Y dans X et ρ (resp. ϖ) la projection $T^*X \underset{X}{\times} Y \to T^*Y$ (resp. $T^*X \underset{X}{\times} Y \to T^*X$).

Théorème 3 (Cauchy-Kowalewska) : Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux $\mathcal{E}_X$-modules cohérents définis dans un ouvert U de T^*X, Y une sous-variété de X non 1-microcaractéristique pour $(\mathcal{M},\mathcal{N})$ sur $\tilde{\omega}^{-1}(U)$. On a alors un isomorphisme naturel :

$$\omega^{-1}(\mathbb{R}\,\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M},\mathcal{N})) \simeq \mathbb{R}\,\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{E}_{X\leftarrow Y}) \overset{L}{\underset{\rho^{-1}.\mathcal{E}_Y}{\otimes}} (\mathcal{E}_{Y\to X} \otimes \mathcal{N}) \quad [d]$$

Théorème 4 (Propagation) : Soit Ω un ouvert de T^*X dont le bord $\partial\Omega$ est de classe C^1 au voisinage de $p \in \partial\Omega$. Supposons $\Omega = \{x^* \in T^*X, \varphi(x^*) < 0\}$ et $H_\varphi(p) \notin C^1(\mathcal{M},\mathcal{N})$. On a alors

$$\mathbb{R}\,\Gamma_{T^*X-\Omega}(\mathbb{R}\,\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M},\mathcal{N}))_p = 0$$

Le théorème 3 (resp. Théorème 4) est l'analogue du théorème 3.1 de [1] (resp. du Théorème 8.2.1 de [2]) avec $\mathcal{N}^\infty$ remplaçant $\mathcal{N}$.

Les mêmes résultats sont obtenus par Yves Laurent [3] en microlocalisant les opérateurs de $\mathcal{E}_X|_V$.

Références

[1] M. Kashiwara, P. Schapira : Inventiones Math. 46 (1978) 17-38.

[2] M. Kashiwara, P. Schapira : Acta Math. 142, 1979, 1-55 .

[3] Y. Laurent : Notes 1 et 2 aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris (10 Décembre 1978).

[4] B. Malgrange : Cours sur les opérateurs différentiels. Grenoble, 1976.

[5] T. Monteiro-Fernandes : Thèse de 3ème cycle, Paris XIII, 1978.

[6] [S. K. K.] : M.Sato, T.Kawai, M.Kashiwara : Lecture Notes in Math. n°287, Springer 1973, p. 265-529.

***