PHAM THE LAI

Meilleures estimations asymptotiques des restes de la fonction spectrale et des valeurs propres relatifs au laplacien

Journées Équations aux dérivées partielles (1979), p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1979____A6_0>

Conférence n° 6

MEILLEURES ESTIMATIONS ASYMPTOTIQUES DES RESTES DE LA FONCTION SPECTRALE ET DES VALEURS PROPRES RELATIFS AU LAPLACIEN

par PHAM THE LAI

I. Introduction

Dans ce travail, nous donnons une nouvelle estimation asymptotique du reste de la fonction spectrale de l'opérateur de Dirichlet relatif au Laplacien $\Delta = - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ dans un domaine borné Ω convexe de classe C^∞ de $\mathbb{R}^n$ (♦). Nous en déduisons la meilleure estimation asymptotique du reste des valeurs propres, généralisant ainsi le résultat récent de R. Seeley [6] établi pour la dimension 3.

Soit $e(x,y,\lambda)$ la fonction spectrale et notons le reste (écrit sur la diagonale) :

$$r(y,y,\lambda) = e(y,y,\lambda) - (2\pi)^{-n} w_n \lambda^{n/2}$$

où w_n est la mesure de la boule unité de $\mathbb{R}^n$.

L. Hörmander [3] a prouvé que

$$r(y,y,\lambda) = O(\lambda^{\frac{n-1}{2}}) \qquad \lambda \to +\infty$$

uniformément sur tout compact $\subset \Omega$, et J. Brüning [2] l'a amélioré en prouvant que :

$$r(y,y,\lambda) = O(\delta_y \lambda^{\frac{n-1}{2}}) \qquad \lambda \to +\infty \tag{1.1}$$

uniformément sur Ω ; dans (1.1), on a noté

$$\delta_y = \mathrm{dist}(y,\partial\Omega) \quad \text{où } \partial\Omega \text{ est le bord de } \Omega .$$

(♦) L'hypothèse de convexité n'est pas essentielle mais nous la faisons ici pour donner des définitions simples concernant les rayons réfléchis au § II.

Le résultat (1.1) est, dans un sens, le meilleur possible.

Nous montrons ici que si l'on ajoute à $r(y,y,\lambda)$ un terme oscillant (provenant de la première réflexion sur le bord), nous pouvons améliorer le reste donné par (1.1). Ce terme oscillant est :

(1.2) $$(2\pi)^{-n} \frac{w_n}{\mathfrak{J}_{\frac{n}{2}-1}(0)} \int_0^{\sqrt{\lambda}} \mathfrak{J}_{\frac{n}{2}-1}(2\,\delta_y\,\sigma)\,d\sigma^n$$

où $\mathfrak{J}_{\frac{n}{2}-1}$ est la fonction entière associée à la fonction de Bessel $J_{\frac{n}{2}-1}$:

$$\mathfrak{J}_{\frac{n}{2}-1}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-\frac{n}{2}+1} J_{\frac{n}{2}-1} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!\,\Gamma(\frac{n}{2}+r)} \left(\frac{z}{2}\right)^r .$$

Le résultat précis est énoncé au théorème 4.1, §IV qui est le résultat essentiel de ce travail. Il ne semble pas être connu, même en dimension 2 ou 3 (en dimension 1, il est prouvé par J. Brüning à partir de l'expression explicite de la fonction spectrale).

Soit $N(\lambda) = \sum_{\lambda_j \leq \lambda} 1$ le nombre des valeurs propres $\lambda_j \leq \lambda$.

A l'aide de (1.2), nous obtenons aisément :

(1.3) $$N(\lambda) = (2\pi)^{-n} w_n |\Omega| \lambda^{\frac{n}{2}} + O(\lambda^{\frac{n-1}{2}}) \qquad \lambda \to +\infty .$$

Ce résultat généralise donc le travail de R. Seeley obtenu pour $n = 3$; le cas $n = 2$ est donné par V. Babich - B. Levitan [1] (pour $n = 1$, (1.3) est bien connu).

Il est intéressant de noter qu'à l'aide de (1.2), il est raisonnable de conjecturer que le reste de la fonction $N(\lambda)$ (pour la dimension $n \geq 2$) :

$$R(\lambda) = N(\lambda) - (2\pi)^{-n} w_n |\Omega|\, \lambda^{\frac{n}{2}}$$

a un comportement asymptotique donné par la formule :

$$r(\lambda) = d_n |\partial\Omega| \lambda^{\frac{n-1}{2}} + O(\lambda^{\frac{n-1}{2}}) \qquad \lambda \to \infty$$

avec :

$$d_n = -(2\pi)^{-n} \frac{n w_n}{2(n-1)\, \mathcal{J}_{\frac{n}{2}-1}(0)} \int_0^\infty \mathcal{J}_{\frac{n}{2}-1}(t)\,dt = - \frac{w_{n-1}}{4(2\pi)^{n-1}}$$

(Pour $n = 3$, nous avons $d_3 = - \frac{1}{16\pi}$, ce qui confirme la conjecture de H. Weyl). Nous utilisons la méthode des équations des ondes, inaugurée depuis longtemps par B. Levitan [4] et reprise par R. Seeley [6]. Notre travail est nettement influencé par celui de R. Seeley. Cet exposé est le résumé de [7] (à paraître).

Remarque : Nous pouvons aussi traiter le problème de Neumann. Le terme oscillant à ajouter à $r(y,y,\lambda)$ est le terme (1.2) changé de signe

II. Description du noyau de Hyghens

Soit E_λ la famille spectrale de l'opérateur de Dirichlet . Pour $t \in \mathbb{R}$, on note $H(t)$, l'opérateur borné dans $L^2(\Omega)$ défini par :

$$H(t) = \int_0^\infty \cos t\sqrt{\lambda}\; dE_\lambda$$

et le fonction paire $H : t \mapsto H(t)$ est appelée la transformée cosinus de dE_λ .

Si l'on pose $M_\tau = E_{|\tau|^2}\, \mathrm{sgn}\, \tau$, $2H$ est la transformée de Fourier de dM_τ :

$$H(t) = \frac{1}{2} \int e^{-it\tau}\, dM_\tau \tag{2.1}$$

et si l'on pose $F(t) = Y(t)\,H(t)$ (Y : fonctions d'Heaviside), alors pour $f \in \mathcal{D}(\Omega)$, la fonction $u(t) = Y(t)\,H(t)f$ est solution du problème de Huyghens :

$$\begin{cases} u \text{ est nulle sous } t < 0 \\ \partial_t^2 u + \Delta u = 0 \qquad t > 0,\ x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \ ; \quad u(0) = f \ , \ \partial_t u(0) = 0 \end{cases}$$

La fonction $F : t \mapsto F(t)$ est appelée la transformée de Huyghens de dE_λ. Il est clair que la transformée cosinus s'exprime par :

$$H(t) = F(t) + F(-t) \tag{2.2}$$

Nous désirons décrire les singularités du noyau $F(x,t,y)$ de $F(t)$, dit noyau de Huyghens. Le noyau $H(x,t,y)$ de $H(t)$ sera obtenu alors en utilisant (2.2).

Il est clair que le premier terme de $F(x,t,y)$ est $F^n(x,t,y)$ où $F^n(x,t,y)$ est le noyau de $F^n(t)$, relatif à la réalisation de Δ_n dans $\mathbb{R}^n$.

La correction $F - F^n$ sera faite par l'étude de l'onde réfléchie.

<u>Définition</u> : Soit $y \in \Omega$. Un chemin issu de y et joignant un point $x \in \Omega$ est dit un rayon de réflexions multiples si son trajet est décrit comme un rayon lumineux se réfléchissant au moins une fois sur $\partial\Omega$ suivant les lois de l'optique géométrique. Un tel rayon est dit un <u>rayon réfléchi</u> s'il n'y a qu'une seule réflexion.

Soit $\Omega_0 \subset \Omega$ le domaine d'une carte locale et $\underline{\Omega}_0 = \Omega_0 \cup \Gamma_0$, Γ_0 la partie de $\partial\Omega$, adhérente à Ω_0. On peut supposer Ω_0 suffisamment petit pour que, pour tout $(x,y) \in \Omega_0 \times \Omega_0$, il n'y a qu'un seul rayon réfléchi issu de y et joignant x. Cela permet de définir :

$$s(x,y) = \text{longueur du rayon réfléchi.}$$

<u>Lemme 2.1</u> (R. Seeley) : Il existe $\varkappa > 0$ tel que pour $(x,y) \in \Omega_0 \times \Omega_0$ on ait : parmi tous les rayons de réflexions multiples issus de y et joignant x dont la longueur du trajet est $\leq \varkappa\, \delta_y^{1/2}$, il n'y a que des rayons réfléchis.

Ceci amène à définir pour $y \in \Omega_0$:

$$\Omega_\varkappa^y = \{x \in \Omega_0 \ ; \ s(x,y) \leq \varkappa\, \delta_y^{1/2}\} \ ; \ \underline{\Omega}_\varkappa^y = \Omega_\varkappa^y \cup \Gamma_\varkappa^y$$

où $\Gamma_\varkappa^y$ est la partie de $\partial\Omega$, adhérente à $\Omega_\varkappa^y$.

Nous avons le :

Lemme 2.2 : La fonction (en x) $s(x,y)$ est C^∞ dans Ω^y_κ .

Le lemme 2.1 suggère, en vertu de la loi de propagation de vitesse finie (vitesse 1 ici), de ne tenir compte, pour $y \in \Omega_0$, dans la différence :

$$F(x,t,y) - F^n(x,t,y) \qquad \text{dans } \Omega^y_\kappa \times \left]-\infty, \kappa\delta_y^{\frac{1}{2}}\right[$$

que les rayons réfléchis.

Pour cela, on définit, pour k entier relatif, une distribution dépendant d'un paramètre $s > 0$, notée $P^k(s;t)$ défini par son action sur les fonctions test :

$$(2.3) \qquad \varphi \mapsto \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{Re}\,p = \alpha > 0} \hat{\hat{\varphi}}(p)\,p\,E^k(s;p)\,dp \qquad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

avec

$$(2.4) \qquad E^k(s;p) = 2^{-k+1}\pi^{-\frac{k}{2}}p^{k-1}K_{\frac{k}{2}-1}(sp) \qquad \mathrm{Re}\,p > 0$$

où $K_\mu(z)$, $\mu \in \mathbb{R}$, est une fonction de Bessel, transformée de Laplace d'une distribution à support limité à gauche :

$$K_\mu(z) = \Gamma(\tfrac{1}{2})\int_1^\infty e^{-zt}\,\frac{(t^2-1)^{\mu-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}\,dt \qquad \mathrm{Re}\,z > 0$$

et

$$(2.5) \qquad \hat{\hat{\varphi}}(p) = \int e^{pt}\varphi(t)\,dt\,.$$

Remarquons que l'intégrale dans (2.3) ne dépend pas de $\alpha > 0$ et que pour $k = n$, $E^n(|x-y|;p)$ n'est autre que le noyau de la résolvante $(\Delta_n + p^2)^{-1}$ dans $\mathbb{R}^n$, pour $\mathrm{Re}\,p > 0$.

Nous écrivons maintenant la différence $F - F^n$ sous la forme :

$$(2.6) \qquad F(x,t,y) - F^n(\ ,t,y) = \alpha_n(x,y)P^n(s(x,y);t) + \alpha_{n-2}P^{n-2}(s;t) + \dots + \alpha_{n-2\ell}\,P^{n-2\ell}(s;t) + \dots$$

où

(i) $P^k(s(x,y);t)$, définie par (2.3), est un terme de phase ; $P^k(s;t)$ a des singularités décroissantes (en t) lorsque k décroit.

(ii) $\alpha_k(x,y)$ est un terme de transport, à déterminer dans $\underline{\Omega}^y_\varkappa$.
Un calcul aisé montre que l'on a, pour $m \in \mathbb{N}$ quelconque :

$$(2.7) \qquad (\partial_t^2 + \Delta_x)\Big(\sum_{\ell=0}^{m} \alpha_{n-2\ell}\, P^{n-2\ell}(s;t)\Big) = \Delta_x \alpha_{n-2m} \cdot P^{n-2m}(s;t)$$

si les fonctions α_k vérifient des équations de transport :

$$(2.8) \qquad \begin{aligned} T_n \alpha_n &= 0 \\ T_k \alpha_k &= -\frac{1}{2\pi s} \cdot \Delta_x \alpha_{k+2} \end{aligned} \qquad \text{dans } \Omega^y_\varkappa$$

où T_k est l'opérateur du 1er ordre :

$$(2.9) \qquad T_k(D) = 2\nabla_x s \cdot \nabla_x - \Big(\Delta_x + \frac{k-1}{s}\Big)$$

Nous verrons au § III qu'en imposant aux α_k les conditions aux limites :

$$(2.10) \qquad \begin{aligned} \alpha_n(x,y) + 1 &= 0 \\ \alpha_k(x,y) &= 0 \end{aligned} \qquad x \in \Gamma^y_K$$

nous déterminons uniquement, de manière C^∞ , les α_k dans $\underline{\Omega}^y_\varkappa$.

Nous allons maintenant définir <u>globalement</u> (en x) les termes au second membre de (2.6) sous le temps $t < \varkappa\delta_y^{1/2}$, sans introduire <u>de singularités</u> en x.

Pour $y \in \Omega_o$, notons dans $\bar{\Omega} \times]-\infty , \varkappa\delta_y^{1/2}[$:

$$R^k(x,t,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \bar{\Omega} - \underline{\Omega}^y_K \\ \alpha_k(x,y)\, P^k(s(x,y);t) & \text{si } x \in \underline{\Omega}^y_K \end{cases}$$

et on vérifie, que pour toute fonction test φ à support dans $]-\infty, \varkappa\delta_y^{1/2}[$, la fonction (en x) $x \mapsto \int R^k(x,t,y)\varphi(t)dt$ est C^∞ dans $\bar{\Omega}$.

Si nous choisissons

$$(2.11) \qquad m = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ impair} \\ n+1 & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$$

et en notant :

$$(2.12) \qquad R(x,t,y) = F(x,t,y) - (F^n(x,t,y) + \sum_{\ell=o}^{m} R^{n-2\ell}(x,t,y))$$

nous verrons que le noyau $R(x,t,y)$, appelé <u>noyau compensateur</u>, a la régularité (en x,t) :

$$(2.13) \qquad R(x,t,y) \in H_{t,x}^{\nu+1,\nu+1}(]0,\varkappa\,\delta_y^{1/2}[\times\Omega)$$

avec

$$(2.14) \qquad \nu+1 > \frac{n}{2} .$$

(au second membre de (2.12), $H_{t,x}^{k,h}\,(]0,T[\times\Omega)$ sont des espaces de Sobolev définis dans Lions-Magenes [5]).

III. <u>Intégration des termes de transport et noyau compensateur</u>.

1. <u>Termes de transport</u>

On peut toujours supposer que $(x_1,\dots,x_n)$ est un système de coordonnées orthogonales locales de Ω_o tel que

$$\Gamma_o = \{x_n = f(x')\ ;x' = (x_1,\dots,x_{n-1})\}$$

Pour y fixé dans Ω_o, soit x le point de réflexion du rayon réfléchi issu de y et joignant $x = (x',x_n)$. Soit $(t',f(t'))$ les coordonnées de $\bar{x}$.

Il est clair que la correspondance $(x',x_n) \mapsto (t',s)$ (où s est la longueur du rayon réfléchi) est un difféomorphisme C^∞ et le système (t',s) est un système de coordonnées locales pour $\Omega_\varkappa^y$.

Soit

$$g = \det \frac{\partial(x',x_n)}{\partial(t',s)}$$

Il est connu en optique géométrique (voir R. Seeley [6] pour $n = 3$) que $\Delta_x s$ s'écrit dans les coordonnées (t',s) :

$$\Delta_x s = -g^{-1}\frac{\partial g}{\partial s}$$

L'opérateur de transport T_k s'écrit alors dans ces coordonnées :

$$T_k\alpha = 2\,g^{-1/2} s^{\frac{k-1}{2}} \frac{\partial}{\partial s}\left(g^{1/2} s^{-\frac{k-1}{2}} \alpha\right) \tag{3.1}$$

Grâce à (3.1), les équations de transport (2.8) (2.10) s'intègrent explicitement; nous obtenons pour α_n par exemple :

$$\alpha_n = -\left(\frac{g(t',r)}{g(t',s)}\right)^{1/2} \left(\frac{r}{s}\right)^{-\frac{n-1}{2}}$$

où $r = |\bar{x}-y|$. On obtient alors le :

<u>Lemme 3.1</u> : Il existe $C > 0$ telle que l'on ait :

$$|\alpha_n(x,y) + 1| \leq C\,\delta_y$$

$$|\alpha_k(x,y)| \leq C\,\delta_y \qquad \varkappa = n-2,\dots,n-2m$$

pour tout $y \in \Omega_o$, $x \in \Omega^y_\varkappa$ tel que $s(x,y) \sim \delta_y$.

2. <u>Noyau compensateur</u>

Le noyau compensateur défini en (2.12) est nul sous le temps $t < 0$ et dans le cylindre $]0, \varkappa\, \delta_y^{1/2}[\times \Omega$, il est solution du problème mixte de l'équation des ondes :

$$\begin{cases} (\partial_t^2 + \Delta_x) R = h \\ R|_{\partial\Omega} = 0 \qquad R(x,0,y) = 0 \qquad \partial_t R(x,0,y) = 0 \end{cases}$$

avec :

$$h = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \underline{\Omega}^y_\varkappa \\ -\Delta_x \alpha_{n-2m}\; P^{n-2m}(s;t) & \text{si } x \in \Omega^y_\varkappa \end{cases}$$

et il est facile de vérifier que :

$$h \in H^{\nu,\nu-1}_{t,x}(]0,\varkappa\, \delta_y^{1/2}[\times \Omega$$

$$\partial_t^j h(0,x) = 0 \qquad 0 \leq j \leq \nu-1$$

avec $\nu = \frac{n-1}{2}$ si n impair et $\frac{n}{2}$ si n pair .

Les résultats de régularité de Lions-Magenès [5] prouvent alors (2.13). Nous avons besoin des estimations a priori, sur la solution R, <u>indépendantes</u> de y. C'est le :

<u>Lemme 3.2</u> : Il existe $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$ et $C > 0$ telle que :

$$\int_0^{\varkappa \delta_y^\alpha} \|R(\cdot,\tau,y)\|_{\nu+1,\,\Omega}\, d\tau \leq C$$

pour tout $y \in \Omega_0$.

IV. <u>Comportemant asymptotique de la fonction spectrale et des valeurs propres</u> .

En vertu de (2.2) et (2.12), nous avons, pour $y \in \Omega_0$:

(4.1) $$H(x,t,y) = H^n(x,t,y) + \sum_{\ell=0}^{m} S^{n-2\ell}(x,t,y) + S(x,t,y)$$

$$(t,x) \in]-\varkappa\delta_y^{1/2}, \varkappa\delta_y^{1/2}[\times \Omega$$

si nous posons :

$$S^k(x,t,y) = R^k(x,t,y) + R^k(x,-t,y) ; S(x,t,y) = R(x,t,y) + R(x,-t,y)$$

Soit $\rho \in \mathcal{S}$ telle que :

$\mathcal{S} \geq 0$, paire, $\rho(\tau) > 0$ si $|\tau| \leq 1$; $\rho(0) = 1$, $\rho(t) = 0$ si $|t| \geq 1$

$\hat{\rho}$ étant la transformée de Fourier de ρ .

Posons, pour $\varepsilon > 0$:

$$\hat{\rho}_\varepsilon(t) = \hat{\rho}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) ; \rho^\varepsilon(\tau) = \varepsilon\rho(\varepsilon\tau)$$

En vertu du lemme 3.2, prenons :

$$\varepsilon = \varkappa\, \delta_y^\alpha$$

En multipliant (4.1) par $\hat{\rho}_\varepsilon$, nous obtenons en vertu de (2.1), l'égalité (écrite sur la diagonale) :

(4.2) $$\frac{1}{2}\rho^\varepsilon * dm(y,y,\cdot) = \frac{1}{2}\rho^\varepsilon * dm^n(y,y,\cdot) + \sum_{\ell=o}^{m} \rho^\varepsilon * \mathcal{F}^{-1}(S^{n-2\ell}(y,\cdot,y)) + \mathcal{F}^{-1}(\hat{\rho}_\varepsilon S(y,\cdot,y))$$

où on a posé :

$$m(y,y,\tau) = e(y,y,|\tau|^2)\operatorname{sgn}\tau$$

$$m^n(y,y,\tau) = (2\pi)^{-n}\omega_n|\tau|^n \operatorname{sgn}\tau$$

On a :

$$2\mathcal{F}^{-1}(S^n(y,\cdot,y)(\tau) = (2\pi)^{-n}\omega_n \frac{n|\tau|^{n-1}}{\mathcal{J}_{\frac{n}{2}-1}(0)} \mathcal{J}_{\frac{n}{2}-1}(2\delta_y\tau)\alpha_n(y,y)$$

On utilise ensuite le lemme 3.1 pour étudier la somme $\sum_{\ell=0}^{m}$ figurant au second membre de (4.2), le lemme 3.2 et (2.14) pour majorer le dernier terme. Alors (4.2) permet de prouver le résultat crucial :

<u>Théorème 4.1</u> : Il existe δ_o vérifiant $0<\delta_o \leq 1$, α vérifiant $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$ et une constante $C > 0$ telle que :

$$|e(y,y,\tau^2) - (2\pi)^{-n}\omega_n\tau^n + (2\pi)^{-n}\frac{\omega_n}{\mathcal{J}_{\frac{n}{2}-1}(0)}\int_o^\tau \mathcal{J}_{\frac{n}{2}-1}(2d_y\sigma)\,d\sigma^n|$$

$$\leq C[\delta_y^{-\alpha}\tau^{n-1} + \delta_y^{-n\alpha} + \delta_y^{-\frac{n+1}{2}}\tau^{\frac{n-3}{2}}(\delta_y^{-\alpha}+\tau)]$$

pour $\tau \geq 1$, $y \in \Omega$ tel que $\delta_y \leq \delta_o$ |

<u>Remarque</u> : Lorsque la dimension $n=1$, (4.3) est amélioré par :

$$|e(y,y,\tau^2) - \frac{\tau}{\pi} + \frac{1}{\pi}\frac{\sin 2\delta_y\tau}{2\delta_y}| \leq C\delta_y^{-\alpha}$$

Le théorème (4.1) permet de prouver le :

<u>Théorème 4.2</u> : Pour $n \geq 1$, nous avons :

$$N(\lambda) = (2\pi)^{-n} \omega_n |\Omega| \lambda^{\frac{n}{2}} + O(\lambda^{\frac{n-1}{2}}) \qquad \lambda \to \infty$$

---

[1] V. M. Babic, B. M. Levitan : The focussing problem and the asymptotic behaviour of the spectral function of the Laplace-Beltrami operator. Soviet Math. Dokl. 17 (1976), p.1414-1417.

[2] J. Brüning : Zur Abschätzung der Spektral function elliptischer Operatoren. Math. Z, 137, (1974), p.75-85.

[3] L. Hörmander : The spectral function of an elliptic operator Acta Math. 121 (1968), p.193-218.

[4] B. M. Levitan : On the asymptotic behaviour of the spectral function of a self adjoint differential equation of second order. Izv. Akad. Nauk. SSSR. Serie Math. 16 (1952) p.325-352.

[5] J. L. Lions, E. Magenes : Problèmes aux limites non homogènes Vol.2, Dunod Editeur, Paris (1968).

[6] R. Seeley : A sharp asymptotic remainder estimate for the eigenvalues of the Laplacian in a domain of $\mathbb{R}^3$. Advances in Math. 29 (1978), p.244-269.

[7] Pham The Lai : Article à paraître.

***