Pierre Schapira

Conditions de positivité dans une variété symplectique complexe. Applications à l'étude de l'hypoellipticité analytique

Journées Équations aux dérivées partielles (1979), p. 1-6
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1979____A5_0>

Conférence n° 5

CONDITIONS DE POSITIVITE DANS UNE VARIETE SYMPLECTIQUE COMPLEXE. APPLICATIONS A L'ETUDE DE L'HYPOELLIPTICITE ANALYTIQUE.

(Résumé)

par P. SCHAPIRA

§ 1. Soit X une variété analytique complexe, $\mathcal{O}_X$ le faisceau des fonctions holomorphes sur X. Soit T^*X le fibré cotangent à X, ω la 1-forme canonique sur T^*X, $\mathcal{E}_X$ le faisceau sur T^*X des opérateurs micro-différentiels d'ordre fini (cf.[10]). Nous notons π la projection de T^*X sur X et nous désignons par $\dot{T}^*X$ l'espace T^*X privé de la section nulle. Nous dirons qu'une partie Λ de T^*X est conique (resp. $\mathbb{C}$-conique) si $(z,\zeta) \in \Lambda$ entraîne $(z,k\zeta) \in \Lambda$, pour k réel positif (resp. pour $k \in \mathbb{C}^*$). On note $\hat{\Lambda}$ l'enveloppe $\mathbb{C}$-conique d'une partie conique Λ.

__Définition 1__ : Soit Λ une sous-variété analytique réelle conique de T^*X. Nous dirons que Λ est $\mathbb{R}$-lagrangienne si Λ est lagrangienne pour la 2-forme $\mathrm{Re}\, d\omega$. Nous dirons que Λ est I-symplectique si Λ est symplectique pour $\mathrm{Im}\, d\omega$.

Si Λ est $\mathbb{R}$-lagrangienne et I-symplectique $\frac{1}{i}\omega$ définit une structure symplectique homogène réelle sur Λ, et (T^*X,ω) s'identifie à un complexifié de $(\Lambda, \frac{1}{i}\omega|_\Lambda)$.

__Exemple 1__ : Soit M une variété analytique réelle de complexifié X. Alors T^*_MX le fibré conormal à M dans X est $\mathbb{R}$-lagrangien et I-symplectique. L'espace T^*_MX est muni du faisceau $\mathcal{C}_M$ des microfonctions de M. Sato (cf.[10]). C'est un faisceau de $\mathcal{E}_X|_{T^*_MX}$-modules .

__Exemple 2__ : Soit Y une hypersurface analytique réelle de X, définie par une équation réelle $f = 0$. Si la forme de Levi de f est non dégénérée sur Y, l'espace $\dot{T}^*_YX$ est $\mathbb{R}$-lagrangien et I-symplectique.

Dans la situation de l'exemple 2, si Ω est un ouvert de X, de frontière $\partial\Omega = Y$, Ω étant définie par l'inéquation $f < 0$, nous noterons $\partial\Omega^+$ la partie de $\dot{T}^*_{\partial\Omega}X$ définie par :

$$\partial\Omega^+ = \{(z,\zeta) \in T^*X \; ; \; f(z) = 0, \; \zeta = k\partial' f(z) ; k \in \mathbb{R}^*_+\}$$

(∂' désigne la différentielle holomorphe sur X). Nous ne considèrerons que le cas où l'ouvert Ω est strictement pseudo-convexe . Nous notons alors $\mathcal{O}^+$ le faisceau sur $\partial\Omega$ des valeurs au bord de fonctions holomorphes de Ω : si i désigne l'injection de Ω dans X,

$$\mathcal{O}^+ = (i_*\mathcal{O}_X)/\mathcal{O}_X|_{\partial\Omega}$$

En fait on considère $\mathcal{O}^+$ comme un faisceau sur $\partial\Omega^+$, localement constant sur les orbites de l'action de $\mathbb{R}^*_+$. Ce faisceau est alors naturellement muni d'une structure de $\mathcal{E}_X|\partial\Omega^+$-module (cf.[9]).

Soit Φ une transformation canonique complexe homogène définie sur un ouvert $\mathcal{U}$ de T^*X, qui échange T^*_MX et $\partial\Omega^+$. On peut alors (localement) quantifier Φ en un isomorphe $\hat{\Phi}$ de $\mathcal{C}_M$ sur $\mathcal{O}^+$, isomorphisme compatible à l'action des opérateurs micro-différentiels sur $\mathcal{C}_M$ et sur $\mathcal{O}^+$ (cf. M. Kashiwara [6], M. Kashiwara et T. Kawai [7] ou encore L. Boutet de Monvel [3] dans un contexte un peu différent).

§ 2. Rappelons la définition de A. Melin et J. Sjöstrand de la positivité([4], [5]). Soit tout d'abord V une variété analytique réelle, W un complexifié de V, ν "l'application" de W dans TV qui, dans une carte locale réelle sur V, à $z \in W$ associe $(\mathrm{Re}\, z, \mathrm{Im}\, z) \in TV$. Si α est une 1-forme sur V, la fonction $z \to \langle\alpha, \nu(z)\rangle$ est bien définie (indépendamment du choix d'une carte) modulo $I_3(V)$, l'espace des fonctions nulles à l'ordre 3 sur V.

<u>Définition 2</u> [5] : Soit Λ_o une variété analytique réelle conique de T^*X, $\mathbb{R}$-lagrangienne et I-symplectique. Soit Λ une partie conique de T^*X, et p un point de Λ_o. On dit que (Λ_o,Λ) est positif en p si pour $(z,\zeta) \in \Lambda$ on a dans un voisinage de p :

$$-\frac{1}{i} \langle \omega, \nu(z,\zeta) \rangle \geq 0 \quad \mathrm{mod}\ I_3(\Lambda_o) .$$

Dans un système de coordonnées locales symplectiques sur T^*X, ces coordonnées étant réelles sur Λ_o, cette condition s'exprime aussi par :

$$-\langle \mathrm{Im}\, z, \mathrm{Re}\, \zeta\rangle \geq -C(|\mathrm{Im}\, z| + |\mathrm{Im}\, \zeta|)^3$$

pour $(z,\zeta) \in \Lambda$ au voisinage de p, et pour une constante $C > 0$.

On démontre alors :

Théorème 1 : Soit Ω un ouvert strictement pseudo-convexe de X, de frontière analytique réelle $\partial\Omega$, et soit $\partial\Omega^+$ la partie de $T^*_{\partial\Omega}X$ définie plus haut. Soit $p \in \partial\Omega^+$, Λ une partie $\mathbb{C}$-conique de T^*X. On suppose $(\partial\Omega^+, \Lambda)$ positif en p. Alors il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de p dans T^*X tel que :

$$\pi(\mathcal{U} \cap \Lambda) \cap \Omega = \emptyset$$

On peut donner une réciproque à ce théorème si l'on suppose que Λ est le fibré conormal à une hypersurface analytique complexe de X.
On peut supposer seulement Λ conique (i.e. : $\mathbb{R}^*_+$- conique) si Λ est le fibré conormal à une hypersurface réelle S de classe C^2, et si $\hat{\Lambda} \cap \partial\Omega^+ = \Lambda \cap \partial\Omega^+$.

§ 3. Soit P un opérateur micro-différentiel défini au voisinage d'un point $p \in T^*X$. Soit $\sigma(P)$ son symbole principal. Soit L une variété analytique complexe conique involutive de T^*X. Rappelons [2] (cf. aussi [8]) que l'on dit qu'un vecteur $\theta \in T_pT^*X$ est non micro-caractéristique pour P sur L, si, m étant l'ordre d'annulation de $\sigma(P)$ sur L, $\sigma(P)$ s'annule exactement à l'ordre m sur L dans la direction θ.

Théorème 2 : Soit M une variété analytique réelle de complexifié X, p un point de $\dot{T}^*_MX$, P un opérateur micro-différentiel au voisinage de p. On suppose qu'il existe une variété lagrangienne complexe conique L de T^*X (au voisinage de p) telle que :

i) $p \in L$ et (T^*_MX, L) est positif en p

ii) $\sigma(P)(p) = 0$, et il existe un vecteur $\theta \in T_pT^*X$, avec $\langle\omega,\theta\rangle = 0$ θ étant non micro-caractéristique pour P sur L.

Alors il existe une microfonction $u \in \mathcal{C}_M$, définie au voisinage de p, solution de l'équation $Pu = 0$, et de support $T^*_MX \cap L$.

Pour la démonstration, on utilise une transformation canonique complexe qui échange T^*_MX avec un fibré $\partial\Omega^+$, pour un ouvert strictement pseudo-convexe Ω, et L avec T^*_YX, Y désignant une hypersurface complexe de

X. L'hypothèse de positivité entraîne $Y \cap \Omega = \emptyset$, et il reste à construire des solutions holomorphes ramifiées sur Y, mais non holomorphes, de l'équation $Pu = 0$, ce qui est possible par [8]. Quand P est à caractéristiques complexes simples, J. Sjöstrand [12] a construit (sous les hypothèses adéquates) à l'aide de variétés lagrangiennes positives, des solutions de l'équation $Pu = 0$ dont le support est exactement une courbe ou une feuille bicaractéristique. Dans le cas différentiel M. S. Baouendi, F. Treves, E. C. Zachmanoglou [1] ont donné des conditions suffisantes pour l'existence de fonctions de type positif (au sens de [10]) solutions de l'équation caractéristique, donc pour l'existence de variétés lagrangiennes positives contenues dans la variété caractéristique de P, et ont construit ainsi des solutions non triviales de l'équation $Pu = 0$.

Si Λ_1 est un germe de variété analytique réelle conique $\mathbb{R}$-lagrangienne et I-symplectique, nous appellerons par abus de langage, faisceau $\mathcal{C}_{\Lambda_1}$ un faisceau sur Λ_1 obtenu par transformation canonique à partir du faisceau $\mathcal{C}_M$ sur $T^*_M X$, (ce faisceau n'est donc défini qu'à un isomorphisme de $\mathcal{E}_X$-module près, ce qui n'importe pas pour la suite).

<u>Théorème 3</u> : Soit Λ_1 une variété analytique réelle conique $\mathbb{R}$- lagrangienne et I-symplectique, au voisinage de $p \in \dot{T}^*_M X$. On suppose :

i) $(\Lambda_1, T^*_M X)$ positif en p, et $\hat{\Lambda}_1 \cap T^*_M X = \Lambda_1 \cap T^*_M X$.

ii) $T_p(T^*_M X) \cap T_p \Lambda_1$ de codimension inférieure ou égale à 1 dans $T_p \Lambda_1$.

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{E}_X$-module cohérent au voisinage de p. On suppose

iii) $(\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \Gamma_{(\Lambda_1 \cap T^*_M X)}(\mathcal{C}_{\Lambda_1})))_p = 0$.

Alors $(\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{C}_M))_p = 0$.

Autrement dit si dans Λ_1, les solutions du système $\mathcal{M}$ à support dans $\Lambda_1 \cap T^*_M X$, sont nulles, le système est hypoelliptique analytique dans $T^*_M X$ aux points de $\Lambda_1 \cap T^*_M X$. La démonstration consiste à faire une transformation canonique complexe qui échange simultanément $T^*_M X$ et Λ_1 en $\partial\Omega_0^+$ et $\partial\Omega_1^+$, où Ω_0 et Ω_1 sont deux ouverts strictement pseudo-convexes (ceci grâce à l'hypothèse ii). L'hypothèse i) entraîne l'inclusion $\Omega_1 \subset \Omega_0$, d'où, en notant $\mathcal{O}_0^+$(resp. $\mathcal{O}_1^+$) le faisceau sur $\partial\Omega_0^+$(resp. $\partial\Omega_1^+$) défini plus haut, un morphisme injectif de $\mathcal{E}_X$-modules :

$$\mathcal{O}_0^+|_{\partial\Omega_0 \cap \partial\Omega_1} \to \Gamma_{(\partial\Omega_0 \cap \partial\Omega_1)}(\mathcal{O}_1^+) .$$

On peut utiliser les résultats de [9] pour vérifier la condition iii).

Un exemple : (Opérateurs de Lewy-Mizohata généralisés).
Plaçons-nous dans $T^*(\mathbb{C}^n)$ muni des coordonnées (z,ζ), $z=(z_1,\ldots,z_n)$, $\zeta=(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)=(\zeta_1,\zeta'',\zeta_n)$, et soit P un opérateur micro-différentiel d'ordre m, dont le symbole principal s'écrit :

$$P_m(z,\zeta) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(z,\zeta)(\zeta_1+iz_1^k\zeta_n)^{\alpha_1}(\zeta'')^{\alpha''}((z_n-\frac{i}{k+1}z_1^{k+1})\zeta_n)^{\alpha_n}$$

où les a_α sont des symboles d'ordre 0, avec $a_{(m,0\ldots0)}\equiv 1$, et k est un entier impair.

a) Soit $p^-=(0;0,\ldots,-i)\in T^*_{\mathbb{R}^n}\mathbb{C}^n$. Alors l'opérateur P n'est pas hypoelliptique analytique en p^- (il existe des micro-fonctions non nulles au voisinage de p^- solutions de $Pu=0$) : cela résulte immédiatement du théorème 2.

b) Soit $p^+=(0;0,\ldots,i)\in T^*_{\mathbb{R}^n}(\mathbb{C}^n)$. L'opérateur P est hypoelliptique analytique en p^+ (autrement dit c'est un morphisme injectif de $(\mathcal{C}_{\mathbb{R}^n})_{p^+}$ dans lui-même). Pour appliquer le théorème 3 on appelle Λ_1 la variété déduite de $T^*_{\mathbb{R}^n}\mathbb{C}^n$ par la transformation canonique associée à $\langle z,\theta\rangle + i\frac{z_1^{k+1}}{k+1}\theta_n$.
On est ramené à vérifier que si l'opérateur Q a pour symbole principal

$$Q_m(z,\zeta) = \sum_{|\alpha|=m} b_\alpha(z,\zeta)(\zeta')^{\alpha'}(z_n\zeta_n)^{\alpha_n}$$

avec $\zeta=(\zeta',\zeta_n)$, b_α symboles d'ordre 0, $b_{(m,0,\ldots,0)}\equiv 1$, les micro-fonctions sur $\mathbb{R}^n$, définies au voisinage de p^+ et à support dans l'hypersurface N d'équation $\{x_1=0\}$ sont nulles. Cela résulte du théorème 2.2 de [11].

c) En fait le théorème 2.2 de [11] est plus précis. Si u est une micro-fonction sur $\mathbb{R}^n$ à support dans N (au voisinage de p^+) et si les (v_j) $(j=0,\ldots,m-1)$ sont des microfonctions de la variété N, l'équation :

$$Qu + \sum_{j=o}^{m-1} v_j \otimes \delta_N^j = 0$$

entraîne $u=0$. On en conclut faiclement que l'opérateur P n'est pas résoluble dans les microfonctions au point p^+ (ce n'est pas un morphisme surjectif de $(\mathcal{C}_{\mathbb{R}^n})_{p^+}$).

Nous avons eu plusieurs discussions fructueuses avec J. Sjöstrand. Nous sommes heureux de l'en remercier ici.

---

[1] M. S. Baouendi, F. Treves, E. C. Zachmanoglou : Flat solutions and singular solutions of homogeneous linear partial differential equations with analytic coefficients. Duke Math. J. (1979), à paraître.

[2] J. M. Bony : Sem. Goulaouic-Schwartz 1975-76, exposé 17.

[3] L. Boutet de Monvel : Convergence dans le domaine complexe des séries de fonctions propres. C. R. Acad. Sc. Paris, t.287 (1978) 855-856.

[4] A. Melin, J. Sjöstrand : Fourier integral operators with complex valued phase functions. Lecture Notes in Math. 459 Springer (1975) 120-223.

[5] A. Melin, J. Sjöstrand : Fourier integral operator with complex phase functions and parametrix for an interior boundary value problem. Comm. in Partial Diff. Eq. 1 (1976), 313-400.

[6] M. Kashiwara : Exposés à l'Université Paris-Nord (1976) non publiés.

[7] M. Kashiwara, T. Kawai : Seminar on linear P. D. E., Princeton 1977, à paraître.

[8] M. Kashiwara, P. Schapira : Problème de Cauchy pour les systèmes microdifférentiels dans le domaine complexe. Inventiones Math. 46 (1978), 17-38.

[9] M. Kashiwara, P. Schapira : Micro-hyperbolic systems. Acta Mathematica 142 (1979), 1-55.

[10] M. Sato, T. Kawai, M. Kashiwara : Hyperfunctions and pseudodifferential equations. Lecture Notes in Math. 287, Springer (1973), 265-529.

[11] P. Schapira : Propagation au bord et réflexion des singularités analytiques des solutions des équations aux dérivées partielles II. Sem. Goulaouic-Schwartz (1976-77), exposé 9.

[12] J. Sjöstrand : Applications of Fourier distributions with complex phase functions. Lecture Notes in Math. 459 Springer (1975), 255-282.

*
* *
*