JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

YVES LAURENT

Double microlocalisation et problème de Cauchy dans le domaine complexe

Journées Équations aux dérivées partielles (1979), p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1979____A11_0>

Conférence n° 11

DOUBLE MICROLOCALISATION ET PROBLEME DE CAUCHY DANS LE DOMAINE COMPLEXE

par Y. LAURENT

Introduction

La notion de vecteur microcaractéristique le long d'une variété involutive a été définie pour un opérateur microdifférentiel (= pseudo-différentiel) par Bony [1] puis pour un système par Kashiwara-Schapira [7].

Nous nous proposons de définir un faisceau d'anneaux qui contienne les opérateurs microdifférentiels et dans lequel les opérateurs non microcaractéristiques dans certaines directions soient inversibles. (De manière analogue, les opérateurs microdifférentiels forment un faisceau d'anneaux qui contient les opérateurs différentiels analytiques et dans lequel les opérateurs non caractéristiques dans certaines directions sont inversibles).

Cette construction permet de donner une nouvelle définition de la notion de vecteur non microcaractéristique pour un système.

Nous définirons ensuite la "condition de Lévi" pour un système et aussi une condition de Lévi imparfaite que nous nommerons "irrégularité de type λ" ($\lambda \in [0,1[$).

La condition de Lévi pour un système a été définie simultanément et d'une manière tout à fait différente (à l'aide d'une graduation) par Teresa Monteiro-Fernandes [8].

§ 1. Opérateurs 2-microdifférentiels

Soit X une variété analytique complexe, T*X son fibré cotangent et Λ une sous-variété involutive de T*X.

Nous supposons que Λ est "maximalement dégénérée" (c'est-à-dire que l'ensemble des points de Λ où la 1-forme canonique s'annule est une variété lagrangienne lisse) ou que Λ est régulière. Dans ces cas on peut se ramener par une transformation canonique ([9]) à

$$\Lambda = \{(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) \in T^*X / \xi = 0 \ , \ z = 0\}$$

Dans toute la suite, nous supposerons fixées des coordonnées locales de X dans lesquelles Λ à la forme ci-dessus et nous n'envisagerons pas ici le problème des changements de variables (les faisceaux que nous pouvons construire avec des coordonnées simplectiques différentes de Λ sont isomorphes -au moins localement- et donc les définitions de microcaractéricité et de condition de Lévi ne dépendront que de Λ).

Nous considérons le fibré normal $T_\Lambda(T^*X)$ muni des coordonnées $(x,y,\eta,\zeta;\rho,\theta)$ (ρ correspond à $\frac{\partial}{\partial z}$ et θ à $\frac{\partial}{\partial \xi}$).

<u>Définition 1.1</u> : Soit U un ouvert de $T_\Lambda(T^*X)$. Un opérateur 2-microdifférentiel sur U est une série formelle

$$P = \sum_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2} P_{ij}(x,y,\eta,\zeta;\rho,\theta)$$

où P_{ij} est une fonction holomorphe sur U homogène de degré i en (η,ζ,θ) et de degré j en (ρ,θ) avec les majorations suivantes :

$$\forall K \text{ compact de } U, \quad \exists C > 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists C_\varepsilon > 0$$

tels que (en posant $k = i - j$)

(i) $\quad \forall k<0,\ \forall j<0 \quad \sup_K |P_{k+j,j}| \le C^{-k-j}(-k)!(-j)!$

(ii) $\quad \forall k<0,\ \forall j\ge 0 \quad \sup_K |P_{k+j,j}| \le C_\varepsilon^{-k}\,\varepsilon^j\,(-k)!/j!$

(iii) $\quad \forall k\ge 0,\ \forall j<0 \quad \sup_K |P_{k+j,j}| \le C_\varepsilon\,\varepsilon^k\,C^{-j}(-j)!/k!$

(iv) $\quad \forall k\ge 0,\ \forall j\ge 0 \quad \sup_K |P_{k+j,j}| \le C_\varepsilon\,\varepsilon^{k+j}\,\frac{1}{k!j!}$

Nous noterons $\mathcal{E}_\Lambda^{2\infty}$ le faisceau des opérateurs 2-microdifférentiels sur $T_\Lambda(T^*X)$.

<u>Remarque</u> : $\mathcal{E}_\Lambda^{2\infty}$ peut être également défini par voie cohomologique par des méthodes analogues à celles de [10] pour définir les opérateurs microdifférentiels.

<u>Proposition 1.2</u> : La formule suivante définit une structure de faisceau d'anneaux sur $\mathcal{E}_\Lambda^{2\infty}$:

Si $P = \Sigma P_{ij}$ et $Q = \Sigma Q_{ij}$ on pose $R = P_\circ Q = \Sigma R_{ij}$

avec

$$R_{\lambda\mu}(x,y,\eta,\zeta;\rho,\theta) = \sum_{\substack{\lambda=i+k-(|\alpha|+|\beta|+|\gamma|)\\ \mu=j+\ell-|\alpha|-|\gamma|}} \frac{1}{\alpha!\beta!\gamma!} D^{\alpha}_{\rho} D^{\beta}_{\eta} D^{\gamma}_{\zeta} P_{ij} D^{\alpha}_{x} D^{\beta}_{y} D^{\gamma}_{\theta} Q_{k\ell}$$

Soit $\mathcal{E}^{\infty}_{X}$ le faisceau des opérateurs microdifférentiels sur X (cf. [10] où ce faisceau est noté $\mathcal{P}_X$ et où les opérateurs sont appelés pseudo-différentiels).

Soit $\pi : T_{\Lambda}(T^*X) \longrightarrow \Lambda$ la projection canonique.

Proposition 1.3 : On a une injection canonique de $\pi^{-1}(\mathcal{E}^{\infty}_{X}|_{\Lambda})$ dans $\mathcal{E}^{2\infty}_{\Lambda}$.

Démonstration : Soit P un opérateur de $\mathcal{E}^{\infty}_{X}$ défini au voisinage de Λ :

$$P = \sum_{i \in \mathbb{Z}} P_i(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)$$

où P_i est une fonction holomorphe homogène de degré i en (ξ,η,ζ) définie au voisinage de Λ avec sur tout compact les majorations suivantes :

$$\exists\, C > 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists C_{\varepsilon} > 0 \quad \text{tel que}$$

$$|P_i| \leq C_{\varepsilon}\, \varepsilon^{i}\, 1/i! \quad \text{si } i \geq 0 \text{ et } |P_i| \leq C^{-i}(-i)! \text{ si } i < 0 .$$

P_i se développe de manière unique en série de Taylor sous la forme

$$P_i(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} P_{i\alpha\beta}(x,y,\eta,\zeta) z^{\alpha} \xi^{\beta}$$

On définit alors l'image de P dans $\mathcal{E}^{2\infty}_{\Lambda}$ par :

$$P = \sum_{i \in \mathbb{Z},\, j \in \mathbb{N}} P_{ij}(x,y,\eta,\zeta,\rho,\theta) \quad \text{avec}$$

$$P_{ij}(x,y,\eta,\zeta,\rho,\theta) = \sum_{|\alpha|+|\beta|=j} P_{i\alpha\beta}(x,y,\eta,\zeta)\, \rho^{\alpha} \theta^{\beta} .$$

Nous nous intéressons plus particulièrement à certains sous-faisceaux de $\mathcal{E}^{2\infty}_{\Lambda}$:

1 Soit $(i_o,j_o) \in \mathbb{Z}^2$, $\mathcal{E}^2_\Lambda(i_o,j_o)$ est le sous-faisceau de $\mathcal{E}^{2\infty}_\Lambda$ des opérateurs $P = \sum_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2} P_{ij}$ tels que :

1) $P_{ij} \equiv 0$ si $i > i_o$ ou $i = i_o$ et $j < j_o$

2) $\forall i \ \exists J(i) \in \mathbb{Z}$ tel que $P_{ij} \equiv 0$ si $j < J(i)$

$\mathcal{E}^2_\Lambda = \bigcup_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2} \mathcal{E}^2_\Lambda(i,j)$ est le faisceau des opérateurs 2-microdifférentiels d'ordre <u>fini</u> . Si $P \in \mathcal{E}^2_\Lambda(i_o,j_o)$ et si $P_{i_o j_o} \not\equiv 0$ on pose $\sigma_\Lambda(P) = P_{i_o,j_o}$ ("symbole principal" de P) .

2 Soit $\lambda \in \mathbb{Q} \cap [0,1[$. $\mathcal{E}^2_\Lambda(\lambda;i_o,j_o)$ est le sous-faisceau de $\mathcal{E}^2_\Lambda$ des opérateurs $P = \Sigma P_{ij}$ tels que

1) $P_{ij} \equiv 0$ si $i > i_o$

2) $P_{ij} \equiv 0$ si $(i-j) + \lambda j > (i_o - j_o) + \lambda j_o$

$\mathcal{E}^2_\Lambda(\lambda) = \bigcup_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2} \mathcal{E}^2_\Lambda(\lambda;i,j)$ est le faisceau des opérateurs <u>2-microdifférentiels de type</u> λ.

Si $P \in \mathcal{E}^2_\Lambda(\lambda,i_o,j_o)$ et $P \notin \mathcal{E}^2_\Lambda(\lambda;i_o-1,j_o)$, $P \notin \mathcal{E}^2_\Lambda(\lambda,i_o,j_o-1)$ on pose

$$\sigma^\lambda_\Lambda(P) = P_{i_o,j_o} .$$

<u>Remarque</u> : On a toujours $\sigma^\lambda_\Lambda(P) = \sigma_\Lambda(P)$ ou $\sigma^\lambda_\Lambda(P) \equiv 0$. Remarquons dès à présent que si $P \in \mathcal{E}_X|_\Lambda$, P vérifie la condition de Lévi sur Λ si et seulement si $\sigma^o_\Lambda(P) \not\equiv 0$.

Si $P \in \mathcal{E}_X|_\Lambda$, $\sigma_\Lambda(P)$ n'est autre que $\sigma_\Lambda(\sigma(P))$ au sens de [7] tandis que $\sigma^o_\Lambda(P)$ est $\tilde{\sigma}_\Lambda(P)$ au sens de [8].

Les zéros de $\sigma_\Lambda(P)$ sont donc les directions microcaractéristiques de P le long de Λ au sens de [1] et [7] tandis que les zéros de $\sigma^o_\Lambda(P)$ sont les directions fortement microcaractéristiques au sens de [8].

Nous dirons que les zéros de $\sigma^\lambda_\Lambda(P)$ dans $T_\Lambda(T^*X)$ sont les directions "microcaractéristiques de type λ" de $P \in \mathcal{E}^2_\Lambda$.

<u>Théorème 1.4</u> : 1) Si U est un ouvert de $T_\Lambda(T^*X)$, P une section de $\mathcal{E}^2_\Lambda$ sur U et si $\sigma_\Lambda(P)$ ne s'annule pas sur U alors il existe $Q \in \mathcal{E}^2_\Lambda$ tel que $P_o Q = Q_o P = 1$.

2) Si P est une section de $\mathcal{E}^2_\Lambda(\lambda)$ sur U et si $\sigma^\lambda_\Lambda(P)$ ne s'annule pas sur U, il existe $Q \in \mathcal{E}^2_\Lambda(\lambda)$ tel que $P_o Q = Q_o P = 1$.

(Pour démontrer ce théorème on utilise une norme formelle calquée sur la norme de Boutet de Monvel-Krée).

<u>Proposition 1.5</u> : Les anneaux $\mathcal{E}^2_\Lambda$ et $\mathcal{E}^2_\Lambda(\lambda)$ sont cohérents et plats sur $\pi^{-1}(\mathcal{E}_X|_\Lambda)$.

§ 2. Condition de Lévi pour les modules d'opérateurs microdifférentiels

Rappelons que l'on peut considérer un système d'équations différentielles (respectivement microdifférentielles) comme un module cohérent sur l'anneau $\mathcal{D}$ des opérateurs différentiels (respectivement $\mathcal{E}$ des opérateurs microdifférentiels) (cf.par exemple [5]).

<u>Définition 2.1</u> : Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{E}_X$-module cohérent défini au voisinage de Λ et $\tau : T_\Lambda(T^*X) \longrightarrow \Lambda$ la projection canonique. On pose

$$SS^2_\Lambda(\mathcal{M}) = \mathrm{support}(\mathcal{E}^2_\Lambda \otimes_{\tau^{-1}\mathcal{E}_X|_\Lambda} \tau^{-1}\mathcal{M})$$

si $\lambda \in [0,1[\cap \mathbb{Q}$ $\quad SS^2_\Lambda(\lambda)(\mathcal{M}) = \mathrm{supp}(\mathcal{E}^2_\Lambda(\lambda) \otimes_{\tau^{-1}\mathcal{E}_X|_\Lambda} \tau^{-1}\mathcal{M})$

(Ce sont des sous-ensembles de $T_\Lambda(T^*X)$).

<u>Remarque</u> : $SS^2_\Lambda(\mathcal{M})$ est l'ensemble des vecteurs microcaractéristiques pour $\mathcal{M}$ le long de Λ au sens de [7] tandis que $SS^2_\Lambda(0)(\mathcal{M})$ est l'ensemble des vecteurs fortement microcaractéristiques au sens de [8].

Si $\lambda = 0$, le système vérifie la condition de Lévi si et seulement si $SS^2_\Lambda(\mathcal{M}) = SS^2_\Lambda(0)(\mathcal{M})$. (cf. [11] pour les matrices carrées).

Pour $\lambda \in]0,1[$, $SS^2_\Lambda(\lambda)(\mathcal{M})$ est lié à l'irrégularité de type Gevrey.

Signalons enfin qu'un système holonôme de variété caractéristique Λ est à points singuliers réguliers au sens [6] si et seulement si $SS^2_\Lambda(0)(\mathcal{M}) \subset \Lambda$. On peut donc définir l'irrégularité d'un $\mathcal{E}_X$-module holonôme comme le plus petit λ tel que $SS^2_\Lambda(\lambda)(\mathcal{M}) \subset \Lambda$. Dans le cas d'un espace $X = \mathbb{C}$ avec $\Lambda = T^*_{\{0\}}\mathbb{C}$, on retrouve l'irrégularité d'une équation différentielle au sens habituel.

§ 3. Propagations des singularités

Signalons simplement que le théorème 1.4 permet de démontrer que les solutions microfonctions d'un système partiellement elliptique ($SS^2_\Lambda(\mathcal{M}) \subset \Lambda$ au voisinage des points réels de $T_\Lambda(T^*X)$) sont les traces de microfonctions partiellement holomorphes, c'est-à-dire que l'on retrouve le résultat de Bony-Schapira [2].

§ 4. Problème de Cauchy dans le complexe

Soit $\Delta = T^*_X X \times X$, alors $T_\Delta(T^*X \times X) \approx T(T^*X)$ donc on peut définir :

<u>Définition 4.1</u> : Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux $\mathcal{E}_X$-modules cohérents, on dira que $\theta \in T(T^*X)$ est non microcaractéristique (de type λ) pour $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ si θ est non microcaractéristique (de type λ) pour $\mathcal{M} \hat{\otimes} \mathcal{N}$ sur Δ.

<u>Définition 4.2</u> : Une sous-variété Y de X sera dite non microcaractéristique (de type λ) pour $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ si pour toute $f \in \mathcal{O}_X$ telle que $f|_Y = 0$, H_f est non microcaractéristique (de type λ) pour $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$.

<u>Définition 4.3</u> : Soit $Y \subset X$ une sous-variété

$$\mathcal{E}_X^{(\lambda,Y)} = \{P = \sum_{j \in \mathbb{Z}} P_j(x,\xi) \in \mathcal{E}_X^\infty \;/\; \exists j_0 \;\; P_j(x,\xi)$$

$$\text{s'annule à l'ordre} \left[\frac{j_0 - j}{\lambda}\right] \text{ sur } (T^*X) \times_X Y\} .$$

Si $\lambda = 0$, $\mathcal{E}_X^{(0,Y)}$ n'est autre que le faisceau $\mathcal{E}_X$ des opérateurs microdifférentiels d'ordre fini.

Théorème 4.4 : Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux $\mathcal{D}_X$-modules cohérents, Y une sous-variété de X. On suppose Y non microcaractéristique (de type $\lambda \in [0,1[\cap \mathbb{Q}$) pour $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ au voisinage de $(T^*_X X)\times_Y Y$. Alors on a des isomorphismes :

$$1) \quad \mathcal{E}xt^j_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N}^\infty)|_Y \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}xt^j_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_Y, \mathcal{N}^\infty_Y) \quad \text{si } j \geq 0$$

$$2) \quad \mathcal{E}xt^j_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N}^{(\lambda,Y)})|_Y \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}xt^j_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_Y, \mathcal{N}_Y) \quad \text{si } j \geq 0$$

dans le cas non microcaractéristique de type λ.

On a posé : $\mathcal{N}^\infty = \mathcal{D}^\infty_X \otimes_\infty \mathcal{N}$ et $\mathcal{N}^{(\lambda,Y)} = \mathcal{D}^{(\lambda,Y)}_X \otimes_{\mathcal{D}} \mathcal{N}$

(donc $\mathcal{N}^{(o,Y)} = \mathcal{N}$).

$\mathcal{M}_Y$ désigne le module induit par $\mathcal{M}$ sur Y ([10][7]) . Ce théorème signifie que le problème de Cauchy est bien posé pour les couples $(\mathcal{M}, \mathcal{N}^\infty)$ ou $(\mathcal{M}, \mathcal{N}^{(\lambda,Y)})$.

En fait on a un théorème pour les $\mathcal{E}_X$-modules :

Soient $\rho : (T^*X) \times_X Y \longrightarrow T^*Y$

$\tilde{\varpi} : T^*X \times_X Y \longrightarrow T^*X$

et $d = \dim X - \dim Y$.

Théorème 4.5 : Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux $\mathcal{E}_X$-module cohérents définis au voisinage de $T^*X \times_X Y$ dans T^*X (Y sous-variété de X). Si Y est non microcaractéristique (de type λ) on a des isomorphismes :

$$\tilde{\varpi}^{-1}\mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N}^\infty) \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{E}_{X\leftarrow Y}) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\rho^{-1}\mathcal{E}_Y} (\mathcal{E}^\infty_{Y\to X} \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{N})[d]$$

ou dans le cas non microcaractéristique de type λ :

$$\tilde{\varpi}^{-1}\mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N}^{(\lambda,Y)}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{E}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{E}_{X\leftarrow Y}) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\rho^{-1}\mathcal{E}_Y} (\mathcal{E}_{Y\to X} \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{N})[d]$$

avec $\mathcal{N}^\infty = \mathcal{E}^\infty_X \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{N}$ et $\mathcal{N}^{(\lambda,Y)} = \mathcal{E}^{(\lambda,Y)}_X \otimes_{\mathcal{E}_X} \mathcal{N}$.

Ce théorème est démontré dans le cas d'ordre infini par Kashiwara-Schapira [7]. Dans le cas $\lambda = 0$, Teresa Monteiro-Fernandes a adapté la démonstration de Kashiwara-Schapira.

Notre démonstration est entièrement différente, elle repose sur des manipulations algébriques à partir de la définition 2.1. On utilise notamment la platitude de $\mathcal{E}^2_\Lambda$ sur $\pi^{-1}(\mathcal{E}_X|_\Lambda)$ et un théorème de compatibilité entre la dualité et la restriction des systèmes d'équations dans $\mathcal{E}^2_\Lambda$ (le théorème correspondant pour $\mathcal{E}_X$ est démontré dans [10]).

Suivant [7], on peut déduire du théorème 4.5 un théorème sur le problème de Cauchy dans les fonctions holomorphes ramifiées :

Si Z est une hypersurface lisse de X et φ une équation de Z on définit :

$$\mathcal{O}^1_{[Z|X]} = \mathcal{D}_X \operatorname{Log}\varphi$$

$$\mathcal{O}^1_{Z|X} = \mathcal{D}^\infty_X \operatorname{Log}\varphi \quad (= (\mathcal{O}^1_{[Z|X]})^\infty)$$

et si Y est une sous-variété de X transverse à Z on pose

$$\mathcal{O}^{1(\lambda,Y)}_{Z|X} = \mathcal{D}^{(\lambda,Y)}_X \operatorname{Log}\varphi .$$

$\mathcal{O}^{1(\lambda,Y)}_{Z|X}$ est le faisceau des fonctions holomorphes ramifiées autour de Z qui s'écrivent sous la forme

$$\sum_{j\geq o} a_j(x)(\varphi(x))^{-j} + b(x)\operatorname{Log}\varphi(x)$$

où $a_j(x)$ s'annule à l'ordre $\frac{j_o-j}{\lambda}$ sur Y.

Si $(Z_i)_{i=1,..,r}$ sont des hypersurfaces de X on définit $\sum_{i=1}^r \mathcal{O}^1_{Z_i|X}$ comme le conoyau de l'application :

$$\mathcal{O}^{r-1}_X \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}^1_{Z_i|X}$$

$$(f_1,\dots,f_{r-1}) \longmapsto (f_1,-f_1+f_2,\dots,-f_{r-1})$$

<u>Théorème 1.5</u> : Soit Y une sous-variété de X, Z une hypersurface de Y, $(Z_i)_{i=1,\dots r}$ des hypersurfaces de X transverses 2 à 2 et transverses à Y, telles que $Z_i \cap Y = Z$, $\forall i$.

Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module cohérent tel que

a) $SS\mathcal{M} \cap \rho^{-1}(T^*_Z Y) \subset \bigcup_i T^*_{Z_i} X \quad (\rho : (T^*X)\times_X Y \to T^*Y)$

b) Y est non microcaractéristique (de type λ) pour $\mathcal{M}$ sur $T^*_{Z_i}X - T^*_X X$ pour tout i .

Alors pour tout j on a des isomorphismes :

$$\mathcal{E}xt^j_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \sum_{i=1}^{r} \mathcal{O}^1_{Z_i|X})|_Z \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}xt^j_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_Y, \mathcal{O}^1_{Z|Y})|_Z$$

et si Y est non microcaractéristique de type λ :

$$\mathcal{E}xt^j_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \sum_{i=1}^{r} \mathcal{O}^{1(\lambda,Y)}_{Z_i|X})|_Z \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}xt^j_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_Y, \mathcal{O}^1_{[Z|Y]})|_Z$$

$$\left(\sum_{i=1}^{r} \mathcal{O}^{1(\lambda,Y)}_{Z_i|X} = \sum_{i=1}^{r} \mathcal{O}^1_{[Z_i|X]} \qquad \text{si } \lambda = 0 \right)$$

Pour $j = 0$, ce théorème signifie que le problème de Cauchy est bien posé pour les fonctions ramifiées autour de Z à singularités essentielles et que sous des hypothèses supplémentaires du type conditions de Lévi, si les données sont méromorphes, la solution est ramifiée mais la partie polaire est méromorphe. Sans la condition de Lévi la solution est dans un certain faisceau $\Sigma \mathcal{O}^{1(\lambda,Y)}_{Z_i|X}$ qui est un faisceau dont les traces sur Y sont dans $\mathcal{O}^1_{[Z|X]}$.

Le théorème 1.5 a été démontré (sous des hypothèses plus fortes) par Hamada-Leray-Wagschal [4] dans le cas $\lambda = 0$ ou dans le cas d'ordre ∞. (Voir [4] et [7] pour une bibliographie plus complète).

---

[1] J. M. Bony : Extension du théorème de Holmgren, Sem. Goulaouic-Schwartz 1975-76, exposé 17.

[2] J. M. Bony, P. Schapira : Propagation des singularités analytiques pour les solutions des équations aux dérivées partielles, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 26, 81-140 (1976).

[3] L. Boutet de Monvel, P. Krée : Ann. Inst. Fourier, Grenoble 17, 295-323 (1967).

[4] T. Hamada, J. Leray, C. Wagschal : Systèmes d'équations aux dérivées partielles à caractéristiques multiples : Problème de Cauchy ramifié, hyperbolicité partielle, J. Math. Pures et Appl. 55, 297-352 (1976).

[5] M. Kashiwara : Cours sur les systèmes d'équations microdifférentielles. Prépublications mathématiques de l'Université Paris-Nord, C. S. P. 1978.

[6] M. Kashiwara, Oshima : Systems of differential equations with régular singularities and their boundary value problems. Annals of Math., 106 (1977) 145-200.

[7] M. Kashiwara, P. Schapira : Problème de Cauchy pour les systèmes microdifférentiels dans le domaine complexe. Inventiones Math. 46, 17-38 (1978).

[8] T. Monteiro-Fernandes : Thèse de 3ème cycle à l'Université, Paris-Nord (1978).

[9] Oshima : Singularities in contact geometry and degenerate pseudo-differential equations. J. Fac. Sci. Univ. of Tokyo, Sec. IA, 21 (1974) 43-83.

[10] M. Sato, T. Kawai, M. Kashiwara : Hyperfunctions and pseudo-differential equations, Lecture Notes in Math. 287, Springer, 265-529 (1973).

[11] J. Vaillant, Sem. Goulaouic-Schwartz 1978-1979, exposé 11.

*
* *
*