JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

JOHANNES SJÖSTRAND

# Valeurs propres pour des opérateurs hypoelliptique

*Journées Équations aux dérivées partielles* (1978), p. 1-2
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1978____A2_0>

Conférence n° 2

# VALEURS PROPRES POUR DES OPERATEURS HYPOELLIPTIQUES

par J. SJÖSTRAND

Ceci est un travail en collaboration avec A. Menikoff. Soit X une variété $C^\infty$ compacte de dimension n, munie d'une densité $C^\infty$, strictement positive. Soit $P \in L_c^m(X)$, $m > 1$, de symbole principal $p \geq 0$. On suppose :

(1) P est formellement autoadjoint.

(2) $\Sigma = p^{-1}(0)$ est une sous-variété fermée de $T^*X\backslash 0$, de codimension d, et p s'annule d'ordre 2 exactement sur $\Sigma$.

Sur $\Sigma$ on définit le symbole sous-principal

$$S_P = p_{m-1}(x,\xi) - \frac{1}{2i}\sum \frac{\partial^2 p}{\partial x_j \partial \xi_j}$$

(où le symbole complet en coordonnées locales est $\sim p + p_{m-1} + p_{m-2} + \ldots$). Pour $\rho \in \Sigma$ on définie la matrice fondamentale

$$F_\rho : T_\rho(T^*X\backslash 0) \to T_\rho(T^*X\backslash 0)$$

par $\sigma(u, F_\rho v) = p''_\rho(u,v)$, $\forall n, v \in T_\rho(T^*X\backslash 0)$. Les valeurs propres non nulles de $F_\rho$ sont de la forme $\pm i\mu_1, \ldots, \pm i\mu_k$, $(\mu_j > 0,\ k = k(\rho))$. On pose $\widetilde{\mathrm{Tr}} = \sum_1^k \mu_j$. On suppose :

(3) $S_P + \frac{1}{2}\widetilde{\mathrm{Tr}} > 0$ sur $\Sigma$.

En utilisant des résultats de A. Melin, Boutet de Monvel-Grigis-Helffer, Hörmander, on montre facilement que P est autoadjoint dans $L^2$ avec domaine de définition $\{u \in L^2 \ ;\ Pu \in L^2\}$ et que le spectre de P est discret et borné inférieurement. Si $\theta = (\theta', \theta'')$ sont des coordonnées locales sur $T^*X\backslash 0$ telles que $\Sigma$ soit donnée par $\theta'' = 0$ et $d\theta = dx d\xi$, alors la densité $\omega'(d\theta') = \dfrac{d\theta'}{(\det p''_{\theta''\theta''})^{1/2}}$ sur $\Sigma$ ne dépend pas du choix de $\theta$. Si $md - 2n = 0$, cette densité est homogène de degré 0 et donne lieu à une densité invariante $\tilde{\omega}'(d\tilde{\theta}')$ sur l'image $\tilde{\Sigma}$ de $\Sigma$ dans $S^*X$.

Si $N(\lambda)$ est le nombre de valeurs propres de P qui sont $\leq \lambda$, nous avons le résultat suivant :

<u>Théorème</u> : 1) Si $md - 2n > 0$, alors

$$N(\lambda) = \frac{(1+o(1))}{(2\pi)^n} \iint_{p(x,\xi)\leq 1} dx d\xi . \lambda^{n/m} \quad , \quad \lambda \to \infty$$

2) Si $md - 2n = 0$, alors

$$N(\lambda) = \frac{(1+o(1)).\lambda^{n/m}\log\lambda}{(2\pi)^{n-d/2} m.(m-1)\Gamma(1+\frac{n}{m})} \int_{\tilde{\Sigma}} \tilde{\omega}'(d\tilde{\theta}') \quad , \quad \lambda \to \infty$$

3) Si $md - 2n < 0$ , alors

$$N(\lambda) = \frac{(1+o(1)).\lambda^{\frac{n-d/2}{m-1}}}{(2\pi)^{n-d/2}\Gamma(1+\frac{n-d/2}{m-1})} \int_{\Sigma} e^{-(\frac{1}{2}\tilde{Tr}+S_p)} \pi \frac{\mu_j}{(1-e^{-\mu_j})} \omega'(d\theta')$$

La démonstration est basée sur la formule :

$$tr(e^{-tP}) = \int e^{-t\lambda} d N(\lambda) .$$

Rappelons que le cas où $\Sigma$ est symplectique a été traité dans Menikoff-Sjöstrand "On the eigenvalues of a class of hypoelliptic operators". A paraître dans Math. Annalen.