JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

MICHEL LANGLAIS

Sous-solutions d'un problème unilatéral dégénéré

Journées Équations aux dérivées partielles (1978), p. 1

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1978____A18_0>

SOUS-SOLUTIONS D'UN PROBLEME UNILATERAL DEGENERE

par M. LANGLAIS

Le but de cet exposé est de définir une notion convenable de sous-solution pour les problèmes d'obstacles associés à des opérateurs différentiels dégénérés du type :

$$E = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial z_i^2} + \sum_{i=n+1}^{N} b_i(z) \frac{\partial}{\partial z_i} + \alpha .$$

Soit Q un ouvert de $\mathbb{R}^N$. On considère l'espace $\mathcal{V} = \{u \in L^2(Q), \frac{\partial u}{\partial z_i} \in L^2(Q) \quad 1 \le i \le n\}$; V(Q) est l'adhérence de $\mathcal{D}(Q)$ dans $\mathcal{V}$. On note par ∂Q_e la partie de ∂Q qui est non caractéristique et par ∂Q_- la partie de $\partial Q \backslash \partial Q_e$ où le champ de vecteurs $\Lambda = \sum_{i=n+1}^{N} b_i \frac{\partial}{\partial z_i}$ est rentrant. $L = E - \Lambda$.

On se donne une fonction φ mesurable sur Q, un élément f dans V'(Q) et un élément g de $L^2_e(\partial Q_-)$, i.e. $\int_{\partial Q_-} |\vec{\Lambda}\cdot\vec{\eta}| g^2 d\sigma < +\infty$

L'inéquation variationnelle associée à E et à l'obstacle φ n'admettant pas toujours de solution forte dans V(Q), on considère le problème affaibli :

$$(1) \quad \begin{cases} \text{trouver } u \in V(Q),\ u \le \varphi \ \text{ p.p.} Q\ ; \\ \forall v \in V(Q),\ \Lambda v \in V'(Q),\ v|_{\partial Q_-} \in L^2_e(\partial Q_-)\ ;\ v \le \varphi \text{ p.p. } Q : \\ ((Lu + \Lambda v - f,\ v - u)) + \frac{1}{2}\int_Q \operatorname{div} B.(v-u)^2 dt - \frac{1}{2}\int_{\partial Q_-} |\vec{\Lambda}\cdot\vec{\eta}| (g-v)^2 d\sigma \ge 0 . \end{cases}$$

Sous des hypothèses très générales, ce problème possède une solution maximale notée $\sigma(\varphi, f, g)$ qui est aussi la solution maximale de :

$$(2) \quad \begin{cases} \text{trouver } u \in \mathcal{V},\ u|_{\partial Q_e} \le 0\ ;\ u \le \varphi \text{ p.p. } Q \\ \forall\, w \in H^1(Q)\ ,\ w|_{\partial Q \backslash \partial Q_-} = 0\ ;\ w \ge 0 \text{ p.p. } Q \\ \int_Q [-\Lambda w - \operatorname{div} B\, w]\, u dz + \int_Q [\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial z_i}\frac{\partial w}{\partial z_i} + \alpha u w] dz \le ((f,w)) - \int_{\partial Q_-} |\vec{\Lambda}\cdot\vec{\eta}| g w d\sigma . \end{cases}$$

On peut alors caractériser les solutions de (2), appelées sous solutions, ce qui permet d'étudier les propriétés de $\sigma(\varphi, f.g)$: dépendance en fonction de l'obstacle, régularité ...