Journées Équations aux dérivées partielles

Jacqueline Fleckinger

Comportement asymptotique des valeurs propres du problème de Dirichlet relatif à un ouvert non borné

Journées Équations aux dérivées partielles (1978), p. 1-2

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1978____A16_0>

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES VALEURS PROPRES DU PROBLEME DE DIRICHLET RELATIF A UN OUVERT NON BORNE

par J. FLECKINGER

On complète ici les résultats de [1] et on généralise le résultat de H. Tamura [2] qui obtient le comportement asymptotique de $N(\lambda, -\Delta_0, \Omega)$, nombre de valeurs propres inférieures à λ du problème de Dirichlet sur une "pointe à l'infini".

Considérant le problème de Dirichlet variationnel associé à l'opérateur

$$A(x,D) = I - \left[\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial}{\partial x_i} (1+|x|)^{\nu} \frac{\partial}{\partial x_i} + \sigma(x) \sum_{j=1}^{q} \frac{\partial^2}{\partial y_j^2} \right]$$

sur l'ouvert Ω de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ défini par

$$\Omega = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q / x = (x_1,\dots,x_p) \; ; \; y = (y_1,\dots,y_q)$$

$$0 < y_i < \varphi(x) \qquad i = 1,\dots,p \qquad \varphi \in C^1(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}_+) \}$$

on fait les hypothèses suivantes

- $\nu \geq 0$
- $\dfrac{\sigma(x)}{\varphi^2(x)} > \gamma > 0$ et $\dfrac{\varphi^2(x)}{\sigma(x)} \to 0$ quand $|x| \to +\infty$
- $\dfrac{(1+|x|)^{\nu/2}}{\varphi} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ est borné sur $\mathbb{R}^p$ pour tout $i = 1,\dots,p$

Appelons $N(\lambda, A, \Omega)$ le nombre de valeurs propres inférieures à λ de ce problème ; on a

$$N(\lambda, A, \Omega) \sim \frac{1}{2^{q-1}\sigma(1+q/2)} \sum_{\ell=1}^{\infty} \int_{\{x \mid \frac{\sigma(x)}{\varphi^2(x)} \pi^2 \ell^2 < \lambda\}} \left[\frac{\lambda - \pi^2 \ell^2 \dfrac{\sigma(x)}{\varphi^2(x)}}{(1+|x|)^{\nu}} \right]^{p/2} dx$$

quand $\lambda \to +\infty$.

Références

[1] J. Fleckinger : Comptes-Rendus de l'Acad. Sc.,23 Janvier 1978, p.149, t.286.

[2] H. Tamura : Nagoya Math. J. 60, 1976, p.7.