

# JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

GERD GRUBB

## Sur la théorie spectrale des problèmes aux limites pseudo-différentiels elliptiques

*Journées Équations aux dérivées partielles* (1978), p. 1-2

[http://www.numdam.org/item?id=JEDP\\_1978\\_\\_\\_A14\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1978___A14_0)

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

SUR LA THEORIE SPECTRALE DES PROBLEMES  
AUX LIMITES PSEUDO-DIFFERENTIELS ELLIPTIQUES

par G. GRUBB

Soit  $P$  un opérateur pseudo-différentiel classique, opérant dans un fibré vectoriel  $E$  sur une variété  $\Sigma$ , compacte, de dimension  $n$  et sans bord ; soit  $\Omega \subset \Sigma$  et soit  $P_\Omega$  la restriction de  $P$  à  $\Omega$  ( $P_\Omega u = (P\tilde{u})|_\Omega$ ).  $P$  est supposé auto-adjoint et fortement elliptique (et positif), d'ordre  $\ell > 0$ . Si  $P$  a la propriété de transmission par rapport à  $\partial\Omega$  (et  $\ell = 2m$ ,  $m$  entier) on peut étudier les réalisations  $(P+G)_T$  de  $P_\Omega + G$  dans  $L^2(\Omega, E)$ , de domaine

$$D((P+G)_T) = \{u \in H^\ell(\Omega, E) \mid Tu = 0\},$$

où  $T$  et  $G$  sont des opérateurs de trace, resp. de Green singulier, convenables. Exemple :  $P_Y$ , la réalisation de Dirichlet. L'étude de ces réalisations permet des manipulations avec des problèmes différentiels, par exemple la réduction d'un système de Douglis-Nirenberg à un système o.p.s.d. d'un seul ordre [3], l'étude de  $Au = \lambda Bu$  avec  $A$  et  $B$  elliptiques, le problème considéré dans [1], étudié là par d'autres moyens.

Pour la théorie spectrale nous étudions la résolvante  $R_\lambda$ . L'étude pour  $|\lambda| \rightarrow \infty$  dans un secteur  $W = \{\lambda = re^{i\theta} \mid r \geq 1, 0 < \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 < \pi\}$  présentée dans [4], [3], conduit à l'estimation principale du nombre  $N(t)$  de valeurs propres inférieurs à  $t$ , et servirait aussi à l'étude des puissances complexes, l'indice, des équations d'évolution. On a montré dans [4] la décomposition suivante

$$R_\lambda = (P - \lambda I)_\Omega^{-1} + G_\lambda,$$

où  $G_\lambda$  est un opérateur de Green singulier,  $(P - \lambda I)_\Omega^{-1}$  et  $G_\lambda$  ayant des développements en une somme finie de termes à symbole homogène plus un reste, satisfaisant à des estimations naturelles par rapport à la norme  $\|u\|_{s,\mu} = (\|u\|_s^2 + \mu^{2s}\|u\|_0^2)^{1/2}$  où  $\mu = |\lambda|^{1/\ell}$ .

L'étude dans une "région parabolique"  $V_\delta = \{\lambda \mid |\lambda| \geq 1, \operatorname{Re} \lambda \leq 0 \text{ ou } |\operatorname{Im} \lambda| \geq |\lambda|^{1-\delta/\ell}\}$  conduit à des estimations plus fines de  $N(t)$  (et de la

fonction spectrale). Nous avons complété ce travail pour le cas sans bord [5] (sans hypothèses sur la multiplicité des valeurs propres de  $p^0(x, \xi)$  comme dans [6], [2]) en démontrant pour  $\ell \in \mathbf{R}_+$  :

$$(1) \quad \forall \varepsilon, N(t, P) = C_P t^{n/\ell} + \mathcal{O}(t^{(n-1/2+\varepsilon)/\ell}) \quad \text{pour } t \rightarrow \infty,$$

$$(2) \quad \text{tr } e(t; x, x) = C_P(x) t^{n/\ell} + \mathcal{O}(t^{(n-1/2+\varepsilon)/\ell}) \quad \text{pour } t \rightarrow \infty,$$

(uniformément sur  $\Sigma$ ), où

$$C_P(x) = \frac{1}{n(2\pi)^n} \int_{S_x} \text{tr}[p^0(x, \xi)^{-n/\ell}] d\omega, \quad C_P = \int_{\Sigma} C_P(x) dx,$$

avec un résultat pareil pour les systèmes pseudo-différentiels fortement elliptiques de Douglis-Nirenberg.

Une difficulté dans la démonstration est que les dérivées en  $\xi$  de  $(p^0(x, \xi) - \lambda I)^{-1}$  ont un bon comportement seulement jusqu'à l'ordre  $\ell$ . On ajoute  $\mu = |\lambda|^{1/\ell}$  comme variable cotangente, pour utiliser le théorème de Calderon-Vaillancourt (amélioré par Kato [7]) dans  $\mathbf{R}^{n+1}$ , qui exige seulement  $[(n+1)/2] + 1$  dérivées en  $\xi$ ; cela entraîne des estimations dans  $\mathbf{R}^n$  dans les normes  $\|u\|_{s, \mu}$ . Pour obtenir (1), (2) pour  $P$  on a besoin d'augmenter l'ordre (en remplaçant  $P$  par  $P^r$ ) de manière que  $r\ell > \varepsilon^{-1}n$ . La généralisation aux problèmes aux limites est encore "work in progress".

### Références

- [1] A. B. Alekseev, M. S. Birman, Soviet Math. Dokl. 17 (1976), 1319-22.
- [2] J. J. Duistermaat, V. W. Guillemin, Invent. Math. 29 (1975), 39-79.
- [3] G. Grubb, Comm. Part. Diff. Equ. 2 (1977), 1071-1150.
- [4] G. Grubb, Exposé XIV, Séminaire Goulaouic-Schwartz, 1977-78.
- [5] G. Grubb : Remainder estimates for eigenvalues and kernels of pseudo-differential elliptic systems (pour Math. Scand.)
- [6] L. Hörmander, Acta Math. 121 (1968), 193-218.
- [7] T. Kato, Osaka J. Math. 3 (1976), 1-9.