JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

GUY MÉTIVIER

Propriété des itérés et ellipticité

Journées Équations aux dérivées partielles (1978), p. 1-2

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1978____A12_0>

PROPRIETE DES ITERES ET ELLIPTICITE

par G. METIVIER

On trouvera ci-dessous un résumé des résultats de [1].

Soit $A(x,D_x)$ un opérateur d'ordre m à coefficients analytiques sur l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Pour $s \geq 1$ on note $G^s(\Omega;A)$ l'espace des fonctions $u \in L^2_{loc}(\Omega)$ telles que $A^k u \in L^2_{loc}(\Omega)$ pour $k = 1,2,\ldots,$ et en outre telles que pour tout $\omega \subset\subset \Omega$ il existe L vérifiant :

$$\forall k = 0,1,\ldots \qquad \|A^k u\|_{L^2(\omega)} \leq L^{k+1}(k!)^{sm}$$

D'autre part on note $G^s(\Omega)$ la classe de Gevrey d'ordre s sur Ω. Rappelons tout d'abord que l'on a toujours l'inclusion $G^s(\Omega) \subset G^s(\Omega;A)$, et considérons les deux propriétés :

(i) $G^s(\Omega;A) \subset G^s(\Omega)$

(ii) A est elliptique sur Ω.

Théorème 1 : Si s est > 1 les propriétés i) et ii) sont équivalentes.

L'implication ii) $\Rightarrow$ i) (pour $s \geq 1$) est le classique théorème des itérés elliptiques, et en fait on montre que pour $s > 1$ l'inclusion $G^s(\Omega;A) \cap C^\infty(\Omega) \subset G^s(\Omega)$ suffit à impliquer l'ellipticité de A.

La considération des opérateurs $A = \frac{d}{dx}\, x \frac{d}{dx} + \lambda \frac{d}{dx}$ montre d'autre part que l'implication i) $\Rightarrow$ ii) est fausse en toute généralité pour $s = 1$. Il semble que pour le cas analytique ($s = 1$) il faille renforcer i) en remplaçant l'espace $G^1(\Omega;A)$ par un espace de distributions vecteurs analytiques de A.

Cependant, par des méthodes d'interpolation, on montre :

Théorème 2 : Si A est formellement autoadjoint les propriétés i) et ii) sont encore équivalentes pour $s = 1$.

Par ailleurs ces méthodes d'interpolation peuvent aussi être utilisées pour donner une condition nécessaire à la propriété des itérés jusqu'au bord ; on caractérise ainsi le type maximum de dégénérescence compatible avec cette propriété (toujours pour des opérateurs autoadjoints).

Référence

[1] G. METIVIER : Propriété des itérés et ellipticité.
Comm. in P. D. E. (à paraître).