JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

ÉLISABETH CROC
YVES DERMENJIAN
VIOREL IFTIMIE

Une classe d'opérateurs pseudo-différentiels partiellement hypoelliptique-analytiques

Journées Équations aux dérivées partielles (1977), p. 59-65
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1977____59_0>

UNE CLASSE D'OPERATEURS PSEUDO-DIFFERENTIELS PARTIELLEMENT HYPOELLIPTIQUE-ANALYTIQUES

Elisabeth CROC
Yves DERMENJIAN
Viorel IFTIMIE

I - INTRODUCTION

Comme cet exposé généralise [1] les démonstrations similaires ne seront pas répétées.

Précisons quelques données valables pour tout l'article. Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ où la variable est notée $x = (x', x'')$ avec $x' = (x_1, \dots, x_p)$ et $x'' = (x_{p+1}, \dots, x_n)$, p étant un entier fixé une fois pour toute.

Définition 1.1.

Une distribution u *sur* Ω *est dite partiellement analytique en* x' *(p.a. en* x'*) si pour tout couple d'ouverts* $U \subset \mathbb{R}^p$, $V \subset \mathbb{R}^{n-p}$, $U \times V \subset \Omega$ *et toute fonction* $\psi \in C_0^\infty(V)$, *la distribution* u_ψ *sur* U *définie par*

$$u_\psi : \phi(x') \longrightarrow \langle u(x',x''), \phi(x')\,\psi(x'')\rangle$$

est une fonction analytique.

Définition 1.2.

Un opérateur linéaire $P : \mathcal{E}'(\Omega) \longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ *est dit partiellement hypoelliptique-analytique en* x' *(p.a. en* x'*) si pour tout ouvert* $U \subset \Omega$ *et toute distribution* $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$

$$Pu_{|U} \ \text{p.a. en } x' \Longrightarrow u \ \text{est p.a. en } x'.$$

Nous donnons une condition suffisante avec le théorème 1.5. pour avoir un opérateur partiellement hypoelliptique-analytique.

Gårding et Malgrange ont résolu entièrement ce problème en 1961 lorsque P est un opérateur différentiel à coefficients constants([3]). Jöran Friberg ([2]) dans sa thèse, en 1963, a défini, entre autres choses, une classe d'opérateurs différentiels, P, à coefficients variables, tels que si $Pu = 0$ et u a une certaine régularité en x'' alors u est partiellement analytique en x'. Nous pouvons montrer de plus,

- que ces opérateurs vérifient les conditions du théorème 1.5. et donc que nous considérons une classe plus générale d'opérateurs,
- que notre résultat est plus général, même dans le cas des opérateurs différen-

tiels de Friberg, puisque nous ne supposons aucune régularité en x'' pour les solutions de $Pu = 0$.

En outre, nous construisons une paramétrix locale de ces opérateurs

Considérons un opérateur linéaire $P : \mathcal{E}'(\Omega) \longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ et U un ouvert de Ω, nous supposons, de plus, que $Pu = f$ où f est une distribution dont la restriction à U est partiellement analytique. Si $\phi \in C_0^\infty(\omega)$ est telle que $\phi = 1$ sur U, nous pouvons écrire :

$$u = (I - Q\phi P)u + Q\phi Pu = (I - Q\phi P)u + Q\phi f$$

où Q est un autre opérateur linéaire de $\mathcal{E}'(\omega)$ dans $\mathcal{D}'(\omega)$, $\overline{U} \subset \omega \subset \overline{\omega} \subset \Omega$.

Nous pouvons conclure que la restriction de u à U est partiellement analytique en x' si nous avons les deux résultats suivants :

a) Q et P appartiennent à une classe $\mathcal{C}$ d'opérateurs telle que

$$u_{|U} \text{ p.a. en } x' \Longrightarrow Ru_{|U} \text{ est p.a. en } x' \text{ si } R \in \mathcal{C} \ .$$

b) $I - Q\phi P$ est un opérateur régularisant, c'est-à-dire :

$$(I - Q\phi P)(\mathcal{E}'(\omega))_{|U} \subset \mathcal{D}'_{\text{p.a.}}(U).$$

$\mathcal{D}'_{\text{p.a.}}(\Omega)$ désigne l'ensemble des distributions sur Ω partiellement analytiques en x' sur Ω.

Ainsi nos objectifs et notre méthode sont clairs.

<u>Remarque 1.3.</u>

On sait que si P est un opérateur différentiel à coefficients constants une condition nécessaire et suffisante pour qu'il soit hypoelliptique est qu'il existe une constante C telle que pour tout multi-indice β , on ait :

$$\left|\frac{P^{(\beta)}(\xi)}{P(\xi)}\right| \leq C\ (1 + |\xi|)^{-\rho|\beta|} \quad \text{si} \quad |\xi| > C\ .$$

Si $\rho = 1$, c'est d'ailleurs une condition nécessaire et suffisante pour l'hypoellipticité-analytique (P est alors elliptique).

Hörmander ([4]) en a tiré partie pour donner une condition suffisante afin qu'un opérateur pseudo-différentiel P, de symbole p, soit hypoelliptique - C^∞ :

$$\left|\frac{p_{(\alpha)}^{(\beta)}(x,\xi)}{p(x,\xi)}\right| \leq C_{K,\alpha,\beta}\ (1 + |\xi|)^{m-\rho|\beta|+\delta|\beta|} \quad \text{si} \quad |\xi| > R$$

$$|p^{-1}(x,\xi)| \leq C_K\ (1 + |\xi|)^m \qquad \text{si} \quad |\xi| > R\ .$$

Remarque 1.4.

Gårding et Malgrange ont montré qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur différentiel P , à coefficients constants, soit partiellement hypoelliptique-analytique s'écrivait comme suit :

$$\left|\frac{P^{(\beta)}(\xi)}{P(\xi)}\right| < C(1 + |\xi'|)^{-|\beta|} \qquad \text{si } |\xi'| > R$$

Poursuivant l'analogie avec la remarque 1.3. on obtient le résultat principal sous la forme du :

Théorème 1.5.

Nous supposons que $p \in S_A^{m',m''}(\Omega)$ *et que pour tout compact* K *de* Ω *et tous multi-indices* α, β *, il existe des constantes positives* A_K, C_K, R_K *telles que :*

$$|p_{(\alpha)}^{(\beta)}(x,\xi)\, p^{-1}(x,\xi)| \leq C_K A_K^{|\alpha+\beta|} \alpha'!\, \alpha''!^s\, \beta!\, (1 + |\xi'|)^{-|\beta|}, \quad \text{si } x \in K \text{ et } |\xi'|>R_K$$

et

$$|p^{-1}(x,\xi)| \leq C_K (1 + |\xi'|)^{\tilde{m}'} (1 + |\xi''|)^{\tilde{m}''}, \quad \text{si } x \in K \text{ et } |\xi'| > R_K .$$

On peut même supposer que $\tilde{m}'$ *et* $\tilde{m}''$ *dépendent du compact* K.

Alors l'opérateur P *associé au symbole* p *par la formule*

$$(Pu)(x) = (2\pi)^{-n} \iint e^{i<x-y,\xi>}\, p(x,\xi)\, u(y)\, dy\, d\xi \quad \textit{lorsque } u \in C_0^\infty(\Omega) \text{ et } x \in \Omega ,$$

est partiellement hypoelliptique-analytique en x' .

On désigne par s un nombre réel strictement positif et qui sera fixé, une fois pour toute, dans cet exposé. On peut le supposer supérieur à 2, par exemple.

II - METHODES

Définition 2.1.

Si m', m'' *sont réels et* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$, $S_A^{m',m''}(\Omega\times\mathbb{R}^N)$ *est l'ensemble des fonctions* p *de* $C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^N)$ *telles que pour tout compact* K *de* Ω *et tous multi-indices* α,β *, il existe des constantes* A_K, R_K, C_K *ne dépendant que de* K *et* $C_{K,\beta}$ *ne dépendant que de* K *et* β *, telles que :*

$$(2.1) \quad |D_x^\alpha D_\xi^\beta p(x,\xi)| \leq C_{K,\beta} A_K^{|\alpha|}\, \alpha'!\, \alpha''!^s (1+|\xi'|)^{m'-|\beta|} (1+|\xi''|)^{m''}, \text{ si } x\in K \text{ et } \xi \in \mathbb{R}^N$$

$$(2.2) \quad |D_x^\alpha D_\xi^\beta p(x,\xi)| \leq C_K A_K^{|\alpha|+|\beta|} \alpha'!\alpha''!^s \beta! (1+|\xi'|)^{m'-|\beta|} (1+\xi''|)^{m''} ,$$

$$\text{si } x \in K \text{ et } \xi' \in \mathbb{R}^N \text{ avec } |\xi'| > R_K$$

On pose $\xi = (\xi', \xi'')$ *où* $\xi' = (\xi_1,\ldots,\xi_k)$ *et* $\xi'' = (\xi_{k+1},\ldots,\xi_N)$, k *étant un entier fixé, compris entre* 1 *et* N . *Si* $n = N$ *et* $p = k$ *on écrira* $S^{m',m''}_A(\Omega \times \mathbb{R}^N) = S^{m',m''}_A(\Omega)$.

Définition 2.2.

$L^{m',m''}_A(\Omega)$ *désigne l'ensemble des opérateurs,* P , *linéaires de* $C^\infty_o(\Omega)$ *dans* $C^\infty(\Omega)$ *qui s'écrivent* :

$$(2.3) \qquad (Pu)(x) = (2\pi)^{-n} \iint e^{i\langle x-y,\xi\rangle}\, p(x,\xi)\, u(y)\, dy\, d\xi$$

où $p \in S^{m',m''}_A(\Omega)$.

Si $a(x,y,\xi)$ appartient à $S^{m',m''}_A(\Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^n)$ $(k = p)$ on a le :

Théorème 2.2.

1. Le noyau, K_A *, de l'opérateur linéaire continu* A *de* $\mathcal{E}'(\Omega)$ *dans* $\mathcal{D}'(\Omega)$ *défini par l'égalité*

$$(2.4) \qquad (Au)(x) = (2\pi)^{-n} \iint e^{i\langle x-y,\xi\rangle}\, a(x,y,\xi)\, u(y)\, dy \quad \textit{lorsque} \quad u \in C^\infty_o(\Omega)$$

est partiellement analytique en (x',y') *sur* $\Omega \times \Omega \setminus \Delta$ *(*Δ *désigne la diagonale de* $\Omega \times \Omega$*).*

2. Si $u \in C^\infty_o(\Omega)$, Au *est partiellement analytique en* x' *sur* $\Omega \setminus \operatorname{supp} u$.

3. Si $P \in L^{m',m''}_A(\Omega)$, $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ *et* $u_{|U}$ *est partiellement analytique en* x' *alors* $Pu_{|U}$ *est partiellement analytique en* x' *sur l'ouvert* $U \subset \Omega$.

Les démonstrations de ces théorèmes figurent dans [1] (voir les théorèmes 4.1, 4.3 et le corollaire 4.2) et utilisent, en particulier, le théorème 2.4. et le lemme 2.2. de [2] .

Nous avons ainsi trouvé la classe $\mathcal{C}$ du I/a), à savoir, $L^{m',m''}_A(\Omega)$. Il nous reste à résoudre le point b) du I. Pour celà il faut introduire la notion de somme asymptotique puis examiner la composition des opérateurs.

Théorème 2.3.

Soit une suite $\{p_j\}_o^\infty$ *, où* $p_j \in S^{m'-j,m''}_A(\Omega \times \mathbb{R}^N)$, *telle que, pour tout compact* K *de* Ω *, il existe des constantes* A_K, R_K *et* C_K *vérifiant pour tout entier* j *et tous multi-indices* α, β :

$$|D^\alpha_x D^\beta_\xi p_j(x,\xi)| \leqslant C_K A_K^{j+|\alpha|+|\beta|} \alpha'!\, \alpha''!^s\, \beta!\, j!^s\, (1+|\xi'|)^{m'-j-|\beta|} (1+|\xi''|)^{m''}$$

lorsque $x \in K$, $|\xi'| > R_K$, $j = 0, 1, 2, \ldots$

alors, pour tout ouvert $\omega \subset\subset \Omega$, *il existe* $p \in S_A^{m',m''}(\Omega \times \mathbb{R}^N)$ *tel que* $p \sim \sum_0^\infty p_j$ sur ω , *c'est-à-dire :*

$$|D_x^\alpha D_\xi^\beta (p - \sum_{j=o}^{m-1} p_j)(x,\xi)| \leqslant C_K A_K^{m+|\alpha|+|\beta|} \alpha'! \alpha''!^s \beta! m!^s (1+|\xi'|)^{m'-m-|\beta|}(1+|\xi''|)^{m''}$$

lorsque $x \in K$, $|\xi'| > R_K$, $j = 0, 1, 2, \ldots$.

Pour obtenir ce théorème il faut reprendre le chapitre III de [1] avec de légères modifications (on peut relire avec profit ([5])):

- dans le lemme 3.6. on remplace $(j + |\alpha|)!$ par $\alpha'!(j + |\alpha''|)!^s$
- dans la proposition 3.7., au lieu de (3.6) on obtient :

  $$N_{K,m'+\tilde{m}',m''+\tilde{m}''}(\{r_j\},T) \ll N_{K,m',m''}(\{p_k\},T) . N_{K,\tilde{m}',\tilde{m}''}(\{q_\ell\}, eT)$$

- dans le lemme 3.8. on remplace les conditions sur p par des conditions sur $D_{x''}^{\alpha''} p$ et, en particulier, on remplace (3.7) par :

  $$|D_{x''}^{\alpha''} p(z',x'',\zeta)| \leqslant C_K A_K^{|\alpha''|} \alpha''!^s (1 + |\xi'|)^{m'} (1 + |\xi''|)^{m''}$$

  où (z', x'', ζ) appartient à $K_\varepsilon \times C_{\varepsilon,R_K}$ avec

  $K_\varepsilon = \{(z',x'') \in \mathbb{C}^p \times \mathbb{R}^{n-p} ; d((z',x''),K) < \varepsilon\}$

  et $C_{\varepsilon,R_K} = \{\zeta \in \mathbb{C}^N ; \exists\, \xi \in \mathbb{R}^N$ tel que $|\xi'| \geqslant R_K$ et $|\zeta-\xi| < \varepsilon(1+|\xi'|)\}$
- dans les lemmes 3.9. et 3.10. les inégalités (3.8) et (3.9) deviennent respectivement :

  $$|D_{x''}^{\alpha''} p_j(z',x'',\zeta)| \leqslant C_K A_K^{j+|\alpha''|} j!^s \alpha''!^s (1 + |\xi'|)^{m'-j} (1 + |\xi''|)^{m''}$$

  $$|\sum_{j=o}^{m-1} D_{x''}^{\alpha''}(p_j - q_j)(z', x'', \zeta)| \leqslant C_K A_K^{m+|\alpha''|} m!^s \alpha''!^s (1 + |\xi'|)^{m'-j} (1 + |\xi''|)^{m''}$$
- on peut réécrire le théorème 3.11 après avoir démontré le lemme suivant :

Si $S_{A,s}$ désigne l'espace des suites $S = (S_j)_{j=o,1,\ldots}$ telles que $||S||^2 = \sum_j |\frac{S_j}{A^j j!^s}|^2 < \infty$ et V_ε l'espace des fonctions holomorphes bornées dans l'angle $|\mathrm{Im} t| < \varepsilon |\mathrm{Re} t|$ alors pour tout A , il existe des constantes ε, C, B et une application linéaire continue $U : S_{A,s} \longrightarrow V_\varepsilon$ telle que si $g = U(S)$ on ait :

$$|g(t) - \sum_{j=o}^{m-1} S_j t^{-j}| \leqslant C B^m m!^s |t|^{-m} ||S|| .$$

Théorème 2.4.

Soient $p \in S_A^{m',m''}(\Omega)$ *et* $q \in S_A^{\tilde{m}',\tilde{m}''}(\Omega)$, P *et* Q *les opérateurs (2.3) correspondants,* ω *un ouvert de* Ω *vérifiant* $\bar{\omega} \subset \Omega$ *et* $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ *telle que* ϕ *soit égale à* 1 *sur* $\bar{\omega}$ *. Alors* $Q\phi P|_\omega$ *diffère par un opérateur régularisant sur* ω *, d'un opérateur* $R \in L_A^{m'+\tilde{m}',m''+\tilde{m}''}(\omega)$ *de symbole* r *équivalent sur* ω *au composé de* p *et* q :

$$r(x,\xi) \sim \sum_\gamma \frac{1}{\gamma!} \partial_\xi^\gamma q(x,\xi) D_x^\gamma p(x,\xi)$$

Pour arriver à ce résultat on suit la méthode de [1] mais en apportant quelques modifications à la démonstration du théorème 4.4 , la proposition 4.7 et le corollaire 4.8 restant inchangés. Avant la première étape on commence par réduire le symbole $a(x,y,\xi)$ à un symbole $\tilde{a}(x,y',\xi)$, partiellement analytique, tel que les deux opérateurs ainsi définis par la formule (2.4), soient égaux. Pour cela on suppose que $a(x,y,\xi)$ est à support compact en y'' et celà est possible car il y a des fonctions à support compact dans les classes de Gevrey d'ordre $s > 1$ (lorsque $s = 1$, il faut revenir à [1]). Après avoir écrit l'égalité formelle de ces 2 opérateurs, définis à partir de a et $\tilde{a}$, on obtient, en utilisant les méthodes usuelles des opérateurs pseudo-différentiels (voir [4] , page 103 et suivantes), un développement asymptotique de $\tilde{a}(x,y,\xi)$ de la forme :

$$(2\pi)^{(n-p)} \sum_{\alpha''} \frac{1}{\alpha''!} D_{y''}^{\alpha''} \partial_{\xi''}^{\alpha''} a(x,y',y'',\xi)|_{y''=x''} \quad ,$$

x' et y' jouant le role de paramètres. On obtient alors des majorations nous permettant d'aborder la première étape avec $\tilde{a}(x,y',\xi)$ où le paramètre est, cette fois-ci, x'' .

Pour répondre au point I/b), et terminer la démonstration du théorème 1.5 on démontre des résultats analogues aux lemmes 5.1, 5.2 et 5.3 de [1] qui permettent de construire une paramétrix à gauche de l'opérateur P.

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. CROC, Y. DERMENJIAN, V. IFTIMIE -"Une classe d'opérateurs pseudo-différentiels partiellement hypoelliptique-analytiques" à paraître au "Journal de mathématiques pures et appliquées" (fasc 3), 1978.

[2] J. FRIBERG - "Estimates for partially hypoelliptic differential operators" Communications du séminaire mathématique de l'Université de Lund, Tome 17 ; 1963, p. 1-97.

[3] L. GÅRDING et B. MALGRANGE - "Opérateurs différentiels partiellement hypoelliptiques et partiellement elliptiques", Math. Scand. 9 (1961), p. 5-21.

[4] L. HÖRMANDER - "Fourier integral operators I", Acta Math. 127 : 1-2 (1971), p. 79-183.

[5] L. BOUTET de MONVEL - "Opérateurs pseudo-différentiels analytiques et opérateurs d'ordre infini", Annales de l'Institut Fourier, Tome XXII, fasc. 3, p. 229-268.

Elisabeth CROC
Centre Universitaire de Toulon
Chateau Saint-Michel
83130 LA GARDE

Yves DERMENJIAN
Université PARIS-NORD
C.S.P. Département de Mathématiques
Avenue J.B. Clément,
93430 VILLETANEUSE

Viorel IFTIMIE
Université de Bucarest
Faculté de Mathématiques
14, rue Academici,
BUCAREST (Roumanie)