Journées Équations aux dérivées partielles

Pierre Bolley
Jacques Camus
Pham The Lai

Noyau, résolvante et valeurs propres d'une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés

Journées Équations aux dérivées partielles (1977), p. 33-46
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1977____33_0>

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

NOYAU, RESOLVANTE ET VALEURS PROPRES

D'UNE CLASSE D'OPERATEURS ELLIPTIQUES ET DEGENERES

par

P. BOLLEY, J. CAMUS et PHAM THE LAI

INTRODUCTION. - Dans cet article, on étudie le comportement asymptotique des valeurs propres pour la classe des opérateurs elliptiques dégénérés quasi-homogènes introduite dans (5) et variationnels.

Ce sont des opérateurs qui, dans une carte locale, s'écrivent :

$$(*) \qquad L(t\ ;\ D_x,D_t) \equiv \sum_{|\alpha|+j\leq m} a_{\alpha j}\ t^{\sigma+\delta|\alpha|+j}\ D_x^\alpha D_t^j\ ,$$

où $m \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$, $\sigma \in \mathbb{Z}$ avec $\sigma + m$ et $\sigma + \delta m \in \mathbb{N}$.

Leur symbole $L(t\ ;\ \xi,\tau)$ vérifie la propriété de quasi-homogénéité suivante :

$$L(t/\lambda\ ;\ \lambda^\delta\xi,\lambda\tau) = \lambda^{-\sigma}L(t\ ;\ \xi,\tau)\ .$$

Dans cette direction, des résultats ont déjà été obtenus :

1 - Pour l'opérateur

$$L = \mathrm{div}\ \varphi\ \mathrm{grad} + \sum_{i,j} \Lambda_{ij}^* \Lambda_{ij}$$

où φ est une fonction $C^\infty(\overline{\Omega})$ équivalente à la distance au bord Γ de Ω , Ω étant un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et où

$$\Lambda_{ij} = \varphi_i \frac{\partial}{\partial x_j} - \varphi_j \frac{\partial}{\partial x_i}$$

est un champ de vecteurs tangents à Γ ; on sait alors que si

$$N(\lambda) = \sum_{\lambda_j\leq\lambda}$$

est la fonction de répartition des valeurs propres λ_j d'une réalisation dans $L^2(\Omega)$ de l'opérateur L , on a : $N(\lambda) \sim c.\lambda^{n/2}$ comme dans le cas elliptique, la constante c s'exprimant par une intégrale sur le domaine Ω , cf. M. S. BAOUENDI - C. GOULAOUIC (3), M. GUILLEMOT-TESSIER (6).

2 - Pour l'opérateur $L = \mathrm{div}\ \varphi\ \mathrm{grad}$, on sait alors que $N(\lambda) \sim c\lambda^{n-1}$ si $n > 2$, la constante c s'exprimant à l'aide d'une intégrale sur le bord Γ de Ω , cf.

C. NORDIN [10], I. L. VULIS - M. Z. SOLOMJAK [16].

Plus généralement, G. METIVIER [9], PHAM THE LAI [11] [12], M. TOUGERON [14] ont obtenu l'équivalent $N(\lambda) \sim c.\lambda^{(n-1)/(2m-k)}$ pour les opérateurs L d'ordre $2m$, dégénérant au bord à l'ordre k dans toutes les directions (ie : $\delta = 1$ et $\sigma = k - 2m$) pour $n > \frac{2m}{k}$, $N(\lambda) \sim c.\lambda^{n/2m}$ pour $n < \frac{2m}{k}$ et lorsque $n = \frac{2m}{k}$, $N(\lambda) \sim c.\lambda^{1/k}\mathrm{Log}\,\lambda$, la constante c s'exprimant pour $n \geqslant \frac{2m}{k}$ à l'aide d'une intégrale sur le bord Γ de Ω et pour $n < \frac{2m}{k}$ à l'aide d'une intégrale sur Ω.

On va montrer que pour les opérateurs généraux (*), on a : $N(\lambda) \sim c.\lambda^{-\delta(n-1)/\sigma}$ pour $n > \frac{\delta m}{\sigma + \delta m}$, la constante c s'exprimant à l'aide d'une intégrale sur le bord et dépendant de la réalisation choisie pour l'opérateur L, $N(\lambda) \sim c.\lambda^{n/m}$ pour $n < \frac{m}{\sigma + \delta m}$ et $N(\lambda) \sim c.\lambda^{n/m}\mathrm{Log}\,\lambda$ lorsque $n = \frac{m}{\sigma + \delta m}$, la constante c s'exprimant à l'aide d'une intégrale sur Γ et ne dépendant pas de la réalisation choisie.

En particulier, pour les opérateurs considérés par M. S. BAOUENDI [2] et M. I. VISIK - V. V. GRUSIN [15] :

$$\Lambda^*\Lambda + \sum_{i,j=1}^{n} D_j(a_{ij}\varphi^\rho D_i)$$

où Λ est un champ de vecteurs transversal à Γ sur Γ et ρ un entier > 0, on obtient que $N(\lambda) \sim c.\lambda^{((\rho+2)/4)(n-1)}$ pour $n > \frac{\rho + 2}{\rho}$, la constante c dépendant de la réalisation choisie et s'exprimant à l'aide d'une intégrale sur le bord Γ, $N(\lambda) \sim c.\lambda^{n/2}$ pour $n < \frac{\rho + 2}{\rho}$ et lorsque $n = \frac{\rho + 2}{\rho}$, $N(\lambda) \sim c.\lambda^{n/2}\mathrm{Log}\,\lambda$, la constante c ne dépendant pas de la réalisation choisie et s'exprimant à l'aide d'une intégrale sur Γ. Un résultat de même nature est donné par A. MENIKOFF - J. SJOSTRAND [8] à ce colloque.

A la différence de [9], nous suivrons la méthode des noyaux d'Agmon ce qui permettra de traiter le cas des opérateurs L non nécessairement auto-adjoints (avec cependant une hypohtèse restrictive du type Sobolev Min $(-\sigma, -\sigma/\delta) > n$). En outre, à la différence de [11] et [14], nos résultats s'appliqueront à des réalisations assez générales des opérateurs L (ie : sans hypothèse de régularité sur le domaine $D(L)$).

1. - NOTATIONS ET RESULTATS

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. On suppose que $\bar{\Omega}$ est une variété à bord, de bord Γ de classe C^∞. On se donne une fonction $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ vérifiant :

$$\begin{cases} \Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ \varphi(x) > 0\}, \\ \Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ \varphi(x) = 0\}, \\ \mathrm{grad}\ \varphi(x) \neq 0 \ \text{pour} \ x \in \Gamma, \end{cases}$$

où $\mathrm{grad}\ \varphi(x) = (\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}(x))$.

Soient $(X_i)_{0 \leqslant i \leqslant q}$ des champs de vecteurs à coefficients C^∞ sur $\mathbb{R}^n$ tels que :

(i) X_o est transversal à Γ sur Γ ie : $(X_o\varphi)(x) \neq$ pour $x \in \Gamma$;

(ii) X_i , pour $i = 1,\ldots,q$, est tangent à Γ sur Γ ie : $(X_i\varphi)(x) = 0$ pour $x \in \Gamma$;

(iii) pour tout $x \in \bar\Omega$, le rang du système $(X_i(x))_{0\leqslant i\leqslant q}$ est égal à n .

On supposera que $X_o(x)$ est, en chaque point de Γ , intérieur à Ω .

Etant donnés $m \in \mathbb{N}$, $-\sigma$ et δ des nombres réels > 0 avec $\sigma + m \geqslant 0$ et $\sigma + \delta m \geqslant 0$, on considère l'espace :

$$W^m_{\sigma,\delta}(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \quad ; \quad \varphi^{\mathrm{Max}(0,\sigma+<\delta,\alpha>)} X^\alpha u \in L^2(\Omega) \quad \text{pour} \quad |\alpha| \leqslant m\}$$

muni de la norme canonique.

On a noté

$$X^\alpha = X_o^{\alpha_o} \ldots X_q^{\alpha_q} \quad \text{pour} \quad \alpha = (\alpha_o,\ldots,\alpha_q) \in \mathbb{N}^{q+1}$$

et

$$<\delta,\alpha> = \delta \sum_{i=1}^{q} \alpha_i + \alpha_o .$$

On notera V l'un quelconque des sous-espaces $V_\ell(\Omega) = \{u \in W^m_{\sigma,\delta}(\Omega) \quad ; \quad \gamma_j u = 0$ pour $0 \leqslant j \leqslant \ell\}$ pour ℓ entier avec $0 \leqslant \ell < -\sigma - \frac{1}{2}$, ou bien l'espace $W^m_{\sigma,\delta}(\Omega)$. ($\gamma_j u$ désigne la trace sur Γ de la dérivée normale d'ordre j de u).

Soit maintenant $a(u,v)$ une forme intégro-différentielle définie sur V par :

$$a(u,v) = \sum_{(\alpha,\beta)\in \mathcal{M}} \int_\Omega a_{\alpha\beta}(x) \, \varphi^{\ell_{\alpha\beta}}_{(x)} \, X^\alpha(x;D)u \, . \, \overline{X^\beta(x;D)v} \, dx$$

où $a_{\alpha\beta} \in C^\infty(\bar\Omega)$, $\mathcal{M} = \{(\alpha,\beta) \in \mathbb{N}^{q+1} \times \mathbb{N}^{q+1} \quad ; \quad |\alpha| \leqslant m \, , \quad |\beta| \leqslant m\}$, $\ell_{\alpha\beta} = 2(\alpha + \delta m) + (1-\delta)(\alpha_o + \beta_o) \in \mathbb{N}$ et $D = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$.

On suppose de plus que, pour $|\alpha| = |\beta| = m$, les coefficients $a_{\alpha\beta}(x)$ sont réels et symétriques.

On suppose aussi que la forme $a(u,v)$ est V-coercive, ie. : qu'il existe une constante $c > 0$ telle que : pour tout $v \in V$,

$$\mathrm{Re}\; a(v,v) \geqslant c . \| v \|^2_V .$$

On en déduit alors que :

(A) l'opérateur différentiel

$$L(x;D) \equiv \sum_{(\alpha,\beta)\in\mathcal{M}} X^\beta(x;D)\left(a_{\alpha\beta}(x)\, \varphi^{\ell_{\alpha\beta}}_{(x)}\, X^\alpha(x;D)\right)$$

est elliptique d'ordre $2m$ dans Ω ;

(B) pour tout $x \in \Gamma$ et pour tout vecteur $\xi \neq 0$ cotangent en x à Γ , la forme

$$a^{\xi,x}(u,v) = \int_0^{+\infty} \sum_{\substack{(\alpha,\beta)\in\mathcal{M} \\ |\alpha|=|\beta|=m}} a_{\alpha\beta}(x)\, t^{\ell_{\alpha\beta}} X^\alpha(x;\xi+\mathrm{grad}\,\varphi(x)D_t)u . \overline{X^\beta(x;\xi+\mathrm{grad}\,\varphi(x)D_t)v} \, dt$$

est fortement $V(\mathbb{R}_+)$-coercive ie : il existe $c_\xi > 0$ telle que : pour tout $v \in V(\mathbb{R}_+)$,

$$a^{\xi,x}(v,v) \geq c\,.\|v\|^2_{V(\mathbb{R}_+)}\ .$$

On a noté, par définition, $X_i(x;\xi+\mathrm{grad}\ \varphi(x)D_t) = X_i(x;\xi)$ pour $i = 1,\dots,q$ et $X_0(x;\xi+\mathrm{grad}\ \varphi(x)D_t) = X_0(x;\mathrm{grad}\ \varphi(x))D_t$.

On notera L (resp. $L^{\xi,x}$) l'opérateur associé au triplet $\{a,V,L^2(\Omega)\}$ (resp. $\{a^{\xi,x},V(\mathbb{R}_+),L^2(\mathbb{R}_+)\}$).

On a alors :

THEOREME I-1. - Pour tout $x \in \Gamma$, pour tout $\xi \neq 0$ vecteur cotangent en x à Γ , on a :

(i) l'opérateur $L^{\xi,x}$ est auto-adjoint strictement positif, à résolvante compacte si $\sigma + \delta m > 0$;

(ii) on suppose $-\sigma > \frac{1}{2}$ et $\sigma + \delta m > \frac{\delta}{2}$; alors, si $(\mu_{\xi,j}(x))_{j\geq 1}$ désigne la suite des valeurs propres de $L^{\xi,x}$, rangées par ordre croissant, il existe une constante $c > 0$ telle que :

$$\mu^{-1}_{\xi,j}(x) < c.j^{-2(\sigma+\delta m)/\delta}\ ;$$

(iii) on suppose de plus $n > \frac{\delta m}{\sigma + \delta m}$ et on pose :

$$\rho_j(x) = \int_{S_{T_x}} \mu^{\delta(n-1)/2}_{\omega,j}(x)\,d\omega\ ,$$

où S_{T_x} désigne la sphère unité du plan tangent T_x en x à Γ ; alors la série $\sum_{j\geq 1} \rho_j(x)$ est convergente et la somme est une fonction bornée sur Γ .

REMARQUE I-1. - Le résultat (ii) donnant une minoration des valeurs propres $\mu_{\xi,j}$ est en fait optimal comme le prouve le résultat de ([12]) ; en particulier pour $\delta = 1$, cela ne dépend pas de l'ordre de l'opérateur mais uniquement de la dégénérescence $k = (2\sigma + m)$.

L'injection de l'espace $W^m_{\sigma,\delta}(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ étant compacte, l'opérateur L admet une suite $(\lambda_j)_{j\geq 1}$ de valeurs propres que l'on supposera rangées par ordre croissant des modules et si on note :

$$N(\lambda) = \sum_{\mathrm{Re}\ \lambda_j \leq \lambda} 1\ ,$$

on a :

THEOREME I-2. - On suppose $\mathrm{Min}\ (-\sigma,-\sigma/\delta) > n/2$; on a alors :

(i) si $n > \frac{\delta m}{\sigma + \delta m}$, $N(\lambda)$ vérifie la formule asymptotique :

$$N(\lambda) = c.\lambda^{-\delta(n-1)/2\sigma} + \mathcal{O}(\lambda^{-\delta(n-1)/2\sigma})\ ,\quad \lambda \to +\infty$$

avec la constante c

$$c = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \cdot \int_\Gamma \Big[\sum_{j>1} \rho_j(x)\Big] d\sigma \; ;$$

(ii) si $n = \frac{\delta m}{\sigma + \delta m}$, $N(\lambda)$ vérifie la formule asymptotique :

$$N(\lambda) = c.\lambda^{n/2m} \operatorname{Log} \lambda + \mathcal{O}(\lambda^{n/2m}) \; , \quad \lambda \to +\infty \; ,$$

avec la constante c

$$c = \int_\Gamma \frac{w(x)}{\varphi(x) \; \| \operatorname{grad} \; \varphi(x) \|} d\sigma$$

où $$w(x) = \frac{2m}{n} \sin \frac{n}{2m} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\xi}{\sum\limits_{\substack{|\alpha|=|\beta|=m \\ (\alpha,\beta)\in\mathcal{M}}} a_{\alpha\beta}(x) \; \varphi^{\alpha,\beta}(x) \; \chi^{\alpha+\beta}(x;\xi) + 1} \; ;$$

(iii) si $n < \frac{\delta m}{\sigma + \delta m}$, $N(\lambda)$ vérifie la formule asymptotique :

$$N(\lambda) = v.\lambda^{n/2m} + \mathcal{O}(\lambda^{n/2m}) \; , \quad \lambda \to +\infty$$

avec la constante c

$$c = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_\Omega w(x) dx \; .$$

REMARQUE I-2. - La condition $n < \frac{\delta m}{\sigma + \delta m}$ est exactement la condition d'intégralité de la fonction W sur Ω ; la fonction W , au voisinage de Γ étant équivalente à $\varphi(x)^{-(\sigma n/m)-1-\delta(n-1)}$.

Précisons que ce théorème I-2 peut être amélioré dans le sens suivant : la condition $\operatorname{Min}(-\sigma, -\sigma/\delta) > \frac{n}{2}$ est inutile chaque fois que l'on sait établir le résultat de régularité optimal du domaine $D(L)$ de l'opérateur L , à savoir $D(L) \subset W^{2m}_{2\sigma,\delta}(\Omega)$. Ceci est vrai en particulier pour les opérateurs elliptiques ($\sigma = -m$ et $\delta = 1$) et pour les opérateurs considérés dans ([11]) et ([14]) ($\delta = 1$ et réalisation de Neumann). Cependant une telle régularité est fausse en général. Toutefois, on a le résultat suivant :

PROPOSITION I-1. - On a : $D(L) \subset W^{2m}_{2\sigma,\delta}(\Omega)$ dans les cas particuliers suivants :

(i) $\sigma = -m$ et $\delta \geq 1$ ($\delta = 1$, cas elliptique ; $\delta > 1$, cas ([2]) et ([15])) ;

(ii) $\delta \geq 1$ et réalisation de Neumann (ie : $V = W^m_{\sigma,\delta}(\Omega)$) ou réalisation de Dirichlet "modifié" (ie : $V = V_\ell(\Omega)$ avec $\ell = -2\sigma - m$) ;

(iii) réalisation de Neumann ou de Dirichlet "modifié" pour les opérateurs différentiels de la forme :

$$L \equiv \Lambda^{*m} \varphi^{2(\sigma+m)} \Lambda^m + \sum_{i,j=1}^{n} \Lambda^{*m}_{ij} \varphi^{2(\sigma+\delta m)} \Lambda^m_{ij}$$

où Λ est un champ de vecteurs transversal à Γ sur Γ et où

$$\Lambda_{ij} = \varphi_i \frac{\partial}{\partial x_j} - \varphi_j \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{avec} \quad \varphi_k = \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}$$

(P^* désigne l'adjoint formel de l'opérateur P).

Cette proposition s'établit par les mêmes méthodes que dans [4].

II. - DEMONSTRATION DES THEOREMES I-1 et I-2

Le principe de la démonstration est celui de l'estimation des résolvantes $R_\lambda = (L + \lambda I)^{-1}$ comme dans [1] pour le cas elliptique et [11] pour un cas particulier.

Etant donné qu'il n'y a pas, en général, la régularité optimale du domaine $D(L)$, nous sommes amenés à raisonner directement sur la forme $a(u,v)$ comme dans [7]. On commence donc par établir un résultat abstrait qui est utile à la fois pour le théorème I-1 et le théorème I-2.

II-1. - RESULTAT ABSTRAIT

Soit V un espace de Hilbert dense dans $L^2(\Omega)$. On suppose que V s'injecte continûment dans $L^2(\Omega)$ et que :

$$V \subset C^0(\Omega)$$

de façon compacte.

On suppose de plus que l'on a l'estimation du type Sobolev :

$$\text{(S)} \qquad \forall\, u \in V \,,\ \forall\, x \in \Omega \,;\ |u(x)| \leqslant c.\, \varphi^{-\alpha}(x) \| u \|_V^\gamma \| u \|_{L^2}^{1-\gamma}$$

avec $\alpha, \gamma \geqslant 0$, φ une fonction > 0 sur Ω et c une constante indépendante de u dans V.

Soit V' l'antidual de V et T un opérateur linéaire continu de V' dans V. On notera $<,>$ la dualité entre V et V' dont la restriction à $L^2(\Omega)$ est le produit scalaire de $L^2(\Omega)$.

Enfin, on notera $\| T \|_{V',V}$ la norme de l'opérateur T agissant de V' dans V et de manière analogue les normes $\|T\|_{V',L^2}$, $\|T\|_{L^2,V}$ et $\|T\|_{L^2,L^2}$. On a alors :

THEOREME II-1.1. - *L'opérateur T, considéré comme un opérateur de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est un opérateur intégral avec un noyau $K(x,y)$ continu sur $\Omega \times \Omega$ et vérifiant :*

$$|K(x,y)| \leqslant c^2.[\varphi(x)\,\varphi(y)]^{-\alpha} (\| T \|_{V',V}^\gamma \, \| T \|_{V',L^2}^{1-\gamma})^\gamma \, (\| T \|_{L^2,V}^\gamma \, \| T \|_{L^2,L^2}^{1-\gamma})^{1-\gamma}$$

On va appliquer ce résultat à une situation variationnelle : soit $a(u,v)$ une forme sesquilinéaire continue sur $V \times V$, V-coercive ie : pour tout $u \in V$

$$\mathrm{Re}\, a(u,u) \geq c.\| u \|_V^2$$

avec une constante $c > 0$ indépendante de u .

On note L l'opérateur associé au triplet $\{a,V;L^2\}$. Pour tout $\lambda \geq 0$, la forme $a_\lambda(u,v) = a(u,v) + \lambda\langle u,v\rangle$ est V-coercive et l'opérateur associé est $L + \lambda I$ où I est l'injection canonique de V dans V' . On notera $R_\lambda = (L + \lambda I)^{-1}$, on a alors :

PROPOSITION II-1.1. - Pour tout $\lambda > 0$, on a :

$$\| R_\lambda \|_{V',V} \leq c \quad ; \quad \| R_\lambda \|_{V',L^2} \leq \frac{c}{\sqrt{\lambda}} \quad ; \quad \| R_\lambda \|_{L^2,V} \leq \frac{c}{\sqrt{\lambda}} \quad ; \quad \| R_\lambda \|_{L^2,L^2} \leq \frac{c}{\lambda} .$$

Cette proposition est immédiate ; on en déduit avec le théorème II-1.1 le

COROLLAIRE II-1.1. - L'opérateur R_λ , considéré comme opérateur de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, est un opérateur intégral avec un noyau $R_\lambda(x,y)$ continu sur $\Omega \times \Omega$ tel que : pour tout $(x,y) \in \Omega \times \Omega$,

$$|R_\lambda(x,y)| \leq c.[\varphi(x)\,\varphi(y)]^{-\alpha}\, \lambda^{-1+\gamma} . \tag{2.1}$$

On va maintenant appliquer ces résultats au cas où V est un sous-espace de l'espace $W^m_{\sigma,\delta}(\Omega)$; ceci nous amène à établir des théorèmes de plongement du type "Sobolev avec poids" pour les espaces $W^m_{\sigma,\delta}(\Omega)$.

II-2. - INEGALITES DU TYPE SOBOLEV

Soient $W^m_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}^n_+)$ l'espace : $W^m_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}^n_+) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n_+)$; $t^{\sigma+\delta|\alpha|+j} D^j_t D^\alpha_x u \in L^2(\mathbb{R}^n_+)$, $\sigma + \delta|\alpha| + j \geq 0,$ $|\alpha| + j \leq m\}$ pour $n > 1$ et $W^m_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}_+) = \{u \in L^2(\mathbb{R}_+)$; $t^{\sigma+\delta k+j} D^j_t u \in L^2(\mathbb{R}_+)$, $\sigma + \delta k + j \leq 0$, $k + j \leq m\}$. On a alors :

PROPOSITION II-2.1. - On a :

(i) $W^m_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}_+) \subset H^{-\sigma}(\mathbb{R}_+)$;

(ii) si $u \in W^m_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}_+)$, u est continue sur $\mathbb{R}_+$ et il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $u \in W^m_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}_+)$, pour tout $t > 0$, on ait :

$$|u(t)| \leq c.t^{-(\sigma+m)/2m}\, \| u \|^{1/2m}_{W^m_{\sigma,\delta}}\, \| u \|^{1-1/2m}_{L^2} ;$$

(iii) on suppose $-\sigma > 1/2$; alors si $u \in W^m_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}_+)$, u est continue bornée sur $\mathbb{R}_+$ et il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $u \in W^m_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}_+)$, pour tout $t > 0$, on ait :

$$|u(t)| \leqslant c.\| u \|_{W^m_{\sigma,\delta}}^{-1/2\sigma} \| u \|_{L^2}^{1+1/2\sigma} \; ;$$

$$|u(t)| \leqslant c.t^{-(\sigma+\delta m)+1/2(\delta-1)} \; \| u \|_{W^m_{\sigma,\delta}} \; .$$

La dernière inégalité traduit le comportement de u *au voisinage de* $t = +\infty$.

PROPOSITION II-2.2. - *Pour* $n > 1$, *on a* :

(i) $W^m_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}^n_+) \subset H^{\mathrm{Min}(-\sigma,-\sigma/\delta)}(\mathbb{R}^n_+)$;

(ii) *on suppose* $m > \frac{n}{2}$; *alors si* $u \in W^m_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}^n_+)$, u *est continue sur* $\mathbb{R}^n_+$ *et il existe une constante* $c > 0$ *telle que, pour tout* $u \in W^m_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}^n_+)$, *pour tout* $(t,x) \in \mathbb{R}^n_+$, *on ait*

$$|u(t,x)| \leqslant c.t^{-((\sigma+m)/2m)-((n-1)/2m)(\sigma+\delta m)} \|u\|_{W^m_{\sigma,\delta}}^{n/2m} \; \|u\|_{L^2}^{1-(n/2m)} \; ;$$

(iii) *on suppose* $\mathrm{Min}(-\sigma,-\frac{\sigma}{\delta}) \quad \frac{n}{2}$; *alors si* $u \in W^m_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}^n_+)$, u *est continue et bornée sur* $\mathbb{R}^n_+$ *et il existe une constante* $c > 0$ *telle que, pour tout* $u \in W^m_{\sigma,\delta}(\mathbb{R}^n_+)$, *pour tout* $(t,x) \in \mathbb{R}^n_+$ *on ait* :

$$|u(t,x)| \leqslant c.\| u \|_{W^m_{\sigma,\delta}}^{-(1+\delta(n-1))/2\sigma} \| u \|_{L^2}^{1+((1+\delta(n-1))/2\sigma)}$$

De cette proposition II-2.2, on déduit la

PROPOSITION II-2.3. - *On a* :

(i) $W^m_{\sigma,\delta}(\Omega) \subset H^{\mathrm{Min}(-\sigma,-\sigma/\delta)}(\Omega)$;

(ii) *on suppose* $m > n/2$; *alors si* $u \in W^m_{\sigma,\delta}(\Omega)$, u *est continue sur* Ω *et il existe une constante* $c > 0$ *telle que, pour tout* $u \in W^m_{\sigma,\delta}(\Omega)$, *pour tout* $x \in \Omega$, *on ait* :

$$|u(x)| \leqslant c.\, \varphi(x)^{-((\sigma+m)/2m)-((n-1)/2m)(\sigma+\delta m)} \; \| u \|_{W^m_{\sigma,\delta}}^{n/2m} \; \| u \|_{L^2}^{1-(n/2m)} \; ;$$

(iii) *on suppose* $\mathrm{Min}\,(-\sigma,-\frac{\sigma}{\delta}) > \frac{n}{2}$; *alors si* $u \in W^m_{\sigma,\delta}(\Omega)$, u *est continue et bornée sur* Ω *et il existe une constante* $c > 0$ *telle que pour tout* $u \in W^m_{\sigma,\delta}(\Omega)$, *pour tout* $x \in \Omega$, *on ait* :

$$|u(x)| \leqslant c.\| u \|_{W^m_{\sigma,\delta}}^{-(1+\delta(n-1)/2\sigma} \; \| u \|_{L^2}^{1+((1+\delta(n-1)/2\sigma)} \; .$$

La démonstration des propositions II-2.2 et II-2.3 est basée sur la théorème classique de plongement de Sobolev.

On peut maintenant établir le théorème II-1.1 concernant le problème spectral à une variable.

II.3. - DEMONSTRATION DU THEOREME I-1

En combinant le théorème II-1.1 et la proposition II-2.1 on obtient facilement le théorème I-1, l'opérateur $L^{\xi,x}$ étant auto-adjoint $\geqslant 0$: la consition $-\sigma > \frac{1}{2}$ est exactement la condition de Sobolev pour que $V(\mathbb{R}_+) \hookrightarrow C^o(\mathbb{R}_+)$; la condition $\sigma + \delta m > \frac{\delta}{2}$ traduit l'intégrabilité sur la diagonale du noyau $G^{\xi,x}(t,\tau)$ associé à l'opérateur $(L^{\xi,x} + \lambda I)^{-1}$.

Utilisant ensuite la formule classique

$$\sum_{j\geqslant 1} (\mu_{\xi,j}(x) + \lambda)^{-1} = \int_o^{+\infty} G_\lambda^{\xi,x}(t,t)dt$$

on obtient la minoration donnée des valeurs propres $\mu_{\xi,j}(x)$ de $L^{\xi,x}$.

L'assertion (iii) du théorème I-1 est immédiate ; cette condition (iii) est en relation avec l'étude d'un modèle dans le demi-espace $\mathbb{R}_+^n$ lorsque la dimension n satisfait l'inégalité : $n > \frac{\delta m}{\sigma + \delta m}$.

II-4. - ETUDE D'UN MODELE SUR $\mathbb{R}_+^n$ LORSQUE $n > \frac{\delta m}{\sigma + \delta m}$

Soit $a(u,v)$ la forme intégro-différentielle définie sur $V(\mathbb{R}_+^n)$ par :

$$a(u,v) = \int_{\mathbb{R}_+^n} \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta} y_n^{\ell_{\alpha\beta}} D_y^\alpha u \cdot \overline{D_y^\beta v}\, dy$$

où $\ell_{\alpha\beta} = 2(\sigma + \delta m) + (1 - \delta)(\alpha_n + \beta_n)$, $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha} \in \mathbb{R}$.

On suppose que cette forme a est $V(\mathbb{R}_+^n)$-coercive.

Soit L l'opérateur associé au triplet $\{a,V,L^2\}$ et $G_\lambda = (L + \lambda I)^{-1}$ pour $\lambda \geqslant 0$.

Pour chaque vecteur $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$, on considère la forme a^ξ définie sur $V(\mathbb{R}_+)$ par :

$$a^\xi(u,v) = \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta} \int_o^{+\infty} y_n^{\ell_{\alpha\beta}} \xi^{\alpha'+\beta'} D_{y_n}^{\alpha_n} u \cdot \overline{D_{y_n}^{\beta_n} v}\, dy_n$$

où $\alpha = (\alpha',\alpha_n)$ et $\beta = (\beta',\beta_n)$.

La forme a étant $V(\mathbb{R}_+^n)$-coercive, la forme a^ξ est $V(\mathbb{R}_+)$-coercive. On notera L^ξ l'opérateur associé au triplet $\{a , V(\mathbb{R}_+), L^2(\mathbb{R}_+)\}$ et $G_\lambda^\xi = (L^\xi + \lambda I)^{-1}$.

On peut alors exprimer le noyau $G_\lambda(y,z)$ de G_λ en fonction du noyau $G_\lambda(t,\tau)$ de G_λ^ξ , de façon précise, on a :

PROPOSITION II-4.1. - <u>On suppose</u> $\mathrm{Min}\,(-\sigma,-\frac{\sigma}{\delta}) > \frac{n}{2}$. <u>Alors, pour tout</u> $\lambda > 0$, <u>la résolvante</u> G_λ <u>de</u> L <u>existe et est un opérateur à noyau</u> $G_\lambda(y,z)$ <u>continu sur</u> $\mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^n$ <u>et on a : pour tout</u> $(y,z) \in \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^n$:

$$G_\lambda(y,z) = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{i<y'-z',\xi>} \lambda |\xi|^{(2\sigma+1)/\delta} G^{\omega}_{|\xi|^{2\sigma/\delta}} (y_n |\xi|^{1/\delta}, z_n |\xi|^{1/\delta}) d\xi$$

où $\omega = \xi/|\xi|$.

On obtient alors le résultat suivant :

THEOREME II-4.1. - On suppose $\mathrm{Min}\,(-\sigma, -\frac{\sigma}{\delta}) > \frac{n}{2}$ et $n > \frac{\delta m}{\sigma + \delta m}$. On note, pour simplifier $G_\lambda(y_n,y_n)$ pour $G_\lambda((0,y_n),(0,y_n))$. Désignons par $(\mu_{\omega,j})_{j\geqslant 1}$ la suite des valeurs propres de L^ω , rangées par ordre croissant. Alors, pour tout $\lambda > 0$, $G_\lambda(y_n,y_n)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et on a :

$$\int_0^{+\infty} G_\lambda(y_n,y_n)\,dy_n = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \cdot \frac{\delta\pi(n-1)}{2\sigma} \cdot \left(\sin \frac{\delta\pi(n-1)}{2\sigma}\right)^{-1} \cdot \left[\sum_{j\geqslant 1} \rho_j\right] . \lambda^{-1-(\delta(n-1)/2\sigma)}$$

où $\rho_j = \frac{1}{n-1} \int_{S^{n-2}} \mu_{\omega,j}^{\delta(n-1)/2\sigma} d\omega$, S^{n-2} désignant la sphère unité de $\mathbb{R}^{n-1}$.

La condition $n > \frac{\delta m}{\sigma + \delta m}$ traduit, avec l'estimation (ii) théorème I-1 des valeurs propres $\mu_{\omega,j}$ de l'opérateur L^ω , la convergence de la série $\sum_{j\geqslant 1} \rho_j$.

On déduit en particulier du théorème II-4.1 que :

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda^{1+(\delta(n-1)/2\sigma)} \int_0^{+\infty} G_\lambda(y_n,y_n)\,dy_n = \gamma$$

existe.

Utilisant les estimations (2.1) du noyau G_λ et la proposition II-2.2, on en déduit aussitôt que l'on a aussi : pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda^{1+(\delta(n-1)/2\sigma)} \int_0^{\varepsilon} G_\lambda(y_n,y_n)\,dy_n = \gamma .$$

Cette remarque est la base de la démonstration du théorème I-2 (i).

II-5. - DEMONSTRATION DU THEOREME I-2 (i)

Pour $x_\Gamma \in \Gamma$, on considère l'équation différentielle :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = X_0(x) \\ x(0) = x_\Gamma . \end{cases}$$

Cette équation admet une solution unique $x(t;x_\Gamma)$ définie pour $|t| \leqslant \eta_0$ indépendant de $x_\Gamma \in \Gamma$.

Désignons par R_λ l'opérateur $(L + \lambda I)^{-1}$; on a alors :

PROPOSITION II-5.1. - On suppose qu'il existe une fonction $\gamma(x_\Gamma)$ définie et continue sur Γ telle que : il existe $\tau > 0$ tel que :

$$(2.2)\qquad \lim_{\lambda\to+\infty} \lambda^{1+(\delta(n-1)/2\sigma)} \int_0^\tau R_\lambda(x(t;x_T),\, x(t;x_T))dt = \gamma(x_T)\ .$$

Alors, sous les hypothèses $\mathrm{Min}\,(-\sigma, -\frac{\sigma}{\delta}) > \frac{n}{2}$ et $n > \frac{\delta m}{\sigma + \delta m}$, pour tout $\lambda \geq 0$ la résolvante R_λ de L existe et est un opérateur à noyau $R_\lambda(x,x')$ continu sur $\Omega \times \Omega$ et on a :

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda^{1+(\delta(n-1)2\sigma)} \int_\Omega R_\lambda(x,x)dx = \int_\Gamma X_o(x_T;\nu_{x_T})\gamma(x_T)d\sigma$$

où ν_{x_Γ} désigne la normale unitaire, intérieurs à Ω, en x_T à Γ.

Cette proposition résulte des estimations (2.1) du noyau R_λ, de la proposition II-2.3 et de la formule suivante : pour une fonction continue ≥ 0, on a :

$$\int_{\Omega_\eta} f(x)dx = \{\int_\Gamma (X_o(x;x_T) \int_o^\eta f(x(t;x_T))dt)d\sigma\} \qquad (1 + 0(\eta))$$

pour η tendant vers 0 où $\Omega_\eta = \{x = x(t;x_T)\ ;\ x_T \in \Gamma\ ,\quad 0 < t < \eta\}$.

Pour établit la formule (2.2), on procède par cartes locales, associées à des difféomorphismes convenables, et on se ramène au cas du demi-espace $\mathbb{R}^n_+$ pour lequel on utilise les résultats du paragraphe précédent. Les diverses réductions pour se ramener au cas du modèle à coefficients constants dans le demi-espace sont basées sur le lemme de compacité suivant :

LEMME II-5.1. - Soient m un entier ≥ 1 et $\delta_1 = \mathrm{Min}\,(1,\delta)$. Il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $u \in W^m_{\sigma,\delta}(\Omega)$, on ait :

$$\| u \|_{W^{m-1}_{\sigma+\delta_1,\delta}(\Omega)} \leq c.\{\varepsilon \| u \|_{W^m_{\sigma,\delta}(\Omega)} + \varepsilon^{-m+1} \| u \|_{L^2(\Omega)}\}\ .$$

De la proposition II-5.1 et du paragraphe II-4, on déduit donc que :

$$(2.3)\qquad \int_\Omega R_\lambda(x,x)dx = c.\lambda^{-\delta(n-1)/2\sigma} + \mathcal{O}(\lambda^{-\delta(n-1)/2\sigma})\ ,\quad \lambda\to+\infty$$

où $c = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \cdot \int_\Gamma \left[\sum_{j\geq 1} \rho_j(x)\right] d\sigma$ avec $\rho_j(x) = \int_{S_{T_x}} \mu_{\omega,j}^{\delta(n-1)/2\sigma}(x)d\omega$.

Par ailleurs, en suivant la méthode d'Agmon [1], on a la formule

$$(2.4)\qquad \sum_{j\geq 1} \frac{1}{\lambda_j + \lambda} = \int_\Gamma R_\lambda(x,x)dx$$

$(\lambda_j)_{j\geq 1}$ étant la suite des valeurs propres de l'opérateur L, rangées par ordre croissant des modules.

Pour obtenir le comportement asymptotique de la fonction $N(\lambda) = \sum_{\mathrm{Re}\,\lambda_j\leq\lambda} 1$, on va estimer la série $\sum_{j\geq 1} \frac{1}{\mathrm{Re}\,\lambda_j + \lambda}$ pour $\lambda\to+\infty$.

Les formules (2.3) et (2.4) donnent une estimation de la série $\sum_{j\geq 1} \frac{1}{\lambda_j + \lambda}$. Et pour comparer les séries $\sum_{j\geq 1} \frac{1}{\lambda_j + \lambda}$ et $\sum_{j\geq 1} \frac{1}{\mathrm{Re}\,\lambda_j + \lambda}$, on a besoin de localiser les valeurs propres λ_j de l'opérateur L^j dans le plan complexe. De façon précise, on a :

PROPOSITION II-5.2. - On a :

(i) Il existe une constante $c_1 > 0$ telle que l'ensemble résolvant $\rho(L)$ de L, considéré comme opérateur de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, contienne l'ensemble

$$\mathcal{R} = \{\mu \in \mathbb{C} ;\ \mathrm{Re}\,\mu \leqslant 0\} \cup \{\mu \in \mathbb{C} ;\ |\mathrm{Im}\,\mu| \geqslant c_1|\mu|^{1-(1/2m)} ,\ |\mu| \geqslant c_1\} ;$$

(ii) Il existe une constante $c_2 > 0$ telle que, pour tout $\mu \in \mathcal{R}$, $\mu \neq 0$, on ait :

$$\| (L - \mu I)^{-1} \|_{L^2,L^2} \leqslant \frac{c_2}{d(\mu)}$$

où $d(\mu)$ désigne la distance de μ à $\mathbb{R}_+$.
En particulier, pour $0 < \theta < 2\pi$, $e^{i\theta}$ est une direction de croissance minimale de la résolvante.

Cette proposition résulte immédiatement de la coercivité de la forme a et du lemme II-5.1.

Il résulte alors de cette proposition qu'il existe une constante $c > 0$ telle que : pour $\lambda > 0$ assez grand, on ait :

$$\left| \sum_{j\geq 1} \frac{1}{\lambda_j + \lambda} - \sum_{j\geq 1} \frac{1}{\mathrm{Re}\,\lambda_j + \lambda} \right| < c.|\lambda|^{-1/2m} \left| \sum_{j\geq 1} \frac{1}{\lambda_j + \lambda} \right| .$$

Finalement,

$$\sum_{j\geq 1} \frac{1}{\mathrm{Re}\,\lambda_j + \lambda} = c.\lambda^{-\delta(n-1)/2\sigma} + \mathcal{O}(\lambda^{-\delta(n-1)/2\sigma}) , \quad \lambda \to +\infty$$

et l'assertion (i) du théorème II-2 résulte du lemme Taubérien classique (cf. ([1]) p. 248 par exemple).

II-6. - DEMONSTRATION DU THEOREME I-2 (iii)

Pour tout $x \in \Omega$, on considère l'opérateur elliptique d'ordre $2m$ à coefficients constants

$$L'(x,D) + \lambda \equiv \sum_{\substack{|\alpha|=|\beta|=m \\ (\alpha,\beta)\in \mathcal{M}}} a_{\alpha\beta}(x)\, \varphi^{\ell_{\alpha\beta}}(x)\, \chi^{\alpha+\beta}(x;D) + \lambda$$

où $\lambda > 0$.

Cet opérateur admet une solution élémentaire $F_{x,\lambda}(y)$ définie par :

$$F_{x,\lambda}(y) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{i<y,\xi>}}{L'(x;\xi) + \lambda}\, d\xi \ ,$$

et si $n < \frac{\delta m}{\sigma + \delta m}$, la fonction $x \mapsto F_{x,\lambda}(0)$ est intégrable sur Ω .

On compare alors les noyaux $R_\lambda(x,x)$ et $F_{x,\lambda}(0)$, de façon précise on démontre que

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \lambda^{1-(n/2m)} \int_\Omega [R_\lambda(x,x) - F_{x,\lambda}(0)]\, dx = 0 \ .$$

On termine ensuite comme dans le paragraphe II-5.

II-7. - DEMONSTRATION DU THEOREME I-2 (ii)

On procède comme dans ([12]) avec des modifications techniques supplémentaires.

BIBLIOGRAPHIE

([1]) S. AGMON, lectures on elliptic boundary value problems, Van Nostrand Mathematical Studies, Princeton (1965).

([2]) M. S. BAOUENDI, Sur une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés, Thèse Paris (1966), Bull. Soc. Math. France 95 (1967), 45-87.

([3]) M. S. BOUENDI - C. GOULAOUIC, Régularité et théorie spectrale pour une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés, Arch. Rational Mech. Anal. 34 (1969), 361-379.

([4]) P. BOLLEY - J. CAMUS, Régularité pour une classe de problèmes aux limites elliptiques dégénérées variationnels, Boll. Un. Mat. Ital. (5) 14B (1977), 77-100

([5]) P. BOLLEY - J. CAMUS - B. HELFFER, Sur une classe d'opérateurs partiellement hypoelliptiques, J. Math. Pures Appl. 55 (1966), 131-171.

([6]) M. GUILLEMOT-TESSIER, Application des méthodes variationnelles à l'étude spectrale d'opérateurs dégénérés, C. R. Acad. Sc. Paris 277 (1973), 739-742.

([7]) K. MARUO - H. TANABE, On the asymptotic distribution of eigenvalues of operators associated with strongly elliptic sesquilinear forms, Osaka J. Math. 8 (1971), 323-345.

([8]) A. MENIKOFF - J. SJOSTRAND, Exposé à ce colloque plus communication personnelle.

([9]) G. METIVIER, Comportement asymptotique des valeurs propres d'opérateurs elliptiques dégénérés, Astérisque 34-35 (1976), 215-249.

([10]) C. NORDIN, The asymptotic distribution of eigenvalues of a degenerate elliptic operator, Ark. Mat. 10 (1972), 3-21.

([11]) PHAM THE LAI, Comportement asymptotique du noyau de la résolvante et des valeurs propres d'une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés non nécessairement auto-adjoints, J. Math. Pures Appl. 55 (1976), 379-420.

([12]) PHAM THE LAI, Comportement asymptotique des valeurs propres d'une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés en dimension 2, C. R. Acad. Sc. Paris 278 (1974), 1619-1622. - Séminaire Jean Leray, Collège de France.

(13) PHAM THE LAI - D. ROBERT, Exposé à ce colloque.

(14) M. TOUGERON-SABLE, Comportement asymptotique des valeurs propres pour une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés, A paraître Tôhoku Math. J..

(15) M. I. VISIK - V. V. GRUSIN, On a class of higher order degenerate elliptic equations, Math. USSR-Sb. 8 (1969) n°1.

(16) I. L. VULIS - M. Z. SOLOMJAK, Spectral asymptotic behavior of degenerate elliptic operators, Soviet. Math. Dokl. 13 (1972), 1484-1488.

Pierre BOLLEY et PHAM THE LAI
Université de Nantes
Institut de Mathématiques et d"Informatique

44072 NANTES CEDEX

Jacques CAMUS
Université de Rennes
Département de Mathématiques

35031 RENNES CEDEX