

CLAUDE MATTERA

**Théorème de traces pour une classe d'espaces  
de Sobolev singuliers**

*Journées Équations aux dérivées partielles* (1977), p. 130-156

<[http://www.numdam.org/item?id=JEDP\\_1977\\_\\_\\_\\_130\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1977____130_0)>

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

THEOREME DE TRACES POUR UNE CLASSE D'ESPACES DE SOBOLEV SINGULIERS

par

C. MATTERA

I. INTRODUCTION

$R_+^n$  désigne le demi-espace :  $R_+^n = \{(x,t) , x \in R^{n-1} , t > 0\}$  .

On étudie les traces des espaces de Sobolev avec poids :

$$W^m(B_+) = \{v \in F , \varphi_{\alpha,j}(x,t) \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^j}{\partial t^j} v(x,t) \in L^2(B_+) , |\alpha|+j \leq m\}$$

munis de leur semi-norme canonique avec les notations :  $B_+ = B_0 \times ]0, \beta[$  ,  $B_0$  ouvert de  $R^{n-1}$  ,  $\beta \in \bar{R}_+$  ;  $F$  est un espace de distributions (par exemple  $\mathcal{D}'(B_+)$ ) qui sera précisé à chaque fois ;  $\varphi_{\alpha,j}(x,t)$  sont des fonctions continues sur  $B_+$  à valeurs réelles.

On utilisera les définitions et les notations de (1<sup>0</sup>) (1<sup>7</sup>) pour les espaces de distributions.

Déterminer les traces de tels espaces, c'est définir un entier  $p \in Z$  ,  $p \geq -1$  (il y aura au total  $p+1$  traces), des mesurables  $M_j$  de  $B_0$  ,  $0 < j < p$  , et une topologie semi-normée sur les fonctions mesurables sur  $M_j$  tels que, si  $T_j^m$  est l'espace topologique ainsi défini, l'application  $\gamma_j : v \rightarrow v_j(x) = \frac{\partial^j v}{\partial t^j}(x,0)$  soit linéaire et continue de  $W^m(B_+)$  dans  $T_j^m$  ( $0 \leq j \leq p$ ) et qu'il existe une application inverse (relèvement)  $R_j$  telle que  $\gamma_j \circ R_j = Id_{T_j^m}$  où  $Id_{T_j^m}$  est l'application identique dans  $T_j^m$  .

On peut aussi chercher l'ensemble parcouru par  $(y_0 v, y_1 v, \dots, y_p v)$  qui sera noté  $T^m$  . Il est en général différent du produit des  $T_j^m$  . On notera  $R$  le relève-

ment associé.

On utilisera la notation :  $v_j^\alpha(x) = \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^j}{\partial t^j} v(x,0)$  pour  $\alpha \in \mathbb{N}^{n-1}$  et  $x \in M_j$ .

Le cas  $\varphi_{\alpha,j}(x,t) \equiv 1$  pour tout  $(\alpha,j)$  (espace  $H^m$ ) a fait l'objet de nombreuses études (cf. <sup>(13)</sup> <sup>(14)</sup> <sup>(16)</sup> et leurs bibliographies). Deux méthodes peuvent être employées :

- l'utilisation de la transformée de Fourier tangentielle qui ramène à l'étude sur  $R_+$ , dépendant d'un paramètre ;
- l'interpolation <sup>(14)</sup>.

Des espaces singuliers pour lesquels  $\varphi_{\alpha,j}(x,t) = t^{\mu(\alpha,j)}$  ont été traités par des méthodes analogues <sup>(3)</sup> <sup>(4)</sup>.

Ces méthodes ne s'appliquent pas lorsque la dégénérescence est plus complexe. C'est ce que l'on va étudier ci-dessous, en particulier lorsque les fonctions poids sont :

- soit des fonctions de  $x$  seul,
- soit des fonctions de  $t^2 + |x|^2$  où  $|x| = \left( \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 \right)^{1/2}$ ,
- soit des fonctions de  $t+b(x)$ ,  $b(x)$  fonction  $C^\infty$  de  $R^{n-1}$ , et, même parfois, des fonctions plus générales.

Remarquons que des problèmes différents mais aussi singuliers ont été étudiés dans <sup>(5)</sup> <sup>(6)</sup> <sup>(18)</sup> : il s'agit de l'étude des traces des espaces  $H^m$  dans des ouverts à bord irrégulier.

Les techniques utilisées sont celles inspirées par les semi-groupes <sup>(13)</sup> <sup>(14)</sup>, le relèvement étant donné explicitement par un noyau de convolution. On reviendra plus loin sur le détail de ces méthodes.

Les mêmes techniques peuvent s'appliquer à l'étude d'espaces dans des ouverts non bornés <sup>(2)</sup> <sup>(8)</sup> <sup>(11)</sup>, avec dégénérescence à l'infini.

Dans le cas qui nous intéresse (bord régulier, ouvert borné mais fonctions poids singulières), les méthodes ci-dessus ne s'appliquent qu'avec de très notables modifications que l'on va décrire dans le reste de l'exposé.

Remarquons que certains espaces en  $\varphi_{\alpha,j}(x,t) = (t^2 + |x|^2)^{\mu(\alpha,j)}$  ont été étudiés par A. Kufner <sup>(12)</sup> du point de vue de la densité des fonctions régulières et des propriétés de dérivées intermédiaires. Mais les traces ne sont pas obtenues. Terminons en remarquant que l'intérêt du problème vient de ce que la régularité des opérateurs naturellement associés à ces espaces commence à être connue <sup>(7)</sup> <sup>(15)</sup>.

## II. ETUDE DE RELATIONS NORMALES

On commence par étudier les espaces  $W^m(B_+)$  où  $\varphi_{\alpha,j}(x,t) \equiv 0$  pour  $\alpha \neq 0$ .

### 1. 1er espace

Soient  $\varphi_1(x)$  des fonctions  $C^\infty$  de la seule variable  $x$ , et considérons l'espace  $W^m(B_+)$  suivant :

$$W^m(B_+) = \{v \in \mathcal{D}'(B_+), \varphi_0(x) v(x,t) \in L^2(B_+), \varphi_1(x) \frac{\partial v}{\partial t} \in L^2(B_+), \\ \varphi_m(x) \frac{\partial^m v}{\partial t^m}(x,t) \in L^2(B_+)\}$$

muni de sa semi-norme naturelle que l'on suppose ici être une norme ( $\varphi_0(x) \neq 0$  sur  $B_0$ ) ( $B_0$  borné ou non).

Les résultats sont les mêmes si on a seulement  $\varphi_1(x) \in L^\infty_{loc}(B_0)$ .

On donne d'abord le résultat pour  $\beta$  infini : les traces des fonctions de  $W^m(B_+)$  sont caractérisées par :

THEOREME 1. - Soit  $j \leq m-1$ , la jème trace existe si  $M_j = \bigcup_{q>0} \{x, \varphi_{j+q}(x) \neq 0\}$  vérifie : mesure de  $M_j \neq 0$ .

$$\text{Soit } p_j^1(x) = \sup \left\{ \left| \varphi_\ell(x) \right| \left| \frac{\varphi_{j+q}(x)}{\varphi_\ell(x)} \right| \right\}^{\frac{2j-2\ell+1}{2j+2q-2}}, \text{ l'espace topologique est :}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_\ell(x) \neq 0 \cap \varphi_{j+q}(x) \neq 0 \\ \ell \leq j \text{ et } q > 0 \end{array} \right.$$

$T_j^m = \{v_j(x) \text{ fonctions mesurables sur } M_j \text{ telles que } p_j^1(x) v_j(x) \in L^2(M_j)\}$  avec la semi-norme  $\|p_j^1(x) v_j(x)\|_{L^2(M_j)}$ .

Si  $\beta$  est fini, les traces des fonctions de  $W^m(B_+)$  qui, pour tout  $x$ , sont à support compact dans  $[0, \beta[$  sont caractérisées par :

THEOREME 1 bis. - Soit  $j \leq m-1$ , la jème trace existe si  $M_j = \bigcup_{q>0} \{x, \varphi_{j+q}(x) \neq 0\}$  vérifie : mesure de  $M_j \neq 0$ .

$$\text{Soit } p_j^2(x) = \sup_{\substack{q>0, \ell \leq j \\ \varphi_\ell(x) \neq 0 \cap \varphi_{j+q}(x) \neq 0}} \left\{ \left| \varphi_{j+q}(x) \right|, \left| \varphi_\ell(x) \right| \left| \frac{\varphi_{j+q}(x)}{\varphi_\ell(x)} \right| \right\}^{\frac{2j-2\ell+1}{2j+2q-2}}.$$

$T_j^m = \{v_j(x) \text{ fonctions mesurables sur } M_j \text{ telles que } p_j^2(x) v_j(x) \in L^2(M_j)\}$  avec la semi-norme  $\|p_j^2(x) v_j(x)\|_{L^2(M_j)}$ .

REMARQUE 1. - En dehors de  $M_j$ , il n'existe pas de trace, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de  $c > 0$  telle que, pour toute  $v \in W^m(B_+)$ ,

$$|y(x)|^2 \leq c \left\{ \sum_{i=0}^m \int_0^\beta (\psi_i(x))^2 \left| \frac{\partial^i v}{\partial t^i}(x,t) \right|^2 dt \right\}.$$

REMARQUE 2. - Autre expression du poids :

$$|\psi_\ell(x)| \left| \frac{\psi_{j+q}(x)}{\psi_\ell(x)} \right|^{\frac{2j-2\ell+1}{2j+2q-2\ell}} = |\psi_\ell(x)|^{\frac{2q-1}{2j+2q-2\ell}} |\psi_{j+q}(x)|^{\frac{2j-2\ell+1}{2j+2q-2\ell}}.$$

## 2) 2ème espace

Soient  $r \in \mathbb{N}$ ,  $b(x)$  une fonction  $C^\infty$ , définie sur tout  $B_0$ ,  $b(x) \geq 0$  (si  $b(x) = |x|^2$ ,  $(t^{r+b(x)})^{1/2}$  donne, pour  $r = 2$ , la distance au point 0), et considérons l'espace  $W^m(B_+)$  suivant :  $B_0$  ouvert de  $\mathbb{R}^{n-1}$ ,  $\beta$  fini ou infini.

$$W^m(B_+) = \{v \in \mathcal{D}'(B_+), (t^{r+b(x)})^{\alpha_0} v(x,t) \in L^2(B_+), (t^{r+b(x)})^{\alpha_1} \frac{\partial v}{\partial t}(x,t) \in L^2(B_+), \\ (t^{r+b(x)})^{\alpha_2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}(x,t) \in L^2(B_+), \dots, (t^{r+b(x)})^{\alpha_m} \frac{\partial^m v}{\partial t^m}(x,t) \in L^2(B_+)\}$$

où  $\alpha_i \geq 0$ . Les traces des fonctions de  $W^m(B_+)$ , à support compact dans  $B_+$ , sont données par le théorème 2 ci-dessous. On suppose  $\beta$  fini.

THEOREME 2. - Soit  $j \leq m-1$ .

a) S'il existe  $q > 0$  tel que  $\alpha_{j+q} < \frac{2q-1}{2r}$ ,  $T_j^m = \{v_j(x) \in L^2(B_0)\}$  ;

$$\|v_j\|_{T_j^m} = \|v_j\|_{L^2(B_0)}.$$

Sinon :

b) S'il existe  $q > 0$  tel que  $\alpha_{j+q} = \frac{2q-1}{2r}$ ,  $T_j^m = \{v_j(x) \text{ fonctions mesurables sur } b(x) \neq 0, \text{ avec } \frac{v_j(x)}{|\text{Log } b(x)|^{1/2}} \in L^2(b(x) \neq 0)\}$

$$\text{avec } \|v_j\|_{T_j^m} = \left\| \frac{v_j(x)}{|\text{Log } b(x)|^{1/2}} \right\|_{L^2(b(x) \neq 0)}.$$

c) Si, pour tout  $q > 0$ ,  $\alpha_{j+q} > \frac{2q-1}{2r}$ ,  $M_j = \{b(x) \neq 0\}$ , et soient

$$p_j^1(x) = \sup_{q>0} \left\{ (b(x))^{\frac{1}{2r} (2r \alpha_{j+q} + 1 - 2q)} \right\}$$

$$p_j^2(x) = \sup_{\substack{q>0 \\ \ell \leq j}} \left\{ (b(x))^{\alpha_\ell + (j-\ell+\frac{1}{2}) \left( \frac{\alpha_{j+q} - \alpha_\ell}{j+q-\ell} \right)} \right\} .$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \frac{\alpha_{j+q} - \alpha_\ell}{j+q-\ell} \geq \frac{1}{r}$$

$T_j^m = \{v_j(x), \text{fonctions mesurables de } b(x) \neq 0, \text{ telles que } p_j^1(x) v_j(x) \in L^2(b(x) \neq 0)$   
 $p_j^2(x) v_j(x) \in L^2(b(x) \neq 0)\}$  avec :

$$\|v_j\|_{T_j^m}^2 = \|p_j^1(x) v_j(x)\|_{L^2(b(x) \neq 0)}^2 + \|p_j^2(x) v_j(x)\|_{L^2(b(x) \neq 0)}^2 .$$

REMARQUE. - Lorsque les poids sont des puissances de  $t$ , on retrouve le fait que les traces, si elles existent, sont dans  $L^2(B_0)$  et on retrouve aussi les valeurs critiques des paramètres  $\alpha_{j+q} = \frac{2q-1}{2r}$ . Ici, on voit que, "en dessous" de cette valeur, on a des traces dans  $L^2$ . Pour la valeur critique, les traces sont "en logarithme". Pour les valeurs plus grandes, les traces sont dans des espaces avec poids sous forme de puissance de  $b(x)$ . La puissance de  $b(x)$  dépend des "pentes" et de la différence des "pentes" des fonctions poids ainsi que des traces des fonctions poids. Dans les deux derniers cas, la trace n'existe que sur  $b(x) \neq 0$ .

On va appliquer ces méthodes à la démonstration de l'irrégularité de problèmes de Dirichlet.

EXEMPLE ETUDIE. - Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\bar{\Omega}$  étant une variété compacte à bord de classe  $C^\infty$ , soit  $\omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  de bord variété de classe  $C^\infty$ , avec  $\Omega \subset \omega$  et  $\delta$  une fonction équivalente à la distance au bord de  $\omega$  :

$$\omega = \{x \in \mathbb{R}^n, \delta(x) > 0\}, \quad \partial\omega = \{x \in \mathbb{R}^n, \delta(x) = 0\} \quad d\delta \neq 0 \text{ sur } \partial\omega$$

( $d\delta$  = différentielle de  $\delta$ ).

On considère, dans  $\Omega$ , l'opérateur  $Av = \sum_{\substack{|\alpha| \leq 1 \\ |\beta| \leq 1}} D^\beta (a_{\alpha\beta} \delta D^\alpha v) + cv$  où  $a_{\alpha\beta}$  et

$c \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$  et on considère le problème de Dirichlet homogène associé en faisant l'hypothèse de coercivité de la forme intégrodifférentielle associée sur l'adhérence  $\overset{\circ}{V}$  de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans l'espace variationnel  $V$  :

- si  $\bar{\Omega} \subset \omega$ , la régularité est connue, l'opérateur étant elliptique.
- si  $\Omega = \dot{\omega}$ , la régularité a été étudiée dans (1). L'opérateur est régulier.

Dans le cas général, ce problème ne peut être traité par aucune des méthodes connues et l'irrégularité n'est pas évidente. Ce problème correspond au cas exceptionnel de l'inégalité de Hardy.

On va construire un contre-exemple explicité : on considère dans  $\Omega$ , voisinage ouvert de 0 dans  $\bar{R}_+^2$ ,  $\delta(x,t) = t+b(x)$ ,  $b(x) \geq 0$  et l'opérateur :

$$Av = - \frac{\partial}{\partial t} ((t+b(x)) \frac{\partial v}{\partial t}) - \frac{\partial}{\partial x} ((t+b(x)) \frac{\partial v}{\partial x}) + cv \quad (\text{où } c \in \mathcal{D}(\Omega)) .$$

On va montrer qu'il existe des  $v$  dans  $\dot{V}$  tels que le groupe  $\frac{\partial}{\partial t} ((t+b(x)) \frac{\partial v}{\partial t})$  ne se sépare pas.

Pour cela considérons (on généralise un le problème au niveau  $H^k$ ) :

### 3) 3ème espace

Soit l'espace  $W^m(B_+)$  suivant :  $B_+$  ouvert de  $R^{n-1}$ ,  $\beta$  fini :

$$W^m(B_+) = \{v \in L^2(B_+), (t+b(x))^{1/2} \frac{\partial v}{\partial t} \in L^2(B_+), \frac{\partial}{\partial t} ((t+b(x)) \frac{\partial v}{\partial t}) \in L^2(B_+), \dots, \frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}} ((t+b(x)) \frac{\partial v}{\partial t}) \in L^2(B_+)\} .$$

THEOREME 3. - L'adhérence des fonctions, à support compact dans  $B_+$ , dans  $W^m(B_+)$  a des traces caractérisées par :

- i)  $\frac{v_0(x)}{|\text{Log } b(x)|^{1/2}} \in L^2(b(x) \neq 0)$ ,  $v_0(x) \in L^2(b(x) = 0)$
- ii)  $|\text{Log } b(x)|^{1/2} b(x) v_1(x) \in L^2(b(x) \neq 0)$ ,  $v_1(x) \in L^2(b(x) = 0)$
- iii)  $|\text{Log } b(x)|^{1/2} (b(x))^k v_k(x) \in L^2(b(x) \neq 0)$ ,  $1 \leq k \leq m-1$ ,  $v_k(x) \in L^2(b(x) = 0)$ ,  $1 \leq k \leq m-2$

auxquelles il convient d'adjoindre des relations de liens :

$$\begin{cases} v_0(x) - b(x) v_1(x) \text{ Log } b(x) \in L^2(b(x) \neq 0) \\ k v_k(x) + b(x) v_{k+1}(x) \in L^2(b(x) \neq 0) \quad 1 \leq k \leq m-2 . \end{cases}$$

Le relèvement fait intervenir la totalité des traces sur  $b(x) \neq 0$  :

$$R(v_0, v_1, \dots, v_{m-1})(x, t) = \chi(t) (v_0(x) + b(x) v_1(x) \int_0^t \frac{d\zeta}{\zeta + b(x)} + (v_1(x) + b(x) v_2(x)) \int_0^t \frac{d\zeta}{\zeta + b(x)} + \dots + \frac{1}{(m-2)!} (b(x) v_{m-1}(x) + (m-2) v_{m-2}(x)) \int_0^t \frac{\zeta^{m-2} d\zeta}{\zeta + b(x)})$$

et sur  $b(x) = 0$ ,  $Rv_j(x, t) = \chi(t) \frac{t^j}{j!} v_j(x)$  où  $\chi(t) \in \mathcal{D}([0, \beta])$ ,  $\chi(0) = 1$ .

Il s'agit ici d'un espace tel que  $T^m \neq \prod_j T_j^m$ . En effet, séparons les espaces  $T_j^m$ . Pour ce faire, prenant  $v_j$  dans l'espace topologique parcouru par  $v_j$  du fait du système ci-dessus, on construit les autres traces en annulant les relations de liens et on vérifie que l'ensemble des traces ainsi déterminé appartient bien à l'espace calculé au-dessus.

PROPOSITION 4. - Les espaces de traces sont (munis de leur norme canonique) :

$$T_0^m = \{v_0(x), \text{fonctions mesurables sur } B_0, \frac{v_0(x)}{|\text{Log } b(x)|^{1/2}} \in L^2(b(x) \neq 0), v_0(x) \in L^2(b(x) = 0)\},$$

$$T_k^m = \{v_k(x), \text{fonctions mesurables sur } B_0, (b(x))^k |\text{Log } b(x)|^{1/2} v_k(x) \in L^2(b(x) \neq 0), v_k(x) \in L^2(b(x) = 0)\}_{1 \leq k \leq m-2},$$

$$T_{m-1}^m = \{v_{m-1}(x), (b(x))^{m-1} |\text{Log } b(x)|^{1/2} v_{m-1}(x) \in L^2(b(x) \neq 0)\}.$$

Revenons à l'irrégularité du problème de Dirichlet précédent : la méthode consiste à construire  $v$  à trace nulle telle que  $\frac{\partial}{\partial t} ((t+b(x)) \frac{\partial v}{\partial t}) \in L^2$  sans que  $\frac{\partial v}{\partial t} \in L^2$ . On travaille donc sur le relèvement avec  $v_0$  nul et on écrit la relation vérifiée par  $v_1(x)$ .

Contre-exemple explicité. - On considère, pour  $\Omega$  voisinage ouvert de 0 dans  $\mathbb{R}_+^{-2}$ ,  $\delta(x, t) = t + b(x)$ ,  $b(x) \geq 0$  et l'opérateur :

$$Av = - \frac{\partial}{\partial t} ((t+b(x)) \frac{\partial v}{\partial t}) - \frac{\partial}{\partial x} ((t+b(x)) \frac{\partial v}{\partial x}) + cv.$$

On prend pour contre-exemple :  $v(x, t) = \zeta(x, t) \varphi(x) \text{Log} \left( \frac{t+b(x)}{b(x)} \right)$  où  $\zeta(x, t)$  est une fonction  $C^\infty$  de troncature au voisinage de 0. On peut prendre au niveau  $L^2$  :  $\{b(x) = x^6, \varphi(x) = x^2\}$  ou  $\{b(x) = e^{-1/x^2}, \varphi(x) = e^{-3/x^2}\}$ . On a des résultats analogues au niveau  $H^k$ .

4) Passons maintenant au détail des démonstrations. On commence par généraliser l'inégalité de Hardy pour pouvoir calculer les propriétés des fonctions à trace nulle et de dérivées intermédiaires.

A) 2 généralisations de l'inégalité de Hardy

Définitions et notations. - Soit  $[a, b]$  un intervalle non vide,  $a$  étant éventuellement  $-\infty$  et  $b+\infty$ , et  $(t)$  une fonction mesurable, nulle sur un ensemble de mesure nulle, telle que, pour tout intervalle fermé et borné  $[c, d]$ ,  $[c, d] \subset ]a, b[$ ,  $\int_c^d \frac{dt}{(\varphi(t))^2}$  existe. Si  $\int_a^t \frac{d\sigma}{(\varphi(\sigma))^2}$  existe pour tout  $a < t < b$ , on définit la transformée de  $\varphi$  relative à  $a$ ,  $h\varphi(t)$  par :  $h\varphi(t) = \frac{1}{\varphi(t) \int_a^t \frac{d\sigma}{(\varphi(\sigma))^2}}$ . On peut faire de même en  $b$  (soit  $H\varphi(t)$  la transformée).

LEMME 1. - Soient  $]a, b[$  un intervalle non vide, fini ou infini,  $\varphi(t)$  une fonction mesurable nulle sur un ensemble de mesure nulle telle que, pour tout  $a < t < b$ ,  $\int_a^t \frac{d\sigma}{(\varphi(\sigma))^2}$  existe.

Il existe une constante  $c > 0$ , indépendante de  $v, \varphi, a, b$ , telle que pour toute fonction  $v \in C^1[a, b]$  avec  $\varphi(t) \frac{\partial v}{\partial t}(t) \in L^2[a, b]$ .

$$\int_a^b \frac{|v(t) - v(a)|^2 dt}{(\varphi(t))^2 \left( \int_a^t \frac{d\sigma}{(\varphi(\sigma))^2} \right)^2} \leq c \int_a^b (\varphi(t))^2 \left| \frac{\partial v}{\partial t}(t) \right|^2 dt .$$

Démonstration. - La démonstration se fait par intégrations par parties.

REMARQUE 1. - On a un lemme analogue au point  $b$ . Si  $\varphi(t) = t^\alpha$ , on retrouve les inégalités de Hardy classiques <sup>(3)</sup> <sup>(9)</sup>.

REMARQUE 2. - On appliquera l'inégalité ci-dessus aux fonctions  $t \rightarrow \varphi(x, t)$ ; d'après le calcul ci-dessus,  $c$  sera indépendante de  $x$ .

REMARQUE 3. - On ne peut pas, en général, calculer  $h\varphi$  et  $H\varphi$  mais on peut les encadrer par  $c_1 \psi_x(t)$  et  $c_2 \psi_x(t)$ , où  $\psi_x(t)$  dépend de  $x$  et  $c_1$  et  $c_2$  sont deux constantes non nulles.

EXEMPLE D'APPLICATION :

PROPOSITION. - Soit  $\delta > \frac{1}{2r}$ , soient  $B_o$  un ouvert de  $\mathbb{R}^{n-1}$  et  $\beta > 0$ , il existe une constante  $c > 0$  telle que, pour toute  $v \in C^1[[0, \beta[, M_x]$  (où  $M_x$  est l'ensemble

des fonctions mesurables en  $x$  avec  $v(x, \beta) = 0$  :

$$\int_{B_0} \left( \int_0^\beta (t^{r+b(x)})^{2\delta - \frac{2}{r}} |v(x, t)|^2 dt \right) dx \leq c \int_{B_0} \left( \int_0^\beta (t^{r+b(x)})^{2\delta} \left| \frac{\partial v}{\partial t}(x, t) \right|^2 dt \right) dx .$$

B) Cas de  $\varphi(x, t) \frac{\partial^m v}{\partial t^m}(x, t) \in L^2(B_+)$

Espace étudié. -  $W^m(B_+)$  est l'espace des fonctions mesurables qui, pour presque tout  $x$ , sont dérivables à l'ordre  $m$  au sens des distributions et dont les dérivées sont mesurables dans  $B_+$  et qui vérifient les conditions d'annulation en  $\beta$  :

$$v(x, \beta) = \frac{\partial v}{\partial t}(x, \beta) = \dots = \frac{\partial^{m-1} v}{\partial t^{m-1}}(x, \beta) = 0 .$$

On munit cet espace de la semi-norme  $\| \varphi(x, t) \frac{\partial^m v}{\partial t^m}(x, t) \|_{L^2(B_+)}$ . On commence par introduire les  $(M_j)_{0 \leq j \leq p}$  où on définira la  $j$ ème trace.

Notation :  $M_n = \{x \in B_0, \int_0^\beta \frac{\sigma^{2m-2j-2} d\sigma}{(\varphi(x, \sigma))^2} < \infty\}$  pour  $j \leq m-1$ . Ils vérifient :

$M_0 \supset M_1 \supset \dots \supset M_{q-1} \supset M_q \supset M_{q+1} \dots$ . Si la mesure de  $M_0$  est nulle, il n'y a pas de trace. Si la mesure de  $M_0$  est non nulle, on note  $p$  le plus grand entier  $\ell$  tel que : mesure  $(M_\ell) \neq 0$  (il y a alors au total  $(p+1)$  traces).

PROPOSITION 1. -  $T_j^m = \{v_j(x), \text{ fonctions mesurables sur } M_j \text{ avec}$

$$\| \frac{v_j(x)}{\left( \int_0^\beta \frac{\sigma^{2m-2j-2} d\sigma}{(\varphi(x, \sigma))^2} \right)^{1/2}} \|_{L^2(M_j)} < \infty \} \text{ avec la norme canonique.$$

PROPOSITION 2. - Soient  $L_j = \{(x, t) \in B_+ \text{ tel que}$

$$\left( \int_t^\beta \int_{\sigma_1}^\beta \int_{\sigma_{m-j-1}}^\beta \frac{\sigma_{m-j}^{m-j} d\sigma_{m-j} d\sigma_{m-j-1} \dots d\sigma_1}{(\varphi(x, \sigma_{m-j}))^2} \right)^{1/2} < \infty \} . \text{ On pose pour } (x, t) \in L_j :$$

$$\psi_j(x, t) = \frac{1}{\left( \int_t^\beta \int_{\sigma_1}^\beta \int_{\sigma_{m-j-1}}^\beta \frac{\sigma_{m-j}^{m-j} d\sigma_{m-j} d\sigma_{m-j-1} \dots d\sigma_1}{(\varphi(x, \sigma_{m-j}))^2} \right)^{1/2}} . \text{ Il existe } c > 0 \text{ telle}$$

que, pour tout  $v \in W^m(B_+)$  :

$$\int_{L_j} (\psi_j(x,t))^2 \left| \frac{\partial^j v}{\partial t^j}(x,t) \right|^2 dt dx \leq c \int_{B_t} (\varphi(x,t))^2 \left| \frac{\partial^m v}{\partial t^m}(x,t) \right|^2 dt dx .$$

REMARQUE 1. -  $M_\ell \times [0, \beta[ \subset L_j$  pour tout  $j \leq m-1$ , pour tout  $\ell \in [0, q]$ .

REMARQUE 2. - Il y a compatibilité entre les dérivées intermédiaire et les traces

$\varphi(x,t) \frac{\partial^m v}{\partial t^m}(x,t) \in L^2(M_\ell \times [0, \beta[)$  et  $\psi_j(x,t) \frac{\partial^j v}{\partial t^j}(x,t) \in L^2(M_\ell \times [0, \beta[)$  impliquent la même relation sur  $v_0$ .

### C) Séparation des traces

#### LEMME 2

- A) S'il existe  $c > 0$  telle que  $\forall (x,t) \in B_+$ ,  $\forall r \in \mathbb{N}$ ,  $|\varphi_{\alpha,j}(x, \frac{t}{r})| \leq c |\varphi_{\alpha,j}(x,t)|$  il existe une application linéaire et continue  $P_j$  de  $W^m(B_+)$  dans  $W^m(B_+)$  telle que :  $y_j(P_j v) = y_j v$ ,  $y_k(P_j v) = 0 \quad \forall k \neq j$ .
- B) S'il existe  $c > 0$  telle que  $\forall (x,t) \in B_+$ ,  $\forall r \in \mathbb{N}$  avec  $(x,rt) \in B_+$ ,  $|\varphi_{\alpha,j}(x,rt)| \leq c |\varphi_{\alpha,j}(x,t)|$ , alors on a la même proposition.

REMARQUE. - B) est aussi vrai pour  $M \times [0, s(x)[$  au lieu de  $B_+$ ,  $M$  mesurable de  $B_0$ ,  $s(x) > 0$  (par exemple  $M = \{b(x) < 0\}$ ,  $s(x) = |b(x)|$ ).

### D) Démonstration succincte des théorèmes sur les relations normales

On se contente de la donner pour les  $\varphi_i(x)$ . Voyons d'abord la partie traces. On considère d'abord 2 fonctions  $\varphi_\ell(x)$  et  $\varphi_m(x)$  et les relations

$$\varphi_\ell(x) \frac{\partial^\ell v}{\partial t^\ell}(x,t) \in L^2 \quad \text{et} \quad \varphi_m(x) \frac{\partial^m v}{\partial t^m}(x,t) \in L^2 .$$

$$\text{On pose} \quad \omega_\ell(x,t) = \frac{\partial^\ell v}{\partial t^\ell}(x,t) - \frac{t^{j-\ell}}{(j-\ell)!} \frac{\partial^j v}{\partial t^j}(x,0) .$$

On peut supposer, d'après le paragraphe C), que  $v$  a toutes ses traces (sauf la jème) nulles :  $\omega_\ell(x,t)$  a toutes ses traces nulles.

De  $\varphi_{j+q}(x) \frac{t^{j+q-\ell}}{t^{j+q-\ell}} (\omega_\ell(x,t)) \in L^2$ , on déduit  $\frac{\varphi_{j+q}(x)}{t^{j+q-\ell}} \omega_\ell(x,t) \in L^3$  ( $\varphi_{j+q}(x) \neq 0 \times ]0, \beta[$ ) (par applications successives de A)).

On compare alors  $\varphi_\ell(x)$  et  $\frac{\varphi_{j+q}(x)}{t^{j+q-\ell}}$ ; soit  $t_1$  tel que les 2 poids soient égaux :

$$t_1 = \left( \frac{|\varphi_{j+q}(x)|}{|\varphi_\ell(x)|} \right)^{\frac{1}{j+q-\ell}}$$

Le calcul de  $c = \int_{\varphi_{j+q}(x) \neq 0 \wedge \varphi_\ell(x) \neq 0} \left( \int_0^{t_1} \frac{t^{2j-2\ell} dt}{((j-\ell)!)^2} |\varphi_\ell(x)|^2 \left| \frac{\partial^j v}{\partial t^j}(x,0) \right|^2 dx \right.$

nous conduit au poids 
$$P_j(x) = \sup_{\substack{\ell \leq j, q > 0 \\ \varphi_{j+q}(x) \neq 0 \wedge \varphi_\ell(x) \neq 0}} \left\{ |\varphi_\ell(x)| \left| \frac{\varphi_{j+q}(x)}{\varphi_\ell(x)} \right|^{\frac{2j-2\ell+1}{2j+2q-2\ell}} \right\}$$

Au niveau du relèvement, on introduit un couple  $\{\ell_1 \leq j \text{ et } q_1 > 0\}$  tel que

$\varphi_{\ell_1}(x)$  et  $\varphi_{j+q_1}(x)$  donnent le poids principal et on pose :

$$q(x) = \left( \frac{|\varphi_{j+q_1}(x)|}{|\varphi_{\ell_1}(x)|} \right)^{\frac{1}{j+q_1-\ell_1}}$$

On prend  $Rv_j(x,t) = \chi(t/q(x)) \frac{t^j}{j!} v_j(x)$ . Puisque  $\beta$  est infini, c'est un relèvement.

On vérifie ensuite toutes les relations en utilisant le fait que, puisque le poids est maximum, on a pour  $\ell \leq j$  et  $q > 0$  :

$$\begin{aligned} |\varphi_\ell(x)| \left( \left| \frac{\varphi_{j+q_1}(x)}{\varphi_\ell(x)} \right|^{\frac{2j-2\ell+1}{2j+2q_1-2\ell_1}} \right) &\leq |\varphi_{\ell_1}(x)| \left( \left| \frac{\varphi_{j+q_1}(x)}{\varphi_{\ell_1}(x)} \right|^{\frac{2j-2\ell_1+1}{2j+2q_1-2\ell_1}} \right) \\ |\varphi_{\ell_1}(x)| \left( \left| \frac{\varphi_{j+q}(x)}{\varphi_{\ell_1}(x)} \right|^{\frac{2j-2\ell_1+1}{2j+2q_1-2\ell_1}} \right) &\leq |\varphi_{\ell_1}(x)| \left( \left| \frac{\varphi_{j+q_1}(x)}{\varphi_{\ell_1}(x)} \right|^{\frac{2j-2\ell_1+1}{2j+2q_1-2\ell_1}} \right) \end{aligned}$$

La démonstration est analogue pour  $\beta$  fini (on utilise l'annulation en  $\beta$  et on modifie le relèvement).

Les démonstrations pour  $(t^{r+b(x)})^{\alpha_i}$  sont plus délicates mais de même nature.

III. EXEMPLES D'ESPACES DE TRACES

On se placera dans le cadre suivant :  $B_0 = (] -\mu, +\mu[)^{n-1}$ ,  $\beta > 0$ ,  $B_+ = B_0 \times ]0, \beta[$ ,  $v \in C^m(\overline{R_+^n})$ ,  $\text{supp } v \subset B_1 \cup B_0$ .

EXEMPLE 1. - Soit  $b(x)$  une fonction  $C^\infty$ ,  $b(x) \geq 0$ , et soit  $\delta_p \geq 0$ ,  
 $p = 1, 2, \dots, n-1$ ,  $\delta_p > \frac{1}{2} - \frac{1}{r}$  ou  $\delta_p = 0$ .

$$W^1(B_+) = \left\{ v \in L^2(B_+), \frac{\partial v}{\partial t} \in L^2(B_+), (t^x + b(x))^{\delta_p} \frac{\partial v}{\partial x} \in L^2(B_+) \right\}, p=1, 2, \dots, n-1.$$

PROPOSITION 1. - La trace vérifie (on prouvera que ces relations caractérisent la trace) :

A) Il existe  $c > 0$  telle que, pour toute  $v \in W^1(B_+)$ ,  $\text{supp } v \in B_+ \cup B_0$  :

$$\|v_0(x)\|_{L^2(B_0)} \leq c \|v\|_{W^1(B_+)}$$

B) Pour tout  $p = 1, 2, \dots, n-1$ , il existe  $c, 0$  telle que, pour toute  $v \in W^1(B_+)$ ,  
 $\text{supp } v \in B_+ \cup B_0$  :

$$\int_{B_0} \left( \int_0^\beta \frac{1}{t^2} |v_0(x+t(t^x+b(x)))^{\delta_p} e_p - v_0(x)|^2 dt \right) dx \leq c \|v\|_{W^1(B_+)}^2$$

ABUS DE NOTATION. - Dorénavant, pour alléger les écritures, on remplacera  $\leq c \|v\|_{W^1(B_+)}$   
 par  $< \infty$ .

REMARQUE 1. - Le cas  $\delta_p = 0$  donne  $H^{1/2}$ . Le cas  $b(x) \equiv 0$  donne l'espace dissymétrique  
 $H^{\frac{1}{2(r\delta_p+1)}}$  où on a noté :

$$H^{s_1, s_2, \dots, s_p} = \left\{ v \in L^2(\mathbb{R}^n), (1+\zeta_1^{s_1} + \zeta_2^{s_2} + \dots + \zeta_{n-1}^{s_{n-1}}) \hat{\Delta}(\zeta) \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\}$$

REMARQUE 2. - La condition  $\delta_p > \frac{1}{2} - \frac{1}{r}$  ou  $\delta_p = 0$  est toujours vérifiée par  $t+b(x)$ ,  
 $b(x) C^\infty$ ,  $b(x) \geq 0$  ou par  $t^2 + |x|^2$ . Si cette condition n'est pas vérifiée, les espaces de traces ont une expression différente dépendant de la forme de  $b(x)$  (cf. remarques complémentaires à la fin).

EXEMPLE 2. - Soit  $b(x)$  une fonction  $C^\infty$ ,  $b(x) \geq 0$  et soit  $\delta_p \geq 0$ ,  
 $p = 1, 2, \dots, n-1$ ,  $\delta_p > \frac{1}{2} - \frac{1}{r}$  ou  $\delta_p = 0$  et  $\delta_p > \frac{1}{2r}$  ;

$$W^m(B_+) = \{v \in L^2(B_+) , \frac{\partial v}{\partial t} \in L^2(B_+) , \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \in L^2(B_+) , (t^{r+b(x)})^{\delta_p} \frac{\partial v}{\partial x_p} \in L^2(B_+) , \\ (t^{r+b(x)})^{\delta_p} \frac{\partial^2 v}{\partial x_p \partial t} \in L^3(B_+) , (t^{r+(x)})^{\delta_p + \delta_q} \frac{\partial^2 v}{\partial x_p \partial x_q} \in L^2(B_+)\} ,$$

$p = 1, 2, \dots, n-1$  et  $q = 1, 2, \dots, n-1$  .

PROPOSITION 2

A) La trace  $v_1$  est caractérisée par  $v_1 \in L^2(B_0)$  et

$$\int_{B_0} \int_0^\beta \frac{1}{t^2} |v_1(x+t(t^{r+b(x)})^{\delta_p} e_p) - v_1(x)|^2 dt dx < \infty \quad \text{pour } p = 1, 2, \dots, n-1 .$$

B) Soit  $v_0^p = \frac{\partial v}{\partial x_p}$  . La trace  $v_0$  est caractérisée par les propriétés  $L^2$  avec  
poids :  $\{v_0 \in L^2(B_0) , (b(x))^{\delta_p - \frac{1}{2r}} v_0^p(x) \in L^2(b(x) \neq 0) \text{ pour tout } p=1, 2, \dots, n-1\}$

et les relations intégrales :

$$i) \int_{b(x) \neq 0} \int_0^{(b(x))^{1/r}} \frac{(t^{r+b(x)})^{2\delta_p}}{t^2} |v_0^p(x+t(t^{r+b(x)})^{\delta_q} e_q) - v_0^p(x)|^2 dt dx < \infty$$

pour tout  $p = 1, 2, \dots, n-1$  et tout  $q = 1, 2, \dots, n-1$  ;

$$ii) \int_{B_0} \int_0^\beta \frac{1}{t^2 (t^{r+b(x)})^{2/r}} |v_0(x+t(t^{r+b(x)})^{\delta_p} e_p) - v_0(x)|^2 dt dx < \infty$$

pour tout  $p = 1, 2, \dots, n-1$  .

REMARQUES. - Une remarque générale est que pour les espaces en  $t^{r+b(x)}$  ,  $b(x) \geq 0$  (en particulier  $t+b(x)$  ,  $b(x) \geq 0$  ou  $t^2+|x|^2$ ) , l'espace parcouru par le produit des traces est le produit des espaces parcourus par les traces séparément.

Il en est de même pour les espaces en  $\varphi_1(x)$  .

Sous des conditions autres que :  $\{\delta_p > \frac{1}{2} - \frac{1}{r}$  ou  $\delta_p = 0$  et  $\delta_p > \frac{1}{2r}\}$  , les espaces de traces ont une autre expression (cf. remarques complémentaires à la fin).

EXEMPLE 3. -  $\{v \in H^m, (t^r+b(x))^\mu \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^j v}{\partial t^j} \in L^2(B_+), |\alpha|+j \leq m+k\}, k \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}, k > 0, r\mu \geq k.$

Cette dernière hypothèse est faite pour ne pas surcharger l'exemple, ce n'est pas une restriction. Les traces d'ordre  $j$  ( $j \leq m-1$ ) (on peut aussi calculer les autres) vérifient les propriétés caractéristiques suivantes :

$$T_j^m = \{v_j \in L^2(B_0), v_j^\alpha \in L^2(B_0), |\alpha|+j \leq m-1, \\ (b(x))^{2r} (2|\alpha|+2j-2m+2r\mu-2k+1) v_j^\alpha(x) \in L^2(b(x) \neq 0) \text{ pour } m \leq |\alpha|+j \leq m+k-1\}$$

avec les relations intégrales :

$$\left\{ \int_{B_0} \int_0^\beta \frac{1}{\sigma^2} |v_j^\alpha(x+\sigma e_p) - v_j^\alpha(x)|^2 d\sigma dx < \infty \text{ pour } |\alpha|+j = m-1 \text{ et} \right.$$

$p = 1, 2, \dots, n-1$

$$\int_{b(x) \neq 0} \int_0^{(b(x))^{1/r}} \frac{(\sigma^r+b(x))^{2\mu}}{\sigma^2} |v_j^\alpha(x+\sigma e_p) - v_j^\alpha(x)|^2 d\sigma dx < \infty$$

pour  $|\alpha|+j = m+k-1$  } .

REMARQUE. - Il y a d'autres relations intégrales (surabondantes) sur les dérivées intermédiaires des  $y$  (entre  $y^\alpha$  où  $|\alpha| = m-j-1$  et  $v_j^\alpha$  où  $|\alpha| = m+k-1$ ), à savoir :

$$\int_{b(x) \neq 0} \int_0^{(b(x))^{1/r}} \frac{(\sigma^r+b(x))^{2\mu}}{\sigma^2 (\sigma^r+b(x))^{2/r(m+k)-1-|\alpha|-j}} |v_j^\alpha(x+\sigma e_p) - v_j^\alpha(x)|^2 d\sigma dx < \infty$$

pour  $p = 1, 2, \dots, n-1$  .

On voit, sur ces exemples, apparaître la structure des espaces de traces formés par :

A) Des propriétés  $L^2$  avec poids sur les traces et leurs dérivées. Les propriétés  $L^2$  avec poids opèrent sur le domaine où la trace existe et sur les domaines  $M_j^\alpha$  où les dérivées des traces sont localement dans  $L^2$  .

Remarque : On a les inclusions :  $M_j^\alpha \subset M_j$  et  $M_j^\beta \subset M_j^\alpha$  si  $\beta > \alpha$  .

B) Des relations intégrales sur des couches :  $\{M_j \times [0, s_j(x)]\}$  ;  $\{M_j^\alpha \times [0, s_j(x)]\}$  construites sur les  $M_j$  et les  $M_j^\alpha : s_j^\alpha(x) \leq s_j(x)$  .

L'accroissement dans une direction donnée est commun à tous les  $y$  et les  $y^\alpha$  . Si  $M_j^\beta = M_j^\alpha$  pour  $\beta > \alpha$  , les relations intégrales sur les  $M_j^\alpha$  ne sont pas indispensables pour définir l'espace (elles sont surabondantes).

On voit comment se généralise la structure des espaces de traces où  $\varphi_{\alpha,j} = t^{\mu(\alpha,j)}$  (3) (4) (14) qui était formée de :

- propriétés  $L^2$  avec poids sous la forme  $v_\ell \in L^2(B_0)$  ou  $v_\ell^\alpha \in L^2(B_0)$  ,  $\alpha \in \mathbb{N}^{n-1}$  ;
- des relations intégrales sur les dérivées  $v_\ell^\alpha$  (éventuellement) de la forme :
 
$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^\beta \frac{1}{t^{2s+1}} |v_\ell^\alpha(x+te_p) - v_\ell^\alpha(x)|^2 dt dx < \infty$$
 où  $s = s_{\ell,\alpha,p}$  ,  $\alpha$  étant le plus grand multi-indice tel que  $v_\ell^\alpha \in L^2(B_0)$  .

Ceci est en particulier le cas des espaces  $H^s$  ( $s \in \mathbb{N}$ ) et de leurs traces.

IV. TRACES D'ESPACES DE SOBOLEV. METHODES

1) Décomposition de  $v$

On se place dans le cadre suivant :  $B_+ = B_0 \times ]0, \beta[$  avec  $B_0 = (]-\mu, +\mu[)^{n-1}$  . Les fonctions  $v$  considérées vérifieront :  $v \in C^m(\overline{B_+})$  ,  $\text{supp } v \in B_+ \cup B_0$  . Les espaces de traces sont définis par des propriétés  $L^2$  avec poids et par des relations intégrales. Sauf exceptions (cf. remarques complémentaires à la fin), les propriétés  $L^2$  avec poids résultent du II.

Voyons les relations intégrales : on commence par décomposer toute fonction  $v$  sous la forme de la somme d'une fonction à traces nulles et d'une fonction des traces. Ceci s'effectue au-dessus de chaque  $N_k$  où  $N_k$  est une partition convenable de la base  $B_0$  .

EXEMPLE. - Si on a une seule relation normale :  $\varphi(x,t) \frac{\partial^m v}{\partial t^m}(x,t) \in L^2$  , on introduit  $M_0$  où existe  $v_0$  et  $M_j$  où existe la trace  $v_j$  . On a les relations :

$$B_0 \supset M_0 \supset M_1 \supset \dots \supset M_j \supset \dots \supset M_r \supset M_{r+1} \supset \dots \supset M_p .$$

On introduit les ensembles  $N_0 = B_0 - M_0$ ,  $N_1 = M_0 - M_1$ , ...,  $N_r = M_r - M_{r+1}$  et on prend les décompositions :  $v(x,t) = (v(x,t) + 0)$  sur  $N_0$ ,  
 $v(x,t) = (v(x,t) - v(x,0)) + (v(x,0))$  sur  $N_1$  jusqu'à :

$$v(x,t) = (v(x,t) - v(x,0)) - t \frac{\partial v}{\partial t}(x,0) - \dots - \frac{t^r}{r!} \frac{\partial^r v}{\partial t^r}(x,0) \\ + (v(x,0) + t \frac{\partial v}{\partial t}(x,0) + \dots + \frac{t^r}{r!} \frac{\partial^r v}{\partial t^r}(x,0)) \quad \text{sur } N_r .$$

Soit  $v(x,t) = \omega(x,t) + L(x,t)$  une décomposition où  $\omega(x,t)$  est une fonction à traces nulles et  $L(x,t)$  une fonction des traces.

## 2) Le lemme intégral

HYPOTHESES. - On se place dans  $R_+^n$ . Soient  $M$  un ensemble mesurable de  $R_+^{n-1}$  et  $s(x)$  une fonction mesurable sur  $M$ ,  $s(x) > 0$  ( $M$  peut être et  $s(x) = +\infty$ ).

Soit  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  la base de  $R^n$ .

Soient  $\varphi(x,t)$  et  $\psi_p(x,t)$  deux fonctions mesurables dans  $R_+^n$ . On suppose que, parmi les semi-normes qui définissent l'espace, figurent les relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(x,t) \frac{\partial^q v}{\partial t^q}(x,t) \in L^2(B_+) \\ \psi_p(x,t) \frac{\partial^\beta v}{\partial x_p^\beta}(x,t) \in L^2(B_+) \quad 1 \leq p \leq n-1 . \end{array} \right.$$

On considère une décomposition de  $v$  :  $v(x,t) = \omega(x,t) + L(x,t)$ .

Soient  $h_p(x,t)$  et  $v(x,t)$  deux fonctions à valeurs réelles, définies sur  $M \times ]0, s(x)[$  avec, de plus,  $v(x,t) > 0$ .

### LEMME 3

• On suppose que le changement de variable :

$$S = x + \zeta h_p(x,t) e_p, T = t \quad (1)$$

est possible avec un jacobien uniformément borné par rapport à  $\zeta$  où  $|\zeta| < 1$ .

• On suppose qu'il existe  $c > 0$  telle que, pour tout  $(x,t,\zeta)$ ,  $x \in M$ ,  $t \in [0, s(x)]$ ,  $|\zeta| < 1$  :

$$\begin{cases} v(x,t) \leq c v(x+\zeta h_p(x,t), t) & (2) \\ \psi_\ell(x,t) \leq c \psi_p(x+\zeta h_p(x,t), t) & (2)' \end{cases}$$

$v(x,t)$  et  $h_p(x,t)$  vérifiant :  $v(x,t) (h_p(x,t))^{2\beta} \leq c (\psi_p(x,t))^2$  pour  $(x,t) \in M \times [0, s(x)]$  (3) .

• On suppose que pour  $c'$  indépendante de  $(x,\mu) \in \text{Im}_\zeta (M \times [0, s(x)])$  ( $\text{Im}_\zeta = \text{image}$  par le difféomorphisme relatif à  $\zeta$ ) :

$$\int_0^\mu v(x,t) |\omega(x,t)|^2 dt \leq c' \int_0^\mu (\varphi(x,t))^2 \left| \frac{\partial^q v}{\partial t^q} (x,t) \right|^2 dt \quad (4) .$$

• On suppose les relations de dérivées intermédiaires : pour  $r \in [1, \beta-1]$  , il existe  $c'' > 0$  telle que pour toute fonction  $v$  :

$$\begin{aligned} & \int_M \left( \int_0^{s(x)} (x,t) (h_p(x,t))^{2r} \left| \frac{\partial^r v}{\partial x_p^r} (x,t) \right|^2 dt \right) dx \\ & \leq c'' \left\{ \int_{B_+} (x,t)^2 \left| \frac{\partial^q v}{\partial t^q} (x,t) \right|^2 dt dx \right. \\ & \quad \left. + \int_{B_+} (\psi_p(x,t))^2 \left| \frac{\partial^\beta v}{\partial x_p^\beta} (x,t) \right|^2 dt dx \right\} \quad (5) \end{aligned}$$

alors il existe  $c_1 > 0$  telle que pour tout  $v \in C^m(\mathbb{R}_+^n)$  ,  $\text{supp } v \in B_+ \cup B_0$  :

$$\begin{aligned} & \int_M \left( \int_0^{s(x)} v(x,t) |L(x+h_p(x,t)e_p, t) - L(x,t)|^2 dt \right) dx \\ & \leq c_1 \left\{ \int_{B_+} (x,t)^2 \left| \frac{\partial^q v}{\partial t^q} (x,t) \right|^2 dt dx \right. \\ & \quad \left. + \int_{B_+} (\psi_p(x,t))^2 \left| \frac{\partial^\beta v}{\partial x_p^\beta} (x,t) \right|^2 dt dx \right\} \quad (6) . \end{aligned}$$

3) Exemple d'application

On démontre, sur l'exemple 2, pour  $v_0$ , la relation :

$$\int_{B_0} \int_0^\beta \frac{1}{t^2 (t^{r+b(x)})^{2/r}} |v_0(x+t(t^{r+b(x)})^\delta e_p) - v_0(x)|^2 dt dx < \infty .$$

On peut, par le critère de séparation, supposer  $v_1$  nul. On pose, avec les notations précédentes :

$$\omega(x,t) = v(x,t) - v(x,0) \quad , \quad L(x,t) = v(x,0)$$

$$v(x,t) = \frac{1}{t^2 (t^{r+b(x)})^{2/r}} \quad , \quad h_p(x,t) = t(t^{r+b(x)})^\delta e_p .$$

Vérifions alors chaque hypothèse :

(1) (2) (2)' résultent de l'hypothèse  $\delta_p > \frac{1}{2} - \frac{1}{r}$  ; (3) est évident ; (4) résulte du fait que  $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \in L^2$  et  $v_1 = 0 \Rightarrow \frac{\omega(x,t)}{t^2} \in L^2$  ; (5) résulte du fait que l'on a la formule de dérivée intermédiaire  $(t^{r+b(x)})^\delta \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} \in L^2 \Rightarrow (t^{r+b(x)})^{\delta - \frac{1}{r}} \frac{\partial v}{\partial x} \in L^2$  car  $\delta > \frac{1}{2r}$  .

4) Lemmes à l'ordre 1 (ces lemmes sont des applications du lemme précédent)

LEMME 4. - Soit un espace  $\{\varphi_0(x,t) v(x,t) \in L^2(B_+), \varphi(x,t) \frac{\partial v}{\partial t}(x,t) \in L^3(B_+),$

$\varphi_p(x,t) \frac{\partial v}{\partial x_p}(x,t) \in L^2(B_+)\}$  et  $s(x) > 0$  mesurable et  $M \subset \{x \in B_0,$

$\int_0^t \frac{d\sigma}{(\varphi(x,\sigma))^2}$  existe pour tout  $t \in [0, s(x)]\}$  .

On suppose que  $h_p(x,t) = \frac{\psi_p(x,t)}{h_p(x,t)}$  et que :

i) le changement de variable  $X = x + \zeta_p h_p(x,t) e_p, T = t$  est possible avec un jacobien borné uniformément par rapport à  $\zeta_p$  avec  $|\zeta_p| \leq 1$  ;

ii) il existe  $c > 0$  telle que, pour tout  $(x,t,\zeta)$ ,  $x \in M$ ,  $t \in [0, s(x)]$ ,  $|\zeta| \leq 1$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} h_p(x,t) \leq c h_p(x + \zeta_p h_p(x,t), t) \\ \psi_p(x,t) \leq c \psi_p(x + \zeta_p h_p(x,t), t) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(ce qui implique d'abord que} \\ h_p(x + \zeta_p h_p(x,t), t) \text{ existe)} \end{array}$$

alors il existe une constante  $c_1 > 0$  telle que pour tout  $v, v \in W^1(B_+)$ , et si  
 $v_0(x) = v(x, 0)$  :

$$\int_M \left( \int_0^{s(x)} (h \varphi(x, t))^2 \left| v_0 \left( x + \frac{\psi_p(x, t)}{h \varphi(x, t)} e_p \right) - v_0(x) \right|^2 dt \right) dx$$

$$\leq c \left\{ \int_{B_+} (\varphi(x, t))^2 \left| \frac{\partial^q v}{\partial t^q}(x, t) \right|^2 dt dx \right.$$

$$\left. + \int_{B_+} (\psi_p(x, t))^2 \left| \frac{\partial^\beta v}{\partial x_p^\beta}(x, t) \right|^2 dt dx \right\} .$$

LEMME 5. - Soit un espace  $\{ \varphi_0(x, t), v(x, t) \in L^2(B_+), \varphi(x, t) \frac{\partial v}{\partial t}(x, t) \in L^2(B_+),$   
 $\varphi_p(x, t) \frac{\partial v}{\partial x_p}(x, t) \in L^2(B_+), 1 \leq p \leq n-1 \}$  .

Soit  $M$  un ensemble mesurable,  $M \subset B_0$ ,  $s(x)$  une fonction mesurable définie sur  
 $M$ ,  $s(x) > 0$  sur  $M$  et  $v(x, t) > 0$  une fonction sur  $M \times [0, s(x)]$ ,  $h_p(x, t)$  une  
fonction sur  $M \times [0, s(x)]$  à valeurs réelles.

On suppose :

- i) que le changement de variable  $x = x + \zeta h_p(x, t), T = t$  est possible avec un jacobien  
borné uniformément par rapport à  $\zeta$  où  $|\zeta| \leq 1$  (1) ;
- ii) qu'il existe  $c_1 > 0$  telle que pour tout  $(x, t, \zeta)$ ,  $x \in M$ ,  $t \in [0, s(x)]$ ,  
 $|\zeta| \leq 1$  :

$$v(x, t) \leq c_1 v(x + \zeta h_p(x, t), t) \quad (2)$$

$$|\varphi_p(x, t)|^2 \leq c_1 |\varphi_p(x + \zeta h_p(x, t), t)| \quad (2)'$$

$$v(x, t) \text{ et } h_p \text{ vérifiant : } v(x, t) (h_p(x, t))^2 \leq c_1 (\varphi_p(x, t))^2 \quad (3) .$$

- iii) On suppose que pour  $c_2$  indépendante de  $x, t, s(x)$  :

$$\int_0^{s(x)} v(x, t) \left| \int_0^t \frac{\partial v}{\partial t}(x, \sigma) d\sigma \right|^2 dt \leq c_2 \int_0^{s(x)} (\varphi(x, t))^2 \left| \frac{\partial v}{\partial t}(x, t) \right|^2 dt \quad (4)$$

alors il existe une constante  $c_3 > 0$  telle que pour toute fonction  $v \in C^1(\overline{R_+^n})$ ,  
supp  $v \subset B_+ \cup B_0$  et si  $v_0(x) = v(x, 0)$  :

$$\int_M \int_0^{s(x)} v(x,t) |v_o(x+h_p(x,t)e_p) - v_o(x)|^2 dt dx$$

$$\leq c_3 \left\{ \int_{B_+} (\varphi(x,t))^2 \left| \frac{\partial v}{\partial t}(x,t) \right|^2 dt dx \right.$$

$$\left. + \int_{B_+} (\varphi_p(x,t))^2 \left| \frac{\partial v}{\partial x_p}(x,t) \right|^2 dt dx \right\} .$$

REMARQUE. - On en déduit les propriétés des traces de nombreux espaces d'ordre 1 . En effet, sous les hypothèses ci-dessus, la trace  $v_o(x)$  vérifie sur  $M_o = \{x \in B_o$  ,

$\int_0^\beta \frac{d\sigma}{(\varphi(x,\sigma))^2} < \infty$  } les propriétés suivantes :

i)  $\frac{v_o(x)}{\left(\int_0^\beta \frac{d\sigma}{(\varphi(x,\sigma))^2}\right)^{1/2}} \in L^2(M_o) .$

ii) Si  $(\omega(x,t))^2 = \inf \{(\varphi_o(x,t))^2, (h\varphi(x,t))^2\}$  ,

$$\int_{M_o} \left(\int_0^\beta (\omega(x,t))^2 dt\right) |v_o(x)|^2 dx < \infty .$$

Cette relation s'obtient en écrivant :  $v(x,0) = v_o(x) = v(x,0) - v(x,t) + v(x,t)$  et en utilisant les relations :  $\varphi_o(x,t) v(x,t) \in L^2(M_o \times [0,\beta])$  et  $h\varphi(x,t) (v(x,t) - v(x,0)) \in L^2(M_o \times [0,\beta])$  .

iii) La relation intégrale ci-dessus pour  $s(x)$  convenable.

#### EXEMPLE

i) Soit l'espace  $\{v \in L^2(B_+) , |x|^{2\alpha_n} \frac{\partial v}{\partial t} \in L^2(B_+) , |x|^{2\alpha_p} \frac{\partial v}{\partial x_p} \in L^2(B_+) \}$  ,  $p = 1, 2, \dots, n-1$  , muni de sa norme canonique avec :  $\alpha_n \in \mathbb{N}$  et  $\alpha_p \in \mathbb{N}$  , et  $|x|^2 = \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2$  .

ii) La trace vérifie : elle existe sur  $|x| \neq 0$  et  $|x|^{\alpha_n} v_o(x) \in L^2(|x| \neq 0)$  . De plus, on a les relations intégrales :

$$\int_{|x| \neq 0} \int_0^{s(x)} \frac{|x|^{4\alpha_n}}{t^2} |v_o(x+t|x|^{2\alpha_p - 2\alpha_n} e_p) - v_o(x)|^2 dt dx < \infty \text{ pour tout}$$

$p = 1, 2, \dots, n-1$  où  $s(x) = |x|^{2\alpha_n}$  ( $t = s(x)$  est la couche suivant laquelle on tronque :  $\{v \in L^2, |x|^{2\alpha_n} \frac{\partial v}{\partial t} \in L^2\}$  (cf. II, 4), D)). La vérification des hypothèses nous conduit à l'hypothèse (H) : pour tout  $p = 1, 2, \dots, n-1$ ,  $\alpha_p \neq 0$ .

iii) On verra que, sous cette hypothèses (H), les relations ci-dessus caractérisent la trace.

#### UN EXEMPLE D'ESPACE DE SOBOLEV

Espace étudié. - On considère l'espace de Sobolev avec poids défini par :  $r \in \mathbb{N}$ ,  $b(x)$  est une fonction  $C^\infty$ ,  $b(x) \geq 0$  définie sur  $\mathbb{R}^{n-1}$  et :

$$W^m(B_+) = \{v \in \mathcal{D}'(B_+), (t^{r+b(x)})^{\alpha_0} v(x,t) \in L^2(B_+), (t^{r+b(x)})^\alpha \frac{\partial^m v}{\partial t^m}(x,t) \in L^2(B_+), (t^{r+b(x)})^{\alpha_p} \frac{\partial v}{\partial x_p}(x,t) \in L^2(B_+)\}.$$

Si  $b(x) \equiv 0$ , on prend  $B_+ = \mathbb{R}_+^n$  et on a affaire à un espace de trace  $H^s$  dissymétrique. La valeur limite pour qu'il y ait une trace est  $\alpha = \frac{2m-1}{2r}$ ; si  $\alpha \geq \frac{2m-1}{2r}$ , il n'y a pas de trace; si  $\alpha < \frac{2m-1}{2r}$ , il y a une trace  $v_0$  dans  $L^2(B_0)$ .

Les propriétés  $L^2$  avec poids des traces sont :  $v_\ell \in L^2(B_0)$  si  $\ell < \frac{2m-2r\alpha-1}{2}$ .

Les espaces de traces sont obtenus en complétant les propriétés  $L^2$  avec poids par les relations intégrales :

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^\infty \frac{t^{2r\alpha} t^{2\ell}}{t^{2m}} |v_\ell(x+t^{\frac{m+r\alpha}{p}} e_p) - v_\ell(x)|^2 dt dx < \infty \quad \text{pour } p=1,2,\dots,n-1$$

Si  $b(x)$  est quelconque, on prend  $B_+$  petit voisinage de 0 et on introduit les quantités :

$$v(x,t) = \frac{(t^{r+b(x)})^{2\alpha}}{t^{2m}}, \quad v_\ell(x,t) = \frac{(t^{r+b(x)})^{2\alpha} t^{2\ell}}{t^{2m}}, \quad h_p(x,t) = t^m (t^{r+b(x)})^{\alpha_p - \alpha}$$

et on pose : hypothèse  $H_1$  :  $\alpha_p > \alpha + \frac{1}{2} - \frac{m}{r}$  ou  $\alpha_p = \alpha$  (cela correspond à la relation (1) du lemme intégral). Dans le cas particulier où  $b(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_i^{\mu_i}$  où  $\mu_i \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha_i \geq 0$ , on introduit l'hypothèse  $H_2$  :  $\frac{m}{r} + \alpha_p - \alpha - \frac{1}{\mu_p} > 0$  ou  $\alpha_p = \alpha$ .

On a alors :

THEOREME 4. - Sous l'hypothèse  $H_1$  (resp.  $H_2$  si  $b(x) = \prod_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_i^{\mu_i}$  où  $\alpha_i \geq 0$  et  $\mu_i \in \mathbb{N}$ ) :

a) Si  $\alpha < \frac{2m-2}{2r} - 1$ , la trace  $v_\ell$  est caractérisée par :

$$v_\ell \in L^2(B_0) \text{ et } \int_{B_0} \int_0^\beta \frac{(t^r+b(x))^{2\alpha} t^{2\ell}}{t^{2m}} |v_\ell(x+t^m(t^r+b(x)))^{\alpha_p - \alpha} e_p^{-v_\ell(x)}|^2 dt dx < \infty$$

pour  $p = 1, 2, \dots, n-1$ .

b) Si  $\alpha \geq \frac{2m-2}{2r} - 1$

i) si  $\alpha - \alpha_0 < \frac{m}{r}$ , la trace  $v_\ell$  est caractérisée par :

$$(b(x))^{\frac{1}{2r}(2r\alpha+2\ell-2m+1)} v_\ell(x) \in L^2(b(x) \neq 0) \text{ et}$$

$$\int_{b(x) \neq 0} \int_0^{(b(x))^{\frac{1}{r}}} \frac{(t^r+b(x))^{2\alpha} t^{2\ell}}{t^{2m}} |v_\ell(x+t^m(t^r+b(x)))^{\alpha_p - \alpha} e_p^{-v_\ell(x)}|^2 dt dx < \infty$$

pour  $p = 1, 2, \dots, n-1$  ;

ii) si  $\alpha - \alpha_0 \geq \frac{m}{r}$ , la trace  $v_\ell$  est caractérisée par :

$$(b(x))^{\alpha_0 + (\ell + \frac{1}{2}) \left(\frac{\alpha - \alpha_0}{m}\right)} v_\ell(x) \in L^2(b(x) \neq 0) \text{ et}$$

$$\int_{b(x) \neq 0} \int_0^{(b(x))^{\frac{\alpha - \alpha_0}{m}}} \frac{(t^r+b(x))^{2\alpha} t^{2\ell}}{t^{2m}} |v_\ell(x+t^m(t^r+b(x)))^{\alpha_p - \alpha} e_p^{-v_\ell(x)}|^2 dt dx < \infty$$

pour  $p = 1, 2, \dots, n-1$ .

## V. RELEVEMENT DES ESPACES DE TRACES

### 1) Formule de relèvement

Etant donnée  $y$  définie sur  $M_j$ , on la prolonge par 0 hors de  $M_j$  et hors de  $B_0$ . On

On prend pour formule de relèvement :  $Rv_j(x, t) = \mu(x, t) \frac{t^j}{j!} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} R(\zeta) v_j(x + \zeta H(x, t), t) d\zeta$

$$\text{où} \quad \left\{ \begin{array}{l} u(x,t) \text{ est une fonction de troncature} \\ R(\zeta) \in \mathcal{D}([\cdot-1, +1]^{n-1}), R(\zeta) \text{ réelle, } \int_{\mathbb{R}^{n-1}} R(\zeta) d\zeta = 1 \\ H(x,t) = (H_1(x,t), H_2(x,t), \dots, H_{n-1}(x,t)), H_1(x,t) \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

## 2) Méthode

Le point essentiel, au niveau du relèvement, est que les relèvements avec noyaux soient :  $\frac{1}{\prod_{i=1}^{n-1} H_i(x,t)} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} R\left(\frac{\eta_i - x_i}{H_i(x,t)}\right) \omega(\eta) d\eta$  où  $R(\zeta) = R(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{n-1})$  vérifie :  $R(\zeta) \in \mathcal{D}([\cdot-1, +1]^{n-1})$ ,  $\int_{\mathbb{R}^{n-1}} R(\zeta) d\zeta = 1$ , ont des dérivées qui peuvent se mettre sous plusieurs formes différentes (en fait, déduites les unes des autres par intégrations par parties). On pourra donc, compte tenu des expressions des traces ci-dessus, utiliser telle ou telle de ces expressions après avoir découpé  $B_+$  en zones.

EXEMPLE D'EXPRESSIONS DIFFÉRENTES DES DÉRIVÉES DU RELEVEMENT. - La dérivée par rapport à  $x_\ell$  peut s'écrire :

- soit

$$- \sum_{p=1}^{n-1} \frac{\frac{\partial}{\partial x_\ell} (H_p(x,t))}{H_p(x,t)} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} P_p(\zeta) \omega(x_i + \zeta_i H_i(x,t)) d\zeta - \frac{1}{H_\ell(x,t)} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} P^\ell(\zeta) \omega(x_i + \zeta_i H_i(x,t)) d\zeta$$

où  $P_p(\zeta)$  dépend de  $\zeta$  et de  $p$ ,  $P_p(\zeta) \in \mathcal{D}([\cdot-1, +1]^{n-1})$ ,  $\text{supp } P_p(\zeta) \subset \text{supp } R(\zeta)$ ,  $\int_{\mathbb{R}^{n-1}} P_p(\zeta) d\zeta = 0$  (mêmes propriétés pour  $P^\ell(\zeta)$ ) (on pourra donc remplacer

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} P_p(\zeta) \omega(x_i + \zeta_i H_i(x,t)) d\zeta \text{ par } \int_{\mathbb{R}^{n-1}} P_p(\zeta) (\omega(x_i + \zeta_i H_i(x,t)) - \omega(x_i)) d\zeta ;$$

$$- \text{ soit } \sum_{r=1}^{n-1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} R(\zeta) \zeta_p \frac{\partial}{\partial x_\ell} (H_r(x,t)) \frac{\partial \omega}{\partial x_p} (x_i + \zeta_i H_i(x,t)) d\zeta + \int_{\mathbb{R}^{n-1}} R(\zeta) \frac{\partial \omega}{\partial x_\ell} (x_i + \zeta_i H_i(x,t)) d\zeta$$

où, si on pose  $Q_\ell(\zeta) = R(\zeta) \zeta_\ell$ ,  $Q_\ell(\zeta) \in \mathcal{D}([\cdot-1, +1]^q)$ ,  $\text{supp } Q_\ell(\zeta) \subset \text{supp } R(\zeta)$ ,  $\int_{\mathbb{R}^q} Q_\ell(\zeta) d\zeta$  quelconque.

On a plus généralement :

Formules de dérivation des relèvements

**LEMME 6.** - Soit un relèvement précédent : 
$$\frac{1}{\prod_{i=1}^{n-1} H_i(x,t)} \int_{R^{n-1}} R\left(\frac{\eta_i - x_i}{H_i(x,t)}\right) \omega(\eta) d\eta .$$

a) Si on fait porter toutes les dérivations sur le noyau, une dérivée d'ordre  $\alpha = (\alpha', \alpha_n)$  se présente sous la forme d'une combinaison linéaire de termes en :

$$\frac{1}{(H_1(x,t))^{\beta_1} (H_2(x,t))^{\beta_2} \dots (H_q(x,t))^{\beta_{n-1}}} \frac{\prod_{i=1}^{n-1} D^{\mu_i}_{(H_{r_i}(x,t))}}{\prod_{i=1}^s H_{r_i}(x,t)} \int_{R^{n-1}} R_{\alpha, \beta, \mu_i}(\zeta) \omega(x_i + \zeta_i H_i(x,t)) d\zeta$$

où  $\beta_1 \leq \alpha_1, \beta_2 \leq \alpha_2, \dots, \beta_{n-1} \leq \alpha_{n-1}$ ,  $\int_{R^{n-1}} R_{\alpha, \beta, \mu_i}(\zeta) d\zeta = 0$  sauf si  $\alpha = 0$ ,  
 $\sum_{i=1}^s \mu_i \leq \alpha$ ,  $s + \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i \leq |\alpha|$ .

b) Si on fait porter toutes les dérivations sur  $\omega$ , une dérivée d'ordre  $\alpha = (\alpha', \alpha_n)$  se présente sous la forme d'une combinaison linéaire de termes en :

$$\sum_{i=1}^s D^{\mu_i}_{(H_{r_i}(x,t))} \int_{R^{n-1}} R_{\mu_i}(\zeta) \frac{\partial \beta_i}{\partial x \beta^i} \omega(x_i + \zeta_i H_i(x,t)) d\zeta$$

avec  $|\beta^i| \leq |\alpha|$ ,  $\int_{R^{n-1}} R_{\mu_i}(\zeta) d\zeta$  de valeur quelconque,  $\sum_{i=1}^s \mu_i \leq \alpha$ ,  $s \leq |\alpha|$ .

**REMARQUE.** - Pour avoir le cas général, on combine ces 2 formules.

On a besoin aussi de la majoration de certaines expressions :

**LEMME 7**

a) Soit  $b(x)$  une fonction  $C^\infty$ ,  $b(x) \geq 0$ ,  $r \in \mathbb{N}$ ,  $v > 0$ ,  $\chi(t) \in \mathcal{D}([0, 1[)$ ,  $\chi(t) \equiv 1$  sur  $[0, \frac{1}{2}[$ ; il existe une constante  $c > 0$ , dépendant de  $(\alpha', \alpha_n)$ , telle que, pour tout  $(x, t) \in B_+$  :

$$\left| \frac{\partial^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial t^{\alpha_n}} (\chi(t^r/(b(x))v)) \right| \leq \frac{c}{(b(x))^{\alpha_n v/r + |\alpha'|/2}} .$$

b) Soit  $b(x)$  une fonction  $C^\infty$ ,  $b(x) \geq 0$  et  $\mu > 0$ ,  $v \in \mathbb{R}$ ,  $r \in \mathbb{N}$ ; il existe une constante  $c > 0$ , dépendant de  $(\alpha', \alpha_n)$ , telle que, pour tout  $(x, t) \in B_+$  :

$$\left| \frac{\partial^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial t^{\alpha_n}} \left( \frac{t}{(t^r + b(x))^v} \right) \right| \leq c (t^r + b(x))^{\mu/r - v - |\alpha'|/2 - \alpha_n/r} .$$

Démonstration. - Pour établir ces majorations, on utilise une récurrence et le fait que, si  $|\mu_i| = 1$ ,  $|D^{\mu_i} b(x)| \leq c(b(x))^{1/2}$  ( ). Illustrons par un exemple la technique de relèvement. On prend le cas de la trace  $v_0$  de l'exemple 2 et le relèvement  $Rv_0(x, t) = \chi(t) \int_{\mathbb{R}^{n-1}} R(\zeta) v_0(x + \zeta H(x, t)) d\zeta$ .

On décompose  $B_+$  en  $t < (b(x))^{1/r}$  et  $t > (b(x))^{1/r}$ .

Pour  $t > (b(x))^{1/r}$ , on procède par dérivation sur  $R$  ce qui conduit à des termes majorés par :

$$\|v_0\|_{L^2(B_0)} \quad \text{et} \quad \int_{B_0} \int_0^\beta \frac{1}{t^2 (t^r + b(x))^{2/r}} |v_0(x + t(t^r + b(x))^\delta) - v_0(x)|^2 dt dx ,$$

relations qui figurent dans l'espace de trace, et, pour  $t < (b(x))^{1/r}$ , on procède en faisant porter les dérivations une fois sur  $v_0$  ce qui conduit à :

$$\|v_0\|_{L^2(B_0)} ; \left\| (b(x))^{\delta - \frac{1}{2r}} \frac{\partial v_0}{\partial x^p} \right\|_{L^2(b(x) \neq 0)} , \quad p = 1, 2, \dots, n-1 \quad \text{et}$$

$$\int_{b(x) \neq 0} \int_0^{(b(x))^{1/r}} \frac{(t^r + b(x))^{2\delta}}{t^2} |v_0^p(x + t(t^r + b(x))^\delta) - v_0^p(x)|^2 dt dx ,$$

autres relations de l'espace de trace.

REMARQUES COMPLEMENTAIRES

A) La restriction  $\delta > \frac{1}{2}$  dans l'exemple 2 est effective puisque, par exemple, l'espace  $\{v \in L^2(B_+), \frac{\partial v}{\partial t} \in L^2(B_+), \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \in L^2(B_+), (t+b(x))^\delta \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(B_+), 1 \leq i \leq n-1, (t+b(x))^\delta \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial t} \in L^2(B_+), (t+b(x))^{2\delta} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}, 1 \leq i, j \leq n-1\}$

a pour traces :

. si  $\delta < \frac{1}{2}$  :  $\{v_o \in L^2(B_o), \frac{\partial v_o}{\partial x_i} \in L^2(B_o), 1 \leq i \leq n-1\}$ ,

$$\int_{B_o} \int_0^\beta \frac{(t+b(x))^{2\delta}}{t^2} \left| \frac{\partial v_o}{\partial x_i}(x+t(t+b(x))^\delta e_p) - \frac{\partial v_o}{\partial x_i}(x) \right|^2 dt dx < \infty$$

pour tous  $1 \leq i, p \leq n-1$  .

. si  $\delta = \frac{1}{2}$  :  $\{v_o \in L^2(B_o), \frac{\partial v_o}{\partial x_i} \in L^2(B_o), 1 \leq i \leq n-1\}$ ,

$$\int_{b(x) \neq 0} \int_0^{b(x)} \frac{(t+b(x))}{t^2} \left| \frac{\partial v_o}{\partial x_i}(x+t(t+b(x))^{1/2} e_p) - \frac{\partial v_o}{\partial x_i}(x) \right|^2 dt dx < \infty$$

pour tous  $1 \leq i, p \leq n-1$  .

B) On peut aussi obtenir, dans certains cas, les traces dans le théorème 4 dans les cas où les hypothèses  $H_1$  (resp.  $H_2$ ) ne sont pas vérifiées ou dans le cas des coefficients exceptionnels ( $\alpha = \frac{2m-2k-1}{2r}$ ). Il apparaît des propriétés  $L^2$  avec poids supplémentaires et une modification des couches d'intégration. Voyons un exemple dans  $R_+^2$  au voisinage de 0 :

$\{v \in L^2(B_+), (t+x^2)^{1/2} \frac{\partial v}{\partial t} \in L^2(B_+), \frac{\partial v}{\partial x} \in L^2(B_+)\}$  a pour trace :  $v_o \in L^2$ ,

$$\int_{|x| \neq 0} \int_0^{x^2} \frac{(t+x^2)}{t^2} \left| v_o(x + \frac{t}{(t+x^2)^{1/2}} e_p) - v_o(x) \right|^2 dt dx < \infty \quad \text{pour tout}$$

$p = 1, 2, \dots, n-1$  .

#### BIBLIOGRAPHIE

- (<sup>1</sup>) M.S. BAOUENDI et C. GOULAOUIC : Régularité et théorie spectrale pour une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés, Arch. Rational Mech. Anal. 34 n°5 (1969), 361-379.
- (<sup>2</sup>) J. BARROS NETO : Inhomogeneous boundary value problems in a half space, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa 19 (1965), 331-365.
- (<sup>3</sup>) P. BOLLEY et J. CAMUS : Quelques résultats sur les espaces de Sobolev avec poids, Séminaire d'Analyse Fonctionnelle, Rennes (1968), 1-68.
- (<sup>4</sup>) P. BOLLEY et J. CAMUS : Sur une classe d'opérateurs elliptiques et dégénérés à plusieurs variables, Bull. Soc. Math. Frانس, Mémoire 34 (1973), 55-140.

- (<sup>5</sup>) P. GRISVARD : Commutativité de deux foncteurs d'interpolation et applications.  
J. Math. Pures Appl. 45 (1966), 143-190.
- (<sup>6</sup>) P. GRISVARD : Théorèmes de traces relatifs à un polyèdre, C. R. Acad. Sc. Paris  
278 (1974), série A, 1518-1583.
- (<sup>7</sup>) V. V. GRUŠIN : Hypoelliptic differential equations and pseudo-differential operators with operator symbols, Mat. Sb. 88 (130) (1972) n°4.
- (<sup>8</sup>) B. HANOUZET : Problèmes aux limites elliptiques dans des ouverts non bornés,  
Colloque d'Analyse Fonctionnelle, Bordeaux (1971), Bull. Soc. Math. France, Mémoire 31-32 (1972), 191-199.
- (<sup>9</sup>) G. H. HARDY, J. E. LITTLEWOOD et G. POLYÀ : Inequalities, Cambridge Univ. Press (1959).
- (<sup>10</sup>) L. HORMANDER : Linear partial differential operators, Springer Verlag (1964).
- (<sup>11</sup>) L. D. KUDRYACEV : Imbedding theorems for functions defined on unbounded regions,  
Soviet. Math. Dokl. 4 (1963), 1715-1717.
- (<sup>12</sup>) A. KUFNER : Einige Eigenschaften der Sobolev'schen Räume mit Belegungs Funktion,  
Czechoslovak Math. J. 15 (90) (1965), 597-620.
- (<sup>13</sup>) J. L. LIONS : Problèmes aux limites pour les équations aux dérivées partielles,  
Séminaire de Mathématiques Supérieures, Montréal (été 1962).
- (<sup>14</sup>) J. L. LIONS - E. MAGENES : Problèmes aux limites non homogènes et applications,  
Dunod Paris (1968) volume I.
- (<sup>15</sup>) C. MATTERA : Régularité pour des problèmes elliptiques singuliers, Séminaire  
Goulaouic-Schwartz, Ecole Polytechnique, 24 février 1976.
- (<sup>16</sup>) J. NEČAS : Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques, Masson  
Paris (1967).
- (<sup>17</sup>) L. SCHWARTZ : Théorie des distributions, Hermann Paris (1950).
- (<sup>18</sup>) G. N. YAKOVLEV : The Dirichlet problem for domains with non lipschitzian  
boundaries, Differential'nye Uravnenija 1 n°8 (1965), 1085-1098.

ECOLE POLYTECHNIQUE  
Centre de Mathématiques

91128 PALAISEAU Cedex