JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

LOUIS BOUTET DE MONVEL

Opérateurs pseudodifférentiels analytiques

Journées Équations aux dérivées partielles (1976), p. 1-43
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1976____A6_0>

OPERATEURS PSEUDODIFFERENTIELS ANALYTIQUES

par

L. BOUTET DE MONVEL

NOTATIONS

Nous utiliserons les notations suivantes concernant les dérivations etc... :

Soit $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ un multi-indice (suite de n entiers positifs). On pose

$$|\alpha| = \alpha_1 + \ldots \alpha_n$$

$$\alpha! = a_1! \ldots \alpha_n!$$

$$\binom{\alpha}{\beta} = \alpha!/\beta!(\alpha-\beta)! \quad (\beta \text{ désignant un second multi-indice})$$

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \quad \text{si} \quad x \in \mathbb{C}^n .$$

Nous noterons d la collection de dérivations $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n})$ (ou d_x s'il y a risque de confusion), et

$$d^\alpha = (\frac{\partial}{\partial x})^\alpha = (\frac{\partial}{\partial x_1})^{\alpha_1} \ldots (\frac{\partial}{\partial x_n})^{\alpha_n} .$$

Si $x, y, \ldots$ sont des vecteurs de $\mathbb{C}^n$, on pose

$$xy = x_1 y_1 + \ldots x_n y_n \text{ (noté aussi parfois } x.y \text{ ou } \langle x,y \rangle)$$

on posera aussi, si $a = (a_1 \ldots a_n) \in \mathbb{C}^n$

$$ad = a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots a_n \frac{\partial}{\partial x_n} .$$

Ainsi, par exemple, si f est un polynôme, la formule de Taylor s'écrit

$$f(x+y) = \sum \frac{y^\alpha}{\alpha!} (\frac{\partial}{\partial x})^\alpha f(x) = e^{yd_x} f .$$

Au §2 , nous aurons besoin de notations analogues pour des fonctions polynomiales d'une infinité de variables.

§1 - SYMBOLES

1. CÔNES COMPLEXES, FONCTIONS HOMOGENES.

(1.1) DEFINITION. - Un cône complexe (ou cône) est une variété analytique complexe U sur lequel le groupe multiplicatif $\mathbb{R}_+$ opère librement et analytiquement.

C'est-à-dire de sorte que l'action de $\mathbb{R}_+ : \mathbb{R}_+ \times U \to U$ se prolonge en un germe d'application holomorphe $\mathbb{C}^* \times U \to U$ défini au voisinage de $\mathbb{R}_+ \times U \subset \mathbb{C}^* \times U$.

L'exemple qui nous servira le plus souvent est le suivant : U est un voisinage conique de $\mathbb{C}^N \backslash 0$ (éventuellement, un ouvert étale de $\mathbb{C}^N \backslash 0$ -par exemple l'ouvert de définition de la fonction $(\Sigma z_j^2)^{1/2}$, qui est un revêtement à 2 feuillets du complémentaire du cône isotrope $(\Sigma z_j^2 = 0)$) ; et le même exemple avec paramètres : U ouvert (étale) conique de $E \backslash 0$, où E est un fibré vectoriel complexe holomorphe, de base holomorphe, et 0 désigne la section nulle. Dans cet exemple $\mathbb{R}_+$ opère par homothéties de la façon évidente.

De façon générale, si U est un cône quelconque, tout point de U possède un voisinage ouvert conique isomorphe à l'un des exemples ci-dessus ; nous prendrons comme modèles locaux des ouverts coniques de $\mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}^N \backslash 0)$ (où $\mathbb{R}_+$ opère sur le second facteur, par homothéties : $\lambda \cdot (x, \theta) = (x, \lambda\theta)$) (seule la dimension $n+N$ est un invariant local ; mais en pratique il sera aussi commode de pouvoir choisir $N = n$, ou $N = 1$).

(1.2) Soient U un cône, et f une fonction holomorphe sur U . On dit que f est homogène de degré m si on a $f(\lambda x) = \lambda^m f(x)$ pour tout $x \in U$ et tout $\lambda > 0$. Ici m est un nombre réel ou complexe (c'est afin de ne pas exclure d'emblée les exposants m non entiers que nous avons préféré $\mathbb{R}_+$ à $\mathbb{C}^*$ comme groupe dans la définition ci-dessus).

Plus généralement, soit U un cône, et $E \to U$ un fibré vectoriel complexe sur lequel $\mathbb{R}_+$ opère (de façon compatible avec l'action sur U). On dit qu'une section $f : U \to E$ est homogène de degré m si on a, pour tous $u \in U$ et $\lambda > 0$, $f(\lambda \cdot x) = \lambda^m \times (\lambda \cdot f(x))$ (dans cette expression, $\lambda \cdot f(x)$ dénote le résultat de l'action de $\lambda \in \mathbb{R}_+$ sur $f(x) \in E$; et $\lambda^m \times (\lambda \cdot f(x))$ désigne l'homothétique de $(\lambda \cdot f(x))$ dans la fibre vectorielle de $\lambda \cdot f(x)$). Ainsi, on parlera de champ de vecteur, ou d'opérateur différentiel sur U, homogène de degré m. Par exemple, sur le cône $U = \mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}^N \setminus 0)$ où $\mathbb{R}_+$ opère par $\lambda(x,\theta) = (x, \lambda^\alpha \theta)$ (α réel donné), les champs de vecteurs verticaux $\frac{\partial}{\partial \theta_j}$ sont homogènes de degré $-\alpha$, et les formes $d\theta_j$ sont homogènes de degré $+\alpha$.

2. <u>SYMBOLES</u>.

(1.3) DEFINITION. - <u>Soit</u> U <u>un cône, et</u> μ <u>un nombre réel (ou complexe). On note</u> $\hat{S}^\mu(U)$ <u>l'ensemble des séries formelles</u>

$$a = \sum_{k=0}^{\infty} a_{\mu-k}(u)$$

<u>où pour tout entier</u> $k \geq 0$, $a_{\mu-k}$ <u>est une fonction holomorphe homogène de degré</u> $\mu-k$ <u>sur</u> U.

<u>Les éléments de</u> $\hat{S}^\mu$ <u>sont les symboles formels de degré</u> $\leq \mu$.

Plus généralement, on définit $\hat{S}^\mu(U,E)$ si E est un fibré vectoriel complexe de base U, sur lequel $\mathbb{R}_+$ opère, comme ci-dessus.

$\hat{S}^\mu(U)$ est un espace vectoriel. On peut aussi multiplier les symboles (comme des séries) : on a $ab \in \hat{S}^{\mu+\nu}$ si $a \in \hat{S}^\mu$, $b \in \hat{S}^\nu$. On a enfin des inclusions : $\hat{S}^\mu \subset \hat{S}^{\mu+k}$ pour tout entier $k \geq 0$.

Désormais U est un cône ouvert dans $\mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}^N \setminus 0)$, dans lequel $\mathbb{R}_+$ opère par $\lambda.(x,\theta) = (x, \lambda\theta)$. Nous aurons à considérer des opérateurs différentiels formels

(1.4) $$P = \sum p_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)^{\beta}$$

où, pour tous multi-indices $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, $\beta = (\beta_1,\ldots,\beta_N)$. $p_{\alpha\beta}$ est un symbole : $p_{\alpha\beta} \in \hat{S}^{m_{\alpha\beta}}$, de degré $m_{\alpha\beta}$ entier, et où $m_{\alpha\beta} - |\beta| \to -\infty$ pour $(\alpha,\beta) \to \infty$. Comme chaque terme $p_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)^{\beta}$ opère de $\hat{S}^{\mu}$ dans $\hat{S}^{\mu+m_{\alpha\beta}-|\beta|}$, il est clair que la somme P opère de $\hat{S}^{\mu}$ dans $\hat{S}^{\mu+m}$ si $m = \sup(m_{\alpha\beta} - |\beta|)$.

(Dans le calcul de $P.a$, $a \in \hat{S}^{\mu}$, il faut regrouper les termes homogènes d'un même degré, et puisque $m_{\alpha\beta} - |\beta| \to -\infty$, il n'y a qu'un nombre fini de contributions dans chaque degré).

Dans les cas que nous aurons à utiliser le plus souvent, on a $\deg p_{\alpha\beta} = m - |\alpha|$. (Mais nous utiliserons un autre type d'exemple au §2).

3. SYMBOLES ANALYTIQUES, NORMES FORMELLES.

Soit U un cône, (a_k) et (b_k) deux suites de fonctions réelles positives sur U . Nous écrirons

(1.5) $$\sum a_k T^k \ll \sum b_k T^k$$

si on a $a_k \leq b_k$ pour tout entier k . Nous écrirons aussi

(1.6) $$\sum a_k T^k \ll \infty$$

si pour tout compact $K \subset U$ il existe $\varepsilon > 0$ tel que la série converge uniformément pour $u \in K$, $|T| \leq \varepsilon$.

(1.7) DEFINITION. - Soit $a = \sum_{0}^{\infty} a_{\mu-k} \in \hat{S}^{\mu}(U)$ un symbole formel. Nous dirons que a est analytique si on a

$$\sum |a_{\mu-k}| \frac{T^k}{k!} \ll \infty .$$

L'ensemble des symboles analytiques de degré $\leq \mu$ est noté $S^{\mu}(U)$.

Certains auteurs disent aussi que a est un symbole "convergent". Il faut prendre garde que ce n'est pas la série $\sum a_{\mu-k}$ qui est convergente.

Si U est un voisinage conique complexe de $X \times \mathbb{R}^*$ dans $X \times \mathbb{C}^*$, on peut définir pour tout k la transformée de Fourier inverse $\hat{a}_{\mu-k}(x,t)$ de la distribution $\mathrm{pf}.a_{\mu-k}(x,\theta)$. On montre que le symbole $\sum a_{\mu-k}$ est analytique si et seulement si pour tout compact $K \subset X$ il existe $\varepsilon > 0$ tel que la série $\sum \hat{a}_{\mu-k}(x,t)$ converge uniformément pour $x \in K$, $|\mathrm{Im}\, t| < \varepsilon\, |\mathrm{Re}\, t| < \varepsilon^2$.

Nous supposons désormais que U est un ouvert conique de $\mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}^N \setminus 0)$, et nous notons (x,θ) la variable de U $(x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{C}^n$, $\theta = (\theta_1,\dots,\theta_N) \in \mathbb{C}^N \setminus 0)$.

Soit $a = \sum a_{\mu-k} \in \hat{S}^\mu(U)$ un symbole formel. On pose

$$(1.8) \qquad N_\mu(a) = N_\mu(a,T) = \sum_{k,\alpha,\beta} |d_x^\alpha d_\theta^\beta a_k|\; T^{2k+|\alpha|+|\beta|}/(k+|\alpha|+|\beta|)! \ .$$

Il résulte très facilement de la formule de Cauchy et de la formule de Stirling que le symbole a est analytique si et seulement si $N_\mu(a,T) \ll \infty$.

D'autre part, on déduit aussitôt de la définition et de l'inégalité entre coefficients du binôme :

$$\binom{k+\ell+|\alpha+\beta|}{k+|\alpha|} \leq \binom{\alpha+\beta}{\alpha}$$

qu'on a

$$(1.9) \qquad N_{\mu+\nu}(ab) \ll N_\mu(a)\, N_\nu(b)$$

$$N_\mu\left(\frac{\partial a}{\partial \theta_j}\right) \ll T N_\mu(a) \quad , \quad N_{\mu+1}\left(\frac{\partial a}{\partial x_j}\right) \ll T N_\mu(a) \ .$$

Soit maintenant $P = \sum p_{\alpha\beta} d_x^\alpha d_\theta^\beta$ un opérateur différentiel formel comme en (1.4). Nous supposons qu'on a $p_{\alpha\beta} \in S^{\mu-|\alpha|}$ pour tous α, β. Il est alors naturel de poser

$$(1.10) \qquad N_\mu(P) = \sum_{\alpha,\beta} N_{\mu-|\alpha|}(p_{\alpha\beta})\, T^{|\alpha+\beta|} \ .$$

Il résulte alors aussitôt de (1.9) qu'on a

(1.11) $$N_{\mu+\nu}(P.a) \ll N_{\mu}(P)\, N_{\nu}(a) \quad \text{si} \quad a \in S^{\nu} .$$

On dira que P est analytique si $N_{\mu}(P) \ll \infty$. Ainsi Pa est analytique si P et a le sont.

Remarque : pour certaines questions, il serait agréable d'avoir $N_{\mu+\nu}(PQ) \ll N_{\mu}(P)\, N_{\nu}(Q)$, ce qui est faux avec le choix des coefficients ci-dessus. On a néanmoins

(1.12) $$N_{\mu+\nu+\rho}(PQa) \ll N_{\mu}(P)\; N_{\nu}(Q)\; N_{\rho}(a)$$

si a est un symbole de degré $\leq \rho$, P et Q des opérateurs différentiels. Ceci suffira pour les applications que nous avons en vue.

Si $P = \sum p^{k}_{\alpha\beta}\, d^{\alpha}_{x}\, d^{\beta}_{\theta}$, où $\rho^{k}_{\alpha\beta}$ est homogène de degré $\mu - k - |\alpha|$, on pose

(1.13) $$N'_{\mu}(P) = \sum_{k,\alpha,\beta,\alpha',\beta'} C^{\alpha'\beta'}_{k\alpha\beta}\, |d^{\alpha'}_{x}\, d^{\beta'}_{\theta}\, p^{k}_{\alpha\beta}|\; T^{2k+|\alpha|+|\alpha'|+|\beta|+|\beta'|}$$

$$\text{avec} \quad C^{\alpha'\beta'}_{k\alpha\beta} = 2(2n+2N)^{-k}\, \frac{k!\,\alpha!\,\beta!}{(k+|\alpha|+|\beta|)!\,(k+|\alpha'|+|\beta'|)!} .$$

On vérifie alors, en recopiant le calcul de [1], § 1, pp. 303-304 qu'on a

$$N_{\mu+\nu}(PQ) \ll N_{\mu}(P)\, N_{\nu}(Q) .$$

(1.14) Exemple : Soit $q = q(x,y,\eta,\theta) \in S^{m}(U)$, où U est un cône ouvert de $\mathbb{C}^{n'+n} \times (\mathbb{C}^{n+n''} \setminus 0)$. Posons

$$P = \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\alpha} q .\, \frac{d^{\alpha}_{\eta}}{\alpha!} .$$

On a alors $N_{m}(P) = \sum\limits_{k,\gamma} C_{k,\gamma}\, \dfrac{|d^{\gamma} q_{m-k}|}{(k+|\gamma|)!}\, T^{2k+|\gamma|}$ avec

$C_{k,\gamma} = \sum\limits_{\alpha+\beta=\gamma} \dfrac{(k+|\gamma|)!}{\alpha!\,(k+|\beta|)!}$ (la somme porte sur les multi-indices $\alpha = (\alpha_1 \dots \alpha_n)$ correspondant aux dérivations par rapport aux seules variables y , et β quelconque). Il est clair qu'on a

$$1 \leq C_{k,\gamma} \leq (2M)^{k+|\gamma|}$$

$M = 2n+n'+n''$ désignant le nombre total de variables. Donc

$$N_m(q) \ll N_m(P) \ll N(q, 2MT)$$

de sorte que P est analytique si q est analytique.

§2 - OPERATEURS PSEUDODIFFERENTIELS

1. DEFINITION DES OPERATEURS PSEUDODIFFERENTIELS.

Soit X un ouvert de $\mathbb{C}^n$, et

$$p = p(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x)\,\xi^\alpha \tag{2.1}$$

un polynôme de degré $\le m$, à coefficients holomorphes dans X , que nous considèrerons aussi comme fonction sur $U = X\times(\mathbb{C}^n\setminus 0)$ $(p\in S^m(U))$.

A ce polynôme nous associons l'opérateur différentiel

$$P = p(x,d) = \sum a_\alpha(x)\,d^\alpha \ . \tag{2.2}$$

Nous poserons

$$L_p = e^{-x\xi}\circ P\circ e^{x\xi} = p(x,\xi+d_x) = \sum_\alpha d_\xi^\alpha p(x,\xi)\,\frac{d_x^\alpha}{\alpha!} \ . \tag{2.3}$$

Ainsi L_p est un opérateur différentiel sur U (qui ne fait intervenir que des dérivations horizontales d_x^α) . On a en particulier

$$p = L_p(1) = e^{-x\xi}P(e^{x\xi}) \ . \tag{2.4}$$

Soit maintenant $Q = q(x,d)$ un autre opérateur différentiel, et soit $R = r(x,d) = P\circ Q$. On a évidemment $L_r = L_p\circ L_q$, d'où

$$p\circ q = r = L_p(q) = \sum \frac{1}{\alpha!}\, d_\xi^\alpha p\cdot d_x^\alpha q \tag{2.5}$$

(où la première égalité constitue une définition de $p\circ q$). Ceci s'écrit aussi

$$p\circ q = R_q(p) \quad \text{avec} \quad R_q = \sum \frac{1}{\alpha!}\, d_x^\alpha q\,.\,d_\xi^\alpha \tag{2.6}$$

ou enfin

$$p\circ q(x,\xi) = e^{d_y d_\eta}\,p(x,\eta)\,q(y,\xi)\,\Big|_{\substack{y=x\\ \eta=\xi}} \ . \tag{2.7}$$

Notons aussi qu'on a en particulier

(2.7)bis $$p(x,d)f = e^{d_y d_\eta} p(x,\eta) f(y) \big|_{\substack{y=x\\ \eta=0}} .$$

Soit maintenant U un cône ouvert de $X \times (\mathbb{C}^n \setminus 0)$, et $p \in \hat{S}^m(U)$. On pose à nouveau

$$L_p = \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} d_\xi^\alpha p \, d_x^\alpha .$$

C'est un opérateur différentiel au sens du §1.2, et il résulte aisément de la formule de Cauchy et de la définition de la norme formelle (1.10) que p est analytique si et seulement si $N_m(L_p) \ll \infty$.

Si maintenant $p \in \hat{S}^m$ et $q \in \hat{S}^{m'}$, nous posons

$$p \circ q = L_p(q) = e^{d_y d_\eta} p(x,\eta) q(y,\xi) \big|_{\substack{y=x\\ \eta=\xi}}$$

On a donc $p \circ q \in \hat{S}^{m+m'}$, et $p \circ q$ est analytique si p et q le sont. On a $L_{p \circ q} = L_p \circ L_q$: en effet ceci est vrai lorsque p et q sont des polynômes d'après ce qui précède. Or on a de toute façon :

$$L_{p\circ q} - L_p \circ L_q = \sum A_\alpha d^\alpha$$

où les A_α sont des polynômes à coefficients rationnels des dérivées de p et q et comme il n'y a pas de relation algébrique entre les dérivées d'un polynômes, les A_α sont identiquement nuls.

(2.8) DEFINITION. - <u>On notera</u> $\mathcal{E}(U) = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} S^m(U)$ <u>l'algèbre associative dont la loi de multiplication est</u> $(p,q) \to p \circ q$. <u>Ses éléments sont les opérateurs pseudodifférentiels sur</u> U .

Il est clair qu'en fait $\mathcal{E}$ est un faisceau d'algèbres associatives filtrées, sur les ouverts coniques de $\mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}^n \setminus 0)$.

Si $p \in S^m$, $q \in S^{m'}$, il résulte aussitôt de la définition et du fait que $d_\xi^\alpha p$ est de degré $\leq m-1$ si $\alpha \neq 0$ qu'on a $p \circ q - pq \in S^{m+m'-1}$.

Ainsi l'algèbre graduée associée $\mathrm{Gr}\,\mathcal{E}$ s'identifie à l'algèbre graduée des fonctions homogènes de degré entier (la loi d'algèbre étant la multiplication).

De même les symboles formels donnent naissance à un faisceau d'algèbres.

Si $p = \sum_0^\infty p_{m-k} \in S^m$, on posera $\sigma(p) = p_m$: c'est une fonction homogène de degré m, qui caractérise la classe de p mod S^{m-1}. On écrira $\sigma_m(p)$ s'il y a risque de confusion sur le degré de p ($\sigma_m(p) = 0$ signifie donc qu'en fait p est de degré $\leq m-1$). La remarque ci-dessus signifie qu'on a

$$(2.9) \qquad \sigma(p\circ q) = \sigma(p)\sigma(q) .$$

Il résulte aussi de la définition que si p,q sont de degrés respectifs m et m', $[p,q] = p\circ q - q\circ p$ est en fait de degré $\leq m+m'-1$, et on a

$$(2.10) \qquad \sigma_{m+m'-1}([p,q]) = \{\sigma_m(p),\sigma_m(q)\}$$

où $\{\ ,\ \}$ désigne le crochet de Poisson :

$$(2.11) \qquad \{f,g\} = \sum_1^n \frac{\partial f}{\partial \xi_j}\cdot\frac{\partial g}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j}\,\frac{\partial g}{\partial \xi_j} .$$

Voici un premier résultat d'inversibilité qui explique comment l'algèbre des opérateurs pseudo-différentiels pourra jouer le rôle de localisée de l'algèbre des opérateurs différentiels :

(2.12) PROPOSITION. - Soit $p \in \mathcal{P}(U)$ un opd. de degré m. Pour que p ait un inverse de degré $-m$, il faut et il suffit que $\sigma_m(p)$ soit inversible (on dit alors que p est elliptique dans U).

En effet, soit q le symbole $\frac{1}{p_m} \in S^{-m}(U)$ (réduit à un seul terme, donc analytique). On a alors $p\circ q = 1-r$, où r est de degré ≤ -1. Posons maintenant

$$q' = 1 + r + r^2 + \ldots = 1 + (1-L_r)^{-1}.r \in \hat{S}^o(u)$$

(où dans la première somme, il s'agit des puissances successives dans l'algèbre $\mathcal{B}$) . Il est clair qu'on a $p \circ q \circ q' = 1$, et d'après la remarque (1.12), on a

$$N_o((1-L_r)^{-1}r) \ll \sum_0^\infty N_o(L_r^k-r) \ll (\sum_0^\infty N_o(L_r)^k) \cdot N_o(r)$$

car si a est analytique, on a $N_o(r) \ll \infty$, $N_o(L_r) \ll \infty$ et puisque $N_o(L_r)$ n'a pas de terme constant,

$$(\sum_0^\infty N_o(L_r)) = (1-N_o(L_r))^{-1} \ll \infty ,$$

de sorte que q' et $p^{-1} = q \circ q'$ sont analytique. (Le même raisonnement montre que p a un inverse à gauche, nécessairement égal à l'inverse à droite).

TRANSPOSE , ADJOINT.

Si $P = p(x,d) = \sum a_\alpha(x)d^\alpha$ est un opérateur différentiel sur $X \subset \mathbb{C}^n$ le transposé (resp. l'adjoint) est défini par

$$\begin{aligned} {}^tP &= {}^tp(x,d) = \sum (-d)^\alpha a_\alpha(x) \\ p^* &= p^*(x,d) = \sum (-d)^\alpha \overline{a_\alpha(\bar{x})} \quad . \end{aligned}$$

Il résulte donc des formules (2.7), (2.7) bis qu'on a

$$(2.13) \qquad \begin{aligned} {}^tp(x,\xi) &= e^{d_x d_\xi} p(x,-\xi) \\ p^*(x,\xi) &= e^{d_x d_\xi} \bar{p}((x,\xi)^*) \end{aligned}$$

où on a posé $(x,\xi)^* = \bar{x},-\bar{\xi}$. Ces formules se prolongent aussitôt aux opd. Noter que si p est un opd., défini dans un cône ouvert U , ${}^tp$ est défini dans le cône opposé $-U$, et p^* dans le cône U^* .

2. INTEGRALE OSCILLANTE, METHODE DE LA PHASE STATIONNAIRE.

Soit $P = p(x,d)$ un opérateur différentiel sur X , et $\varphi = \varphi(x)$

une fonction holomorphe. Nous noterons $\underset{\sim}{\varphi} = (d^\alpha\varphi)$, $\alpha \neq 0$ la famille des dérivées d'ordre > 0 de φ .

Si $A = (A_\gamma)$ est une famille de nombres entiers indexée par les multi-indices $\gamma \neq 0$, tous nuls sauf un nombre fini (multi-indice en une infinité de variables), nous poserons

$$\underset{\approx}{\varphi}^A = \prod (d^\gamma\varphi)^{A_\gamma} ,$$

$$|A| = \sum A_\gamma$$

$$\underline{A} = \sum \gamma A_\gamma$$ ($\underline{A}$ est un multi-indice au sens usuel) .

On a $e^{-\varphi}de^\varphi = (d+\varphi')$, d'où

$$(2.14) \qquad e^{-\varphi}d^\alpha e^\varphi = (d+\varphi')^\alpha = \prod \left(\frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)^{\alpha_j} = \sum_{\underline{A}+\beta=\alpha} \lambda^\alpha_{A\beta}\, \underset{\sim}{\varphi}^A \lambda^\beta$$

dans la troisième égalité, le produit des $\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)$ peut être calculé dans n'importe quel ordre car ces opérateurs commutent. La quatrième égalité constitue une définition des coefficients $\lambda^\alpha_{A\beta}$, ceux-ci sont évidemment entiers. Que la somme porte sur les multi-indices A,β tels que $\underline{A}+\beta = \alpha$ se voit aussitôt en faisant des changements de variable linéaires, de matrice diagonale.

Par suite, si $P = p(x,d)$ est un opérateur différentiel, on a

$$e^{-\varphi}p(x,d)e^\varphi = \sum_{\beta+\underline{A}=\alpha} \frac{1}{\alpha!}\lambda^\alpha_{A\beta}\, \underset{\approx}{\varphi}^A \left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^\alpha p(x,0)d^\beta .$$

Nous allons réécrire cette égalité sous une forme qui permettra de la généraliser aux opd, en regroupant les termes qui contiennent effectivement une dérivée première de φ . Pour cela, on observe que si on pose

$$e^\varphi Pe^{-\varphi} = q(x,d_x)$$

$$\varphi(y) = \varphi(x) + \langle y-x,\xi(x)\rangle + h_x(y) \qquad (\text{donc } \xi(x) = d\varphi(x))$$

on a

$$q(x,d_x) = e^{-\varphi(y)}p(y,d_y)e^{\varphi(y)}\Big|_{y=x} = e^{-h_x(y)}p(y,\xi+d_y)e^{h_x(y)}\Big|_{y=x}$$

$$= \sum \frac{1}{\alpha!}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^{\alpha} p(x,\xi(x)).e^{-h_x}d_y^{\alpha}e^{h_x}\Big|_{y=x} .$$

Or on a évidemment

$$e^{-h_x}d_y^{\alpha}e^{h_x}\Big|_{y=x} = \sum_{\underline{A}+\beta=\alpha}' \lambda^{\alpha}_{A\beta}\, \underset{\approx}{\varphi}^{A} d^{\beta}$$

où $\sum'$ signifie qu'on somme uniquement sur les A tels que $A_{\gamma} = 0$ si $|\gamma| = 1$ (de façon équivalente, on remplace φ' par 0 dans les coordonnées de $\underset{\approx}{\varphi}$, sans toucher aux autres dérivées). D'où finalement

$$(2.15)\qquad e^{-\varphi}pe^{\varphi} = \sum_{\underline{A}+\beta=\alpha}' \lambda^{\alpha}_{A\beta}\, \underset{\approx}{\varphi}^{A} \frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^{\alpha}p}{\partial\xi^{\alpha}}(x,\xi(x))\, d^{\beta} \quad \text{avec} \quad \xi(x) = d_x\varphi .$$

Nous allons enfin écrire cette formule d'une troisième façon, en s'inspirant de (2.7) :

(2.16) PROPOSITION. - Soit $\xi(x,y)$ une fonction vectorielle holomorphe telle que $\varphi(x)-\varphi(y) = \langle x-y,\xi(xy)\rangle$. On a alors

$$e^{-\varphi}Pe^{\varphi}f = e^{d_yd_\eta}p(x,\eta+\xi(x,y))f(y)\Big|_{\substack{y=x\\ \eta=0}} .$$

Démonstration : pour abréger, nous poserons lorsque $q(x,y,\eta)$ est un polynôme de η , à coefficients holomorphes en x et y .

$$(2.17)\qquad I(q) = e^{d_yd_\eta}q(x,y,\eta)\Big|_{\substack{y=x\\ \eta=0}}$$

$I(q)$ est donc une fonction holomorphe de x . I se comporte comme l'intégrale oscillante.

$$(2\pi)^{-n}\iint e^{\langle x-y,i\eta\rangle}q(x,y,i\eta)d_yd_\eta$$

de la théorie des opérateurs intégraux de Fourier :

(2.18) LEMME. - On a $I((\frac{\partial}{\partial\eta_j} + x_j - y_j)q) = I((\frac{\partial}{\partial y_j} - \eta_j)q) = 0$.

En effet, le crochet $[\frac{\partial}{\partial\eta_j}, \eta_k] = \partial_{jk}$ commute avec tous les opérateurs différentiels. On a donc

$$[e^{d_y d_\eta}, x_j - y_j] = -\frac{\partial}{\partial\eta_j} e^{d_y d_\eta}$$

(car on a $[f(A),B] = f'(A).[A,B]$ si $[A,B]$ commute à A et à B) . D'où

$$e^{d_y d_\eta}(\frac{\partial}{\partial\eta_j} + x_j - y_j) = (x_j - y_j) e^{d_y d_\eta}$$

et la restriction à l'hyperplan $y_j = x_j$ est nulle. L'autre égalité se démontre de la même façon.

Démontrons maintenant la proposition : il s'agit de prouver qu'on a

$$I((e^{-\varphi(x)+\varphi(y)} p(x,\eta) - p(x,\eta+\xi(x,y)))\, f(y)) = 0 .$$

Or on a

$$p(x,\eta+\xi(xy)) = e^{\langle d_\eta, \xi(xy)\rangle} p(x,\eta)$$

et

$$e^{\varphi(y)-\varphi(x)} p(x,\eta) = e^{-\langle x-y, \xi(x,y)\rangle} p(x,\eta) .$$

Mais on a

$$e^{-\langle x-y,\xi\rangle} - e^{\langle d_\eta,\xi\rangle} = (e^{\langle d_\eta + x-y, \xi\rangle} - 1) e^{-\langle x-y,\xi\rangle}$$

d'où il résulte aussitôt que $(e^{-\varphi(x)+\varphi(y)} p(x,\eta) - p(x,y+\xi))f$ est combinaison linéaire de polynômes de la forme indiquée dans le lemme.

Ce qui précède s'applique encore bien sûr lorsque φ , f , etc... dépendent d'un paramètre θ .

3. DEVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES.

Soit X un ouvert de $\mathbb{C}^n$, U un cône ouvert de $X \times (\mathbb{C}^N \setminus 0)$, et $\varphi = \varphi(x,\theta)$ une fonction holomorphe homogène de degré 1 sur U , telle que $d_x\varphi$ ne s'annule jamais dans U .

Soit maintenant V un cône ouvert de $X \times (\mathbb{C}^n \setminus 0)$, tel que $(x, d_x\varphi(x,\theta)) \in V$ pour tout $(x,\theta) \in U$, et soient $p \in S^m(V)$, $a \in S^u(U)$.

$$(2.19)\qquad L_p^{\varphi}(a) = e^{d_y d_\eta}.p(x,\eta+\xi(xy\theta))a(y,\theta)\,\Big|_{\substack{y=x\\ \eta=0}}$$

si ξ est une fonction vectorielle holomorphe, définie au voisinage de la diagonale $x = y$, et telle que $\varphi(x,\theta)-\varphi(y,\theta) = \langle x-y\,,\,\xi(xy\theta)\rangle$.

$L_p^{\varphi}(a)$ est donc un symbole sur U, analytique si p et a sont analytiques. D'après le n°2, on a $L_p^{\varphi}a = e^{-\varphi}p(x,d)e^{\varphi}a$ si p est un polynôme. La formule (2.14), et l'argument de prolongement des identités algébriques du n°1, montre que L_p^{φ} est l'opérateur différentiel formel sur U :

$$(2.20)\qquad L_p^{\varphi} = \sum_{\underline{A}+\beta=\alpha}{}' \lambda_{A\beta}^{\alpha}\, \underset{\approx}{\varphi}^{A}\, \frac{1}{\alpha!}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^{\alpha} p(x,d_x\varphi(x,\theta))\,d_x^{\beta}$$

où $\underset{\sim}{\varphi}$ désigne le vecteur $(d_x^{\gamma}\varphi)$, $|\gamma| \geq 1$, et $\sum'$ signifie, comme pour (2.14) , qu'on somme sur les multi-indices $A = (A_\gamma)$ tels que $A_\gamma = 0$ si $|\gamma| = 1$.

Les termes de plus haut degré de (2.20) sont

$$(2.21)\qquad L_p^{\varphi} = p + \sum \frac{\partial p}{\partial\xi_j}\frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{1}{2}\sum \frac{\partial^2 p}{\partial\xi_i\partial\xi_j}\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j} + \dots$$

les coefficients $(p,\frac{\partial p}{\partial\xi_j},\frac{\partial^2 p}{\partial\xi_i\partial\xi_j},\dots)$ étant évalués au point $x,\xi = d_x\varphi(x,\theta)$.

On voit sur la formule (2.20) que L_p^{φ} est un opérateur différentiel formel du type décrit au §1 , (1.4) : $\underset{\approx}{\varphi}^{A}$ est de degré $|A| = \sum A_\gamma$, et $(\frac{\partial}{\partial\xi})^{\alpha}p$ de degré $\leq m-|\alpha|$; comme on a $|\gamma| \geq 2$ pour $A_\gamma \neq 0$ dans la somme, donc $|\underline{A}| = \sum |\gamma| A_\gamma \geq 2|A|$, le coefficient de d^{β} est de degré $\leq m + |A| - |\alpha| \leq m - |\beta| - \frac{1}{2}|\underline{A}|$ (on voit aussi qu'il n'y a qu'un nombre fini de contributions dans un degré donné). En fait, ceci se voit mieux encore sur la formule (2.19), qui montre aussi clairement qu'on a $N(L_p^{\varphi}) \ll \infty$ si p est analytique (exemple (1.14), avec $q = p(x,\eta+\xi(x,y,\theta)))$.

4. CHANGEMENTS DE COORDONNEES, FAISCEAU DES OPD.

Soit X un ouvert de $\mathbb{C}^n$, et χ un isomorphisme de X sur un autre ouvert de $\mathbb{C}^n$. Nous noterons encore $y = \chi(x)$ (y est donc un nouveau système de coordonnées sur X).

Soit $P = p(x,d)$ un opérateur différentiel sur X, et $P_\chi = \chi_* P$ son image par χ : on a $P_\chi = p_\chi(y,d_y)$ où p_χ est un nouveau polynôme :

$$p_\chi(y,\eta) = e^{-y\eta} P(e^{y\eta}) \quad . \tag{2.22}$$

Les formules du n° 2 nous donnent un moyen d'écrire ce polynôme p_χ en fonction de p qui se prolonge aussitôt au cas où p est un opd : si on pose $\chi(x) - \chi(x') = M(x,x').(x-x')$ (où M est une matrice à coefficients holomorphes),.

$$p_\chi(y,\eta) = e^{d_{x'} d_{\xi'}} p(x,\xi' + {}^t M(x,x').\eta) \Big|_{\substack{x=x' \\ \xi'=0}} \qquad (y=\chi(x)) \quad . \tag{2.23}$$

Nous noterons encore χ_* l'application $p \to p_\chi$: si $p \in S^m(U)$, on a $\chi_* p \in S^m(V)$ si V est le cône image de U par l'application $(x,\xi) \to (\chi(x), {}^t\chi'^{-1}(x).\xi)$ i.e. l'extension de χ aux vecteurs cotangents (puisque $M(x,x) = \chi'(x)$).

Si nous interprétons $X \times (\mathbb{C}^n \backslash 0)$ comme le fibré cotangent de X (privé de sa section nulle) : $T^*X \backslash 0$, nous voyons que nous avons défini un foncteur, qui à un ouvert $X \subset \mathbb{C}^n$ associe un faisceau $\mathcal{E}_X$ sur les ouverts coniques de $T^*X\backslash 0$, et à un isomorphisme de variétés $\chi : X \to X'$ associe un isomorphisme de faisceaux χ_* de $\mathcal{E}_X$ dans $\mathcal{E}_{X'}$. Ceci permet aussitôt de définir, par recollement, le faisceau des opd. d'une variété analytique complexe. En vue du n° 2, on peut aussi définir un opd. sur X comme une classe d'opérateurs différentiels sur les développements asymptotiques de base X (deux tels opérateurs sont équivalents si localement, pour un choix de coordonnées convenable, ils proviennent d'un même opd. ; nous laissons au lecteur consciencieux le soin de mettre au points les détails de cette définition).

Ainsi $\mathcal{P}$ est un faisceau d'algèbres associatives filtrées sur les ouverts coniques de $T^*X\backslash 0$. Nous noterons $F^k\mathcal{P}$ le faisceau des opd. de degré $\leq k$. Si ξ est un point de $T^*X\backslash 0$ (vecteur cotangent non nul), nous noterons $\mathcal{P}_\xi$, $F^k\mathcal{P}_\xi$ l'ensemble des germes en ξ .

Remarquons que dans la formule (2.22) le terme dominant de p_χ est

$$p_{\chi,m}(y,\eta) = p_m(x,{}^t\chi'(x).\eta) \qquad (y = \chi(x))$$

(puisque $M(x,x) = \chi'(x)$) . Autrement dit $\sigma(p) = p_m$ se transforme comme une fonction (homogène de degré m) sur $T^*X\backslash 0$.

Pour tout entier m , on notera $\mathcal{O}(m)$ le faisceau des fonctions homogènes de degré m sur $T^*X\backslash 0$: σ définit donc par passage au quotient un isomorphisme

$$F^m\mathcal{P}/F^{m-1}\mathcal{P} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}(m)$$

de sorte que l'algèbre graduée $\mathrm{Gr}\,\mathcal{P}$ s'identifie à l'algèbre multiplicative $\oplus\,\mathcal{O}(m)$.

Si p , q sont deux opd. de degrés respectifs m et m' , on a encore $\sigma_{m+m'-1}([p,q]) = \{\sigma_m(p),\sigma_{m'}(q)\}$ (le crochet de Poisson étant celui de la structure symplectique canonique de T^*X).

§3 - THEOREME DE FINITUDE

1. ENONCE.

Le résultat ci-dessous fournira, pour les opd., des résultats du même genre que le lemme de préparation et les résultats de finitude qui s'en déduisent, pour les fonctions analytiques.

Nous nous plaçons sur $U = \mathbb{C}^{n-1} \times (\mathbb{C}\backslash 0)$, où les homothéties sont données par $\lambda(x,\theta) = (x,\lambda\theta)$ (en pratique, on a besoin d'autres actions de $\mathbb{R}_+$, par exemple celle sur T^*X , pour les opd., comme au §2 - mais on peut toujours, par un changement de variables convenables, se ramener à ce cas). Soit ξ un point de U ; nous noterons S_ξ^m l'espace des germes en ξ de symboles analytiques de degré m , et $S_\xi = \cup S_\xi^m$.

Nous noterons $S'_\xi \subset S_\xi$ le sous-espace des symboles qui ne dépendent que des variables $X_1,\dots,X_p,\theta$ (et pas de $X_{p+1},\dots,X_{n-1}$) .

Soit enfin

$$(3.1) \qquad P = \Sigma a_\alpha^k d^\alpha \quad : \quad (S_\xi)^{M+M'} \to (S_\xi)^N$$

un opérateur différentiel analytique comme en (1.4), de sorte que $a_\alpha^k d^\alpha$ soit homogène de degré $-k-|\alpha|$, pour tous k,α . (Les a_α^k sont de matrices à $M+M'$ lignes et N colonnes, à coefficients homogènes).

On notera $\mathcal{O}_\xi$ l'espace des germes en ξ de fonctions homogènes de degré 0 , et $\mathcal{O}'_\xi \subset \mathcal{O}_\xi$ le sous-espace des fonctions qui ne dépendent pas de $X_{p+1},\dots,X_{n-1}$.

P diminue les degrés, et définit par passage au quotient un homomorphisme $\mathcal{O}$-linéaire

$$\sigma(P) \quad : \quad \mathcal{O}_\xi^{M+M'} \to \mathcal{O}_\xi^N$$

(qui n'est autre que la multiplication par la matrice a_α^k , $\alpha = k = 0$).

Soit $\mathfrak{J} \subset (S_\xi)^N$ un sous-espace vectoriel, tel que $\mathrm{gr}\,\mathfrak{J} = \oplus\, \mathfrak{J} \cap (S_\xi^k)^N / \mathfrak{J} \cap (S_\xi^{k-1})^N$ soit un $\oplus\,\mathcal{O}(n)$-module, donc $\mathrm{gr}\,\mathfrak{J} \simeq \oplus\,\mathcal{O}(n) \otimes \sigma(\mathfrak{J})$, avec $\sigma(\mathfrak{J}) = \mathrm{gr}^\circ \mathfrak{J} = \mathfrak{J} \cap (S_\xi^\circ)^N / \mathfrak{J} \cap (S_\xi^{-1})^N$.

Soit enfin u la restriction de P à $S_\xi^M \oplus S'^{M'}_\xi$. On notera encore $\sigma(u)$ la restriction de $\sigma(P)$ à $\mathcal{O}^M \oplus \mathcal{O}'^{M'}$.

(3.2) THEOREME. - Supposons que l'image de u est contenue dans $\mathfrak{I}$. Alors si $\sigma(u)$ est surjectif : $\mathcal{O}_\xi^M + \mathcal{O}_\xi'^{M'} \to \sigma(\mathfrak{I})$, l'image de u est $\mathfrak{I}$. Plus précisément, pour tout m , on a $\mathfrak{I} \cap (S_\xi^m)^N = u((S_\xi^m)^M + (S_\xi'^m)^{M'})$.

Montrons d'abord que l'extension de u aux symboles formels est surjective : si $f = \Sigma f^k \in S_\xi^M + S_\xi'^{M'}$, et $g = \Sigma g^k \in S_\xi^N$, l'équation $Pf = g$ équivaut à la suite d'équations

$$\sum_{p+q+|\alpha|=k} a_\alpha^p . d^\alpha f^q = g^k$$

soit encore

$$a_o^o f^k = g^k - \sum_{\substack{p+q+|\alpha|=k \\ q<k}} a_\alpha^p . d^\alpha f^q . \tag{3.3}$$

Pour $k = 0$, cette équation a une solution (puisque $g^o \in \mathcal{O}(m) \otimes \sigma(\mathfrak{I})$ si $m = \deg g$, et qui a_o^o est aussi une surjection $\mathcal{O}(m)^M + \mathcal{O}'(m)^{M'} \to \mathcal{O}(m) \otimes \sigma(\mathfrak{I})$ pour tout m). Supposons alors construite $f^o \dots f^{k-1}$, de sorte que $g - P(\sum_0^{k-1} f^j)$ soit de degré $\leq k$. Alors comme $g - P(\sum_0^{k-1} f_j) \in \mathfrak{I}$, sa partie principale, qui est le deuxième membre de (3.3), est dans $\mathcal{O}(m-k) \otimes \sigma(\mathfrak{I})$ de sorte que l'équation (3.3) a une solution, et la récurrence se poursuit indéfiniment.

Pour démontrer le théorème, il s'agit maintenant de refaire la construction ci-dessus, de sorte que les f^k ne soient pas trop grands : c'est ce que nous faisons au n° 2.

(3.4) Remarques : On a $\sigma(\operatorname{Ker} v) = \operatorname{Ker} \sigma(v)$; en particulier v est injective si $\sigma(v)$ est injective. En effet il est clair qu'on a $\sigma(\operatorname{Ker} v) \subset \operatorname{Ker} \sigma(v)$; d'autre part si $\alpha \in \operatorname{Ker} \sigma(v)$, et si $\alpha = \sigma(a)$ où a est de degré 0 , va est de degré ≤ -1 donc il existe b de degré ≤ -1 tel que $va = vb$. On a alors $v(a-b) = 0$ et $\alpha = \sigma(a-b) \in \sigma(\operatorname{Ker} v)$.

Plus généralement, supposons qu'on a coupé P (et v) en deux morceaux : $v' \oplus v''$, de sorte que $\operatorname{gr} \operatorname{Im} v''$ soit un $\oplus \mathcal{O}_\xi(n)$-module, et que $\sigma(v'')$ ait pour image $\sigma(\operatorname{Im} v'')$. Alors si $\sigma(v).\varphi = 0$ implique $\varphi' = 0$, $v.f = 0$ implique $f' = 0$ (f', f'' ou φ', φ'' désignant les composantes correspondant au découpage $v = v' \oplus v''$). En effet supposons $v.f = 0$;

si $f' \neq 0$, soit m son degré $(\sigma_m(f') \neq 0)$. Comme $\deg vf" \leq m$, le théorème montre qu'il existe f''_1 tel que $vf" = vf''_1$, avec $\deg f''_1 \leq m$ (en fait il suffit d'appliquer un nombre fini de fois le procédé de récurrence ci-dessus). On a alors $v.(f'+f''_1) = 0$, donc $\sigma(v).(\sigma_m(f')+\sigma_m(f''_1)) = 0$, qui implique $\sigma_m(f') = 0$ contrairement à l'hypothèse.

(3.5) Remarque : Le théorème admet l'extension suivante :

Soit S (resp. S') l'ensemble des germes de symboles (de degré entier) en un point ξ_o (resp. θ_o) de $\mathbb{C}^N\backslash 0$ (resp. $\mathbb{C}^{n'}\backslash 0$) ; soit ψ un germe d'application holomorphe, homogène de degré 1 : $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{n'}$, telle que $\psi(\xi_o) = \theta_o$. Soit enfin u : $S^M + S'^{M'} \to S^N$ une application linéaire définie au moyen d'opérateurs différentiels formels :

$$u(s,s') = Ps + P's' = \sum_\alpha a_\alpha(\xi).d_\xi^\alpha s + \sum_\beta b_\beta(\xi).d_\theta^\beta s'(\theta)\,|_{\theta=\psi(\xi)}$$

où les $a_\alpha(\xi)$, $b_\alpha(\xi)$ sont des symboles analytiques à coefficients matriciels, de degré ≤ 0 et $\Sigma N(a_\alpha^j)T^{(\alpha)} \ll \infty$, $\Sigma N(b_\beta^j)T^{(\beta)} \ll \infty$.

Supposons que l'image de u soit contenu dans un sous-espace vectoriel $\mathfrak{J}$ de S^N , tel que $\mathrm{gr}\,\mathfrak{J}$ soit un $\Sigma\,\mathcal{O}(n)$-module, et que $\sigma(u)$ ait pour image $\sigma(\mathfrak{J})$ tout entier. Alors l'image de u est $\mathfrak{J}$ tout entier.

On se ramène comme suit au théorème :

notons $S"$ l'ensemble des germes en (ξ_o, θ_o) de symboles sur $\mathbb{C}^{N+N'}\backslash 0$. On prolonge alors u en une application U : $S"^M + S'^{M'} \to S"^N$ définie par

$$v(s,s') = \overline{P}s + P's' = \sum_\alpha a_\alpha(\xi)(d_\xi + \frac{\partial\psi}{\partial\xi}.d_\theta)^\alpha s + \sum_\beta b_\beta(\xi) d_\theta^\beta s'(\theta)$$

(la k-ième composante de $d_\xi + \frac{\partial\psi}{\partial\xi} d_\theta$ est $\frac{\partial}{\partial\xi_k} + \Sigma \frac{\partial\psi_j}{\partial\xi_k}\frac{\partial}{\partial\theta_j}$).

Soit v' : $(S")^{Nn'} \to (S")^N$ défini par

$$v'(s_1,\dots,s_{n'}) = \sum_1^{n'} (\theta_j - \psi_j(\xi)) s_j \qquad (s_j \in s"^N) .$$

Soient finalement $w = v + v'$, et $\mathfrak{J}' = \mathfrak{J} + \mathrm{Im}\, v'$. Alors par construction l'image de $\sigma(w)$ est $\sigma(\mathfrak{J}')$ entier, donc l'image de w est $\mathfrak{J}'$ entier, et tout élément $\sigma \in \mathfrak{J}'$ de degré $\leq m$ est image par w d'un élément de degré $\leq m$.

Soit maintenant $\mathfrak{m}$ l'idéal engendré par les fonction $\theta_j - \psi_j(\xi)$ (idéal de définition du graphe de ψ) : on a $(\frac{\partial}{\partial \xi_k} + \sum_1^{n'} \frac{\partial \psi_j}{\partial \xi_k} \frac{\partial}{\partial \theta_j}).(\theta_i - \psi_i(\xi)) = 0$ pour tout entier i,k , et par suite $\overline{P}(\mathfrak{m}S''^M) \subset \mathfrak{m}S''^N$. Ainsi w passe au quotient, et l'application $S''^M/\mathfrak{m}S''^M + S'^{M'} \to S''^N/\mathfrak{m}S''^N$ qu'il définit n'est bien sûr autre que u . Enfin comme l'image de w est $\mathfrak{J}'$, l'image de u est $\mathfrak{J}'/\mathfrak{m}S''^N = \mathfrak{J}$.

2. DEMONSTRATION DU THEOREME.

Nous utiliserons les jauges (normes) suivantes, sur les germes de fonctions analytiques en $\xi \in \mathbb{C}^n$ si $\rho = (\rho_1 \ldots \rho_n) \in \mathbb{R}_+^n$ est un "poly-rayon", on pose

(3.6) $$\|f\|_\rho = \Sigma |f_\alpha| \rho^\alpha \quad \text{si} \quad f(x) = \Sigma f_\alpha (x-\xi)^\alpha .$$

(Ce qui suit marcherait aussi bien avec la norme du sup :
$\|f\|_\rho^\infty = \sup_{|x_j - \xi_j| \leq \rho_j} |f(x)|$).

Si f est une fonction à valeurs vectorielles (par exemple une matrice), on note encore $\|f\|_\rho$ la série (3.6), $|f_\alpha|$ désignant la norme du vecteur f_α . De cette façon, si a est une matrice, on a

$$\|af\|_\rho \leq \|a\|_\rho \|f\|_\rho .$$

Il résulte aisément de la formule de Cauchy qu'on a, pour $\rho \leq u$

(3.7) $$\left\|\frac{d^\alpha f}{\alpha!}\right\|_{s\rho} \leq \left(\frac{C}{u-s}\right)^{|\alpha|} \|f\|_{u\rho} .$$

Nous utiliserons enfin le lemme suivant : nous notons $\mathcal{Q}_\xi$ les germes de fonctions analytiques en ξ (homogènes ou non) et $\mathcal{Q}'_\xi$ les fonctions qui ne dépendent pas de $X_{p+1}, \ldots, X_{n-1}$, de sorte que $\sigma(v)$ définit aussi une application linéaire : $\mathcal{Q}_\xi^M + \mathcal{Q}'^{M'}_\xi \to \mathcal{Q}_\xi^N$.

(3.8) LEMME. - $\sigma(v)$ <u>possède une scission</u> $\lambda : \mathcal{a}_\xi^N \to \mathcal{a}_\xi^M + \mathcal{a}'^{M'}_\xi$ <u>(i.e.</u> $\sigma(v)=\sigma(v)\lambda\sigma(v)$) <u>telle que</u>

1) λ <u>est homogène (i.e. transforme une fonction homogène en une fonction homogène du même degré</u>.

2) <u>Il existe une famille de poly-rayons tendant vers</u> 0 , <u>telle que pour tout poly-rayon de cette famille et tout nombre réel</u> s , $\frac{1}{2} \leq s \leq 1$, <u>on ait, avec une constante</u> $C_\rho > 0$ <u>convenable</u>

$$\|\lambda.f\|_{s\rho} \leq C_\rho \|f\|_{s\rho} .$$

Le lemme sera démontré au n° 3.

Il s'agit maintenant de prouver qu'on peut résoudre les équations (3.3) de sorte que la série $\Sigma\|\frac{f_k}{k!}\|_s T^k$ converge pour s et T assez petits. Nous raisonnerons avec $f^k/k!$ plutôt que f^k : (3.3) s'écrit encore

$$(3.9) \qquad a_o^o \frac{f^k}{k!} = \frac{g^k}{k!} - \sum_{\substack{p+q+|\alpha|=k \\ q<k}} \frac{p!q!\alpha!}{k!} \frac{a_\alpha^p}{p!} . (\frac{d^\alpha f^q}{\alpha!q!}) .$$

Notant y^k le second membre de (3.8), nous choisissons bien sûr la solution $\frac{f^k}{k!} = \lambda . g^k$, λ étant la scission du lemme (3.8).

Si P et g sont analytiques (au sens du § 2), on a pour A assez grand, ρ assez petit, et $s \leq 1$

$$(3.10) \qquad \begin{cases} \|\frac{a_\alpha^p}{p!}\|_{s\rho} \leq A.A^{p+|\alpha|} \\ \|\frac{g^k}{k!}\|_{s\rho} \leq A.A^k \end{cases}$$

Nous choisissons maintenant ρ une fois pour toutes, assez petit pour que les inégalités (3.10) soient vraies, et de sorte aussi que l'inégalité du lemme (3.8) soit vraie. Observons que si A est choisi assez grand ($A \geq \sup(1/\rho_j)$) , on a d'après (3.7)

$$(3.11) \qquad \|\frac{d^\alpha f^q}{q!}\|_{s\rho} \leq (\frac{A}{u-s})^{|\alpha|} \|\frac{f^q}{q!}\|_{u\rho} \quad \text{pour} \quad s \leq u \leq 1 .$$

Nous allons prouver, par récurrence sur q , qu'on a pour B grand

$$(3.12) \qquad \|\frac{f^q}{q!}\|_{s\rho} \leq B(\frac{B}{1-s})^q \quad \text{pour} \quad \frac{1}{2} \leq s \leq 1 .$$

Dans le deuxième membre de (3.9), la norme du terme indexé par p,q,α est, d'après (3.10), (3.11), majorée par

$$\|\ldots\|_{s\rho} \leq \frac{p!q!\alpha!}{k!} A.A^{p+|\alpha|}.\left(\frac{A}{u-s}\right)^{|\alpha|}\left\|\frac{f^q}{q!}\right\|_{u\rho} .$$

Or la borne inférieure pour $u \in]s,1[$ de la quantité $\left(\frac{1}{u-s}\right)^{|\alpha|}.\left(\frac{1}{1-u}\right)^q$ vaut $(q+|\alpha|)^{q+|\alpha|}/q^q|\alpha|^{|\alpha|}$. Donc si (3.12) est vrai pour $q<k$, cette norme est aussi majorée par

(3.13) $$\|\ldots\|_{s\rho} \leq M^{\alpha}_{pq}AB.A^{p+2|\alpha|}B^q\left(\frac{1}{1-s}\right)^{q+|\alpha|}$$

avec $M^{\alpha}_{pq} = \frac{p!q!\alpha!}{k!}.\frac{(q+|\alpha|)^{q+|\alpha|}}{q^q|\alpha|^{|\alpha|}}$.

Remarquons qu'on a $\frac{p!}{k!} \leq \frac{1}{k-p!}$, et $\alpha! \leq |\alpha|!$, d'où

(3.14)
$$M^{\alpha}_{pq} \leq \frac{q!|\alpha|!}{(q+|\alpha|)!}\frac{(q+|\alpha|)^{q+|\alpha|}}{q^q|\alpha|^{|\alpha|}} = \left(\frac{q+|\alpha|}{q}\right)^q.\prod_{j=1}^{|\alpha|}\left(\frac{j}{|\alpha|}.\frac{q+|\alpha|}{q+j}\right) \leq \left(\frac{q+|\alpha|}{q}\right)^q \leq e^{|\alpha|} .$$

Ajoutant les inégalités (3.13) et appliquant la scission λ, on obtient, pour $1/2 \leq s \leq 1$

$$\left\|\frac{f^k}{k!}\right\|_{s\rho} \leq C_\rho A\left(A^k + \sum_{\substack{p,q,\alpha \\ p+|\alpha|=k-q>0}} Be^{|\alpha|}A^{p+2|\alpha|}B^q\left(\frac{1}{1-s}\right)^{q+|\alpha|}\right) .$$

La récurrence pourra donc se poursuivre si on a

$$C_\rho A\left(A^k + B\sum_{\substack{0<p+|\alpha|\leq k \\ q=k-p-|\alpha|}} e^{|\alpha|}A^{p+2|\alpha|}B^q\left(\frac{1}{1-s}\right)^{q+|\alpha|}\right) \leq B\left(\frac{B}{1-s}\right)^k .$$

Soit encore, compte-tenu qu'on a $1-s \leq 1$

$$C_\rho\frac{A}{B}.\left(\frac{A}{B}\right)^k + C_\rho\sum_{0<p+|\alpha|\leq k} e^{|\alpha|}A^{|\alpha|}\left(\frac{A}{B}\right)^{p+|\alpha|} \leq 1 .$$

La récurrence pourra se poursuivre si cette inégalité est vraie pour tout $k \geq 0$. Or le premier terme $C_\rho\frac{A}{B}\left(\frac{A}{B}\right)^k$ est $\leq \frac{1}{2}$ si $B \geq 2C_\rho A$; quant à la somme, elle est majorée par la série infinie (indépendante de k)

$$C_\rho\sum_{p+|\alpha|>0}(eA)^{|\alpha|}\left(\frac{A}{B}\right)^{p+|\alpha|} ,$$

elle est convergente, sans terme constant, majorée, si $A \geq 1$, par $C_\rho\left(1-\left(1-\frac{eA^2}{B}\right)^{-n-1}\right)$, donc sa somme est aussi $\leq \frac{1}{2}$ si B est choisi assez grand. Ainsi l'inégalité (3.11) est vraie pour tout k si B est assez grand, et ceci termine la démonstration.

3. PREUVE DU LEMME 3.8.

Notre point de départ sera le résultat suivant, qui est une amélioration du théorème des voisinages privilégiés due à B. Malgrange [3] :

Notons $\mathcal{O}_k$ l'anneau des germes de fonctions analytiques à l'origine de $\mathbb{C}^k$, et soit $u : \mathcal{O}_k^p \to \mathcal{O}_k^q$ une application $\mathcal{O}_k$-linéaire. Alors

(3.15) il existe une scission λ (i.e. $u = u\lambda u$) telle qu'on ait

$$\|\lambda.f\|_{s\rho} \leq C_\rho \|f\|_{s\rho}$$

pour $\frac{1}{2} \leq s \leq 1$, pour une famille de polyrayons ρ tendant vers 0 (de façon précise : il existe une constante ε_1 et des fonctions > 0 $\varepsilon_2(\rho_1), \varepsilon_3(\rho_1,\rho_2), \ldots, \varepsilon_n(\rho_1 \ldots \rho_{n-1})$, C_ρ telles que pour $\rho_j \leq \varepsilon_j(\rho_1,\ldots,\rho_{j-1})$ et $\frac{1}{2} \leq s \leq 1$ on ait l'inégalité ci-dessus).

Nous voulons maintenant un résultat analogue pour un homomorphisme $v : \mathcal{O}_k^p + \mathcal{O}_{k'}^{p'} \to \mathcal{O}_k^q$, dont l'image est un $\mathcal{O}_k$-module ; nous faisons la construction en deux étapes.

<u>1er cas</u> : on suppose v surjectif. On pose $k'' = k - k'$, et $\mathfrak{m}'$ désigne l'idéal engendré par $x_1 \ldots x_{k'}$, de sorte que $\mathcal{O}_k/\mathfrak{m}'$ s'identifie à $\mathcal{O}_{k''}$, et v définit par passage au quotient mod. $\mathfrak{m}'$ une surjection :

$$\mathcal{O}_{k''}^p + \mathbb{C}^{p'} \to \mathcal{O}_{k''}^q .$$

Celle-ci possède un inverse à droite λ_0 qui vérifie les inégalités (3.15). λ_0 se prolonge en une application $\mathcal{O}_{k'}$-linéaire $\lambda_1 : \mathcal{O}_k^q \to \mathcal{O}_k^p + \mathcal{O}_{k'}^{p'}$:

si (g_α) est une famille de séries entières en les variables $x_{k'+1}, \ldots, x_k$, on pose $\lambda_1(\Sigma g_\alpha X^\alpha) = \Sigma \lambda_0(g_\alpha).X^\alpha$.

Si alors $\rho = (\rho'\rho'')$ est un poly-rayon, on a :

$$\|\lambda_1 f\|_\rho \leq C\|f\|_\rho \quad \text{pour toute} \quad f \in \mathcal{O}_k$$

si $$\|\lambda_0 f\|_{\rho''} \leq C\|f\|_{\rho''} \quad \text{pour toute} \quad f \in \mathcal{O}_{k''}$$

(pour abréger, si $g=(g_1,g_2) \in \mathcal{O}_k^p + \mathcal{O}_{k'}^{p'}$ (resp. $\mathcal{O}_{k''}^p + \mathbb{C}^{p'}$), on a posé $\|g\|_\rho = \|g_1\|_\rho + \|g_2\|_{\rho'}$ (resp. $\|g_1\|_{\rho''} + \|g_2\|$)).

Maintenant $\mathrm{Id} - u\lambda_1$ est $\mathcal{O}_{k'}$-linéaire, nulle pour $x' = 0$, et continu pour la norme $\| \ \|_\rho$ (dès que λ_0 est continu pour la norme $\| \ \|_{\rho''}$), donc aussi petit si ρ' est petit. $u\lambda_1$ est alors inversible, et son inverse est donné par la série géométrique

$$(u\lambda_1)^{-1} = \sum_0^\infty (\mathrm{Id} - u\lambda_1)^m$$

qui est convergente, et continue pour la norme $\| \ \|_\rho$ si λ_0 est continue pour la norme $\| \ \|_{\rho''}$, et ρ' assez petit.

Finalement u admet pour inverse à droite $\lambda_q.(a\lambda_1)^{-1}$, qui est continu pour la norme $\| \ \|_\rho$ dans les mêmes conditions.

<u>Cas général</u> : l'image de v est un $\mathcal{O}_k$-module $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_k^q$. Il existe de toute façon un début de résolution :

$$\mathcal{O}_k^m \xrightarrow{\varepsilon_1} \mathcal{O}_k^n \xrightarrow{\varepsilon_0} \mathcal{J} \longrightarrow 0 .$$

Nous noterons w un relèvement de v : $\mathcal{O}_k^p + \mathcal{O}_{k'}^{p'} \to \mathcal{O}_k^n$.

ε_0 possède une scission λ_0 comme dans (3.15).

Comme $(\varepsilon_1 + w_1)$ est une surjection : $\mathcal{O}_k^m + \mathcal{O}_k^p + \mathcal{O}_{k'}^{p'} \to \mathcal{O}_k^n$, il possède d'après le premier cas un inverse à droite :

$$\mathrm{Id} = \varepsilon_1\lambda' + w\lambda''$$

où λ', λ'' sont continues pour une famille de semi-normes comme dans (3.14).

On a $\varepsilon_0\varepsilon_1 = 0$, donc $\varepsilon_0 = \varepsilon_0 w\lambda''$.

Par suite

$$v = \varepsilon_0 w = \varepsilon_0\lambda_0\varepsilon_0 w = \varepsilon_0\lambda_0 v = \varepsilon_0 w\lambda''\lambda_0 v = v\lambda''\lambda_0 v$$

et $\lambda''\lambda_0$ est une scission de v, qui a évidemment les propriétés de continuité de (3.15).

Pour le lemme (3.8), on applique le résultat ci-dessus à $\sigma(v)$: $\mathcal{O}_\xi^M + \mathcal{O}_\xi'^{M'} \to \mathcal{O}_\xi^N$, $\mathcal{O}_\xi^M$ étant identifié à l'anneau des germes de fonctions holomorphes des variables $X_1,\dots,X_{n-1}$. Puis on prolonge la scission λ_0 obtenue comme dans le premier cas : $\lambda(\Sigma f_k.(\theta-\theta_\xi)^k) = \Sigma\lambda_0(f_k).(\theta-\theta_\xi)^k$, qui implique $\lambda(\theta^k f) = \theta^k \lambda_0(f)$. Il est alors clair que λ est homogène, et qu'elle est continue pour une famille de normes $\| \|_p$ comme dans (3.15).

4. APPLICATIONS.

Lemme de préparation.

Soit X un ouvert de $\mathbb{C}^n$, ξ un point de $T^*X\setminus 0$, et $p \in \mathcal{D}_\xi$ un opd. de degré m . Soit u l'une des variables x_j, ξ_j , et k le premier entier tel que $\dfrac{\partial^k p_m}{\partial u^k} \neq 0$. On suppose $k < \infty$.

Soit $\mathcal{D}'_\xi$ l'anneau des germes en ξ d'opd. dont le symbole total ne dépend pas de u . Alors tout opd. a s'écrit, d'une seule façon

$$a = \sum_1^k b_j \circ U^{k-j} + r_0 p \tag{3.16}$$

avec $r \in \mathcal{D}_\xi$, de degré $\leq \deg a - \deg p$, $b_j \in \mathcal{D}'_\xi$ de degré $\leq \deg a - (k-j)\deg U$

Ici U désigne n'importe quel opd. de symbole u et il est commode de choisir l'opd. de symbole total u . Ceci résulte aussitôt du théorème de division pour les fonctions holomorphes, et du théorème (3.2) et de la remarque (3.4). En fait on peut mettre les b_j , et r , indifféremment à gauche ou à droite des U^{k-j} et de p , obtenant ainsi 2^{k+1} énoncés.

Appliquant ceci à $a = u^k$, on en déduit l'analogue du lemme de préparation : il existe q elliptique tel que $q^{-1}\circ p$ soit un polynôme distingué :

$$q^{-1}\circ p = U^k - \sum_1^k b_j U^{k-j} \quad (\text{avec } b_j \in \mathcal{D}'_\xi) . \tag{3.17}$$

Structure du module $\mathcal{M}_\varphi$.

Soit X un ouvert de $\mathbb{C}^n$ (ou plus généralement une variété), $U \subset X \times (\mathbb{C}^n \setminus 0)$ un cône ouvert (les homothéties sont données par $\lambda(x,\theta) = (x,\lambda\theta)$), et φ une fonction homogène de degré 1 sur U , telle que la dérivée en x , $d_x\varphi$ ne s'annule jamais. Soit (x_0,θ_0) un point de U , et $\xi_0 = d_x\varphi(x_0,\theta_0)$. Au § 2, n° 3, nous avons muni $S_0 = S_{(x_0,\theta_0)} = \cup S_0^m$ d'une structure de $\mathcal{D}_{\xi_0}$-module, en posant

$$p.a = \mathcal{L}_p^\varphi . a \quad .$$

Soit $\mathcal{D}'_0$ l'algèbre des germes d'opd. partiels de symbole $p(x,\xi,\theta)$, au point (x_0,ξ_0,θ_0). En fait les formules du § 2, n° 3, permettent de munir S_0 d'une structure de $\mathcal{D}'_0$-module (on reprend les mêmes formules, θ jouant le rôle de paramètre). Nous noterons M^φ le $\mathcal{D}'_0$-module S_0, muni de cette structure de module.

Nous définissons un homomorphisme $u : \mathcal{D}'_0 \to M^\varphi$ par

$$u(p) = \mathcal{L}^\varphi_p(1)$$

u est évidemment surjectif (on a $u(p)=p$ si p ne dépend pas de ξ), et on a

$$u(\xi_j - \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}) = (\frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} - \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}).1 = 0 .$$

Par ailleurs u est de degré 0, et $\sigma(u)$ est la restriction : $p(x,\xi,\theta) \mapsto p(x,d_x\varphi(x,\theta),\theta)$ (donc est surjectif). Par suite $\operatorname{Ker}\sigma(u)$ est l'idéal engendré par les fonctions $\xi_j - \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}$, et par la remarque (3.4) $\operatorname{Ker} u$ est l'idéal à gauche engendré par les $\xi_j - \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}$. Ainsi u induit un isomorphisme de $\mathcal{D}'_0$-modules :

$$\mathcal{D}'_0 / \Sigma\, \mathcal{D}'_0 \cdot (\xi_j - \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}) \to M^\varphi_0 .$$

Nous coupons maintenant θ en deux groupes : $\theta = (\theta',\theta'')$ avec $\theta' = (\theta'_1 \dots \theta'_p)$, $\theta'' = (\theta''_1 \dots \theta''_q)$. Soit $\mathcal{I}_\varphi$ l'idéal engendré par les $\frac{\partial\varphi}{\partial\theta''_j}$, et soit $C_\varphi = V(\mathcal{I}_\varphi)$ la variété des zéros de $\mathcal{I}_\varphi$ (muni du faisceau structural $\mathcal{O}/\mathcal{I}_\varphi$).

Notons $N_\varphi = \Sigma(\frac{\partial\varphi}{\partial\theta''_j} + \frac{\partial}{\partial\theta''_j}).M_\varphi$. N_φ est un sous-$\mathcal{D}_0$-module de M_φ (en effet $\frac{\partial\varphi}{\partial\theta''_j} + \frac{\partial}{\partial\theta''_j} = e^{-u}\frac{\partial}{\partial\theta''_j}e^\varphi$ commute aux opérateurs différentiels $e^{-\varphi}p(x,d)e^\varphi$, donc aussi à tout opérateur $\mathcal{L}^\varphi_p$ si p ne dépend pas de θ).

Nous noterons ψ l'application $(x,\theta) \mapsto (x,d_x\varphi)$ de V dans $T^*X\setminus 0$, et π la projection $(x,\xi) \to (x_{i_1}\dots x_{i_r},\xi_{j_1}\dots\xi_{j_r})$, de T^*X dans $\mathbb{C}^r \times \mathbb{C}^s$. Nous supposons la deuxième composante de $\pi(x_0,\xi_0)$ non nulle. Nous noterons enfin $\mathcal{D}''_0$ l'anneau des germes au point $\pi(x_0,\xi_0)$ des opd. partiels, de symbole $p(x_{i_1}\dots x_{i_r},\xi_{j_1}\dots\xi_{j_s})$.

(3.18) PROPOSITION. - Avec les hypothèses et les notations ci-dessus, on suppose que la restriction de $\pi\circ\psi$ à C_φ est finie en (x_0,θ_0). Alors M^φ/N^φ est un $\mathcal{B}''_0$-module fini.

Démonstration : Posons $\delta_j = \frac{\partial\varphi}{\partial\theta''_j} + \frac{\partial}{\partial\theta''_j}$, et soit $\delta : (S_0)^q \to S_0$ défini par $\delta(b) = \Sigma\delta_j b_j$. δ est de degré 0, et on a $\sigma(b).\beta = \Sigma\frac{\partial\varphi}{\partial\theta''_j}\beta_j$. Dire que la restriction à C_φ de $\pi\circ\psi$ est finie revient à dire qu'il existe des fonctions $\alpha_j \in \sigma(M^\varphi)$ $(1\le j\le N)$ telles que $\sigma(M^\varphi) = \sum_1^N \mathcal{O}''_0.\alpha_j + \Sigma\frac{\partial\varphi}{\partial\mathcal{O}''_j}.\sigma(M^\varphi)$ (où $\mathcal{O}''_0 = \sigma(\mathcal{B}''_0)$). Soit alors u l'application $(\mathcal{B}''_0)^N + (S_0)^q \to S_0$ définie par $u(p_1,\dots,p_N,b_1,\dots,b_q) = \Sigma L^\varphi_{p_j}.a_j + \Sigma\delta_j b_j$, où a_j est choisi de degré 0, de sorte que $\sigma(a_j) = \alpha_j$. $\sigma(u)$ est surjectif, donc u est surjectif, et notre assertion en résulte aussitôt (les classes des a_j engendrent M^φ/N^φ sur $\mathcal{B}''_0$), d'après la remarque (3.5)

(3.19) LEMME. - Nous gardons les hypothèses et les notations ci-dessus. Supposons que la variété critique C_φ est de codimension q (le nombre d'équations $\frac{\partial\varphi}{\partial\theta''_j} = 0$) en (x_0,θ_0). Alors on a $\sigma(N^\varphi) = \sum_1^q \frac{\partial\varphi}{\partial\theta''_j}\cdot\sigma(M^\varphi)$.

Nous noterons $\varepsilon_j = \frac{\partial\varphi}{\partial\theta''_j} + \frac{\partial}{\partial\theta''_j}$, donc $\sigma(\varepsilon_j) = \frac{\partial\varphi}{\partial\theta''_j}$, et $\varepsilon : S^q \to S$ défini par $\varepsilon(b) = \Sigma\varepsilon_j b_j$. D'autre part pour $i<j$, nous noterons R_{ij} l'opérateur vectoriel dont les composantes sont

$$R^k_{ij} = \delta_{in}\varepsilon_j - \delta_{jk}\varepsilon_i$$

(où δ_{ik} est le symbole de Kronecker) de sorte qu'on a $\varepsilon\circ R_{ij} = 0$.

Par définition, on a $N^\varphi = \mathrm{Im}\,\varepsilon$. Soit alors $a = \varepsilon b$ de degré 0 ; nous allons montrer qu'on peut toujours choisir b de degré 0, donc $\sigma(a) = \sigma(\varepsilon).\sigma(b) = \Sigma\frac{\partial\varphi}{\partial\theta''_j}\sigma(b_j) \in \Sigma\frac{\partial\varphi}{\partial\theta''_j}\sigma(M_\varphi)$.

Pour cela nous prouverons que si b est de degré $m>0$, on a aussi $a = \varepsilon(b')$ avec b' de degré $\le m-1$. En effet si $a = \sigma(b)$ où b est de degré $m>0$, on a $\sigma_m(\varepsilon b) = \sigma(\varepsilon).\sigma_m(b) = 0$. Or comme C_φ est intersection complète, les seules relations entre les $\frac{\partial\varphi}{\partial\theta''_j}$ sont les relations triviales $\rho_{ij} = \sigma R_{ij}$. $\sigma_m(b)$ est donc de la forme

$$\sigma_m(b) = \Sigma\, \rho_{ij}\sigma(C_{ij})$$

où les C_{ij} sont de degré m. Posons alors $b' = b - \Sigma R_{ij}C_{ij}$: on a $\sigma_m(b') = 0$, donc b' est de degré $\leq m-1$, et $\varepsilon(b') = \varepsilon(b) = a$ puisque $\varepsilon \circ R_{ij} = 0$.

(3.20) COROLLAIRE. - <u>Toujours avec les notations ci-dessus, supposons que</u> $C_{\mathbb{C}}$ <u>est de codimension</u> q, <u>et que l'application</u> $\pi \circ \psi$ <u>induit un isomorphisme de</u> $C_{\mathbb{C}}$ <u>sur</u> $\mathbb{C}^{r+s}$ <u>(au voisinage de</u> (x_0, θ_0)). <u>Alors</u> M^{φ}/N^{φ} <u>est un</u> $\mathcal{D}_0''$<u>-module libre de rang</u> 1.

En effet avec les hypothèses ci-dessus, $\sigma(N^{\varphi})$ est exactement l'idéal engendré par les $\frac{\partial\varphi}{\partial\theta_j''}$, donc $\sigma(M^{\varphi}/N^{\varphi}) = \sigma(M^{\varphi})/\sigma(N^{\varphi})$ s'identifie à l'anneau des fonctions homogènes de degré 0, en (x_0, θ_0), sur $C_{\mathbb{C}}$; si $\pi \circ \psi$ est un isomorphisme, ce dernier est un module libre de rang 1 sur $\sigma(\mathcal{D}_0'')$, et le corollaire résulte de la remarque (3.4).

L'exemple suivant est inspiré par le travail de F. Pham [5], et est un cas particulier de ce qui précède.

Soit $\varphi = \varphi(x,y)$ une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^{m+n}$, et $\Phi(x,y,z) = \tau\varphi(x,y)$ sur le cône $\mathbb{C}^{m+n} \times \mathbb{C}^*$ (τ est de degré 1, x et y de degré 0).

Nous noterons M^{Φ} l'ensemble des germes au point $x = y = 0$ de symboles analytiques sur $\mathbb{C}^{m+n} \times \mathbb{C}^*$, et N^{Φ} le sous-espace :

$$N^{\Phi} = \Sigma\left(\tau\frac{\partial\varphi}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j}\right)M^{\Phi}$$

(intuitivement, si $a \in M^{\Phi}$, sa classe mod. N^{Φ} représente l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^n} e^{\Phi} a\, dx$).

Comme au §2, M^{Φ} est un module sur l'anneau $\mathcal{D}_0$ des germes d'opd. de symbole total $p(x,y,\xi,\eta,\tau)$ au point $x = y = 0$, $\xi = \tau d_x\varphi$, $\eta = \tau d_y\varphi$. Nous noterons $\mathcal{D}_0'$ le sous-anneau commutatif des opd. dont le symbole total ne dépend que de y, τ.

(3.29) PROPOSITION. - <u>Supposons que la variété critique</u> $(\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}=0)_{j=1,\dots,m}$ <u>est de codimension</u> m <u>au point</u> $x=y=a$ <u>dans</u> $\mathbb{C}^{m+n}$. <u>Alors</u> M^Φ/N^Φ <u>est un</u> $\mathcal{D}'_0$<u>-module fini</u>.

En effet ici le cône critique C_Φ est défini par les équations $\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}=0$ $(j=1,\dots,m)$, et $\pi\circ\psi$ est l'application $(x,y,\tau)\to(y,\tau)$; si la variété critique est de dimension m , l'application $(x,y,\tau)\to(d_x\varphi,y,\tau)$ est finie, donc la restriction de $\pi\circ\psi$ à C_Φ est finie.

Supposons maintenant qu'on a $n=0$ (pas de variable y).

L'hypothèse signifie alors que l'origine est un point critique isolé de la fonction φ . Le cône critique C_Φ est de codimension m , de sorte que le lemme 3.19 s'applique. Enfin dans ce cas, on a $\sigma(\mathcal{D}'_0)=\mathbb{C}$ (il n'y a plus de variables), donc $\sigma(M^\varphi/N^\varphi)$ est nécessairement libre (de rang fini) - et comme dans la proposition 2.1, M^Φ/N^Φ est un $\mathcal{D}'_0$-module libre.

Le rang de M^Φ/N^Φ (sur $\mathcal{D}'_0$) est la dimension de $\sigma(M^\Phi/N^\Phi)$ sur $\mathbb{C}$, c'est-à-dire la codimension de l'idéal engendré par les fonction $\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}$ dans l'anneau des germes de fonctions homogènes de degré 0 des variables x,τ , qui n'est autre que l'anneau des germes de fonctions des variables x seules. Autrement dit le rang de M^Φ/N^Φ est le nombre de Milnor de φ .

§4 - PROPRIETES DU FAISCEAU DES OPD.

Dans ce paragraphe, $\mathcal{P}$ désigne le faisceau des opd. partiels un cône ouvert $U \subset \mathbb{C}^{n+n'} \times (\mathbb{C}^{n+n''} \setminus 0)$ de symbole total

$$p(x,y,\xi,\zeta) \qquad (x \in \mathbb{C}^n \ , \ y \in \mathbb{C}^{n'} \ , \ \xi \in \mathbb{C}^n \ , \ \zeta \in \mathbb{C}^{n''})$$

avec la loi de composition

$$p \circ q = \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} d_\xi^\alpha p . d_x^\alpha q \ .$$

$\mathcal{P}$ est un faisceau d'algèbres associatives filtrées sur les ouverts coniques de U .

Nous notons $F^k\mathcal{P}$ le faisceau des opd. de degré $\leq k$. Si ξ est un point de U , nous notons $\mathcal{P}_\xi$, $F^k\mathcal{P}_\xi$ l'ensemble des germes en ξ .

Comme au §2 , on note $\mathcal{O}(m)$ le faisceau des fonctions homogènes de degré m sur U , et plus particulièrement $\mathcal{O} = \mathcal{O}(0)$. Ainsi $\mathrm{gr}\,\mathcal{P}$ s'identifie à l'algèbre multiplicative $\oplus\mathcal{O}(m)$; et si $p \in \mathcal{P}$ est de degré $\leq m$, on note $\sigma(p)$ ou $\sigma_m(p) \in \mathcal{O}(m)$ sa classe mod. $F^{m-1}\mathcal{P}$.

Tous les modules considérés dans ce paragraphe sont à gauche.

1. FILTRATIONS.

Soit $\mathcal{M}$ un faisceau de $\mathcal{P}$-modules (dans la suite le mot "faisceau" sera omis). Une $\mathcal{P}$-filtration de $\mathcal{M}$ est une filtration croissante par des sous-faisceaux $F^k\mathcal{M}$ $(k \in \mathbb{Z})$, telle que

$$F^k\mathcal{P}.F^j\mathcal{M} \subset F^{k+j}\mathcal{M}$$

(ceci implique $F^k\mathcal{P}.F^j\mathcal{M} = F^{k+j}\mathcal{M}$ car $F^k\mathcal{P}$ contient localement des éléments elliptiques, i.e. inversibles, dont l'inverse est de degré $-k$). Par exemple, sur le module libre $\mathcal{L} = \mathcal{P}^M$, la filtration canonique $F^k\mathcal{L} = (F^k\mathcal{P})^M$ est une $\mathcal{P}$-filtration.

Si $\mathcal{M}$ est muni d'une $\mathcal{P}$-filtration, le gradué associé $\mathrm{Gr}\,\mathcal{M}$ est un $\oplus\,\mathcal{O}(n)$-module. Nous poserons

(4.1) $$\sigma(M) = F^{0}\mathcal{M}/F^{-1}\mathcal{M}$$

de sorte que $\sigma(\mathcal{M})$ est un $\mathcal{O}$-module, et $\mathrm{gr}\,\mathcal{M}$ s'identifie à $\oplus\,\mathcal{O}(n)\otimes\sigma(\mathcal{M})$. Si $a \in F^{0}\mathcal{M}$, on note $\sigma(a)$ sa classe mod. $F^{-1}\mathcal{M}$. Ainsi si $p \in F^{0}\mathcal{E}$, on a $\sigma(pa) = \sigma(p)\,\sigma(a)$.

Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux $\mathcal{E}$-modules munis de $\mathcal{E}$-filtrations (sur un ouvert conique $U \subset T^*X\backslash 0)$, et soit U un homomorphisme $\mathcal{M} \to \mathcal{N}$. On dit que u est de degré $\leq k$ si on a $u(F^{j}\mathcal{M}) \subset F^{j+k}(\mathcal{N})$ (si ceci est vrai pour un entier j, ce l'est pour tous). Par exemple, si $\mathcal{M} = \mathcal{E}^{M}$, muni de sa filtration canonique, il revient au même de se donner un homomorphisme de degré $\leq k : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$, ou de se donner N sections $f_1 \ldots f_N$ de $F^{k}\mathcal{N}$ (les images de la base canonique de $\mathcal{M}$).

Si $u : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ est de degré ≤ 0, on note

(4.2) $$\sigma(u) : \sigma(\mathcal{M}) \to \sigma(\mathcal{N})$$

l'homomorphisme déduit de u par passage au quotient. Ainsi, si $a \in F^{0}\mathcal{M}$, on a $\sigma(ua) = \sigma(u).\sigma(a)$.

(4.3) Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{E}$-module muni d'une $\mathcal{E}$-filtration, et soit $i : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ un homomorphisme injectif. La filtration induite est définie par $F^{k}\mathcal{N} = i^{-1}(F^{k}\mathcal{M})$. C'est une $\mathcal{E}$-filtration, et si on munit $\mathcal{N}$ de cette filtration, $\sigma(i)$ est un isomorphisme de $\sigma(\mathcal{N})$ sur le sous-module image de $i\mathcal{N} \cap F^{0}\mathcal{M}$ dans $\sigma(\mathcal{M})$.

(4.4) De même si $j : \mathcal{M} \to \mathcal{P}$ est un homomorphisme surjectif de $\mathcal{E}$-modules, la filtration image (ou quotient) est définie par $F^{k}\mathcal{P} = j(F^{k}\mathcal{M})$. C'est une $\mathcal{E}$-filtration, pour laquelle $\sigma(j)$ est une surjection : $\sigma(\mathcal{M}) \to \sigma(\mathcal{P})$, de noyau

$$\mathrm{Ker}\ \sigma(j) = \sigma(\mathrm{Ker}\ j)$$

(en effet, pour tout $\xi \in U$, si $a \in F^{0}\mathcal{M}_{\xi}$ et $ja = 0$, on a $\sigma(j)\sigma(a) = 0$, d'où $\sigma(\mathrm{Ker}\ j)_{\xi} \subset (\mathrm{Ker}\ \sigma(j))_{\xi}$. Inversement, si $\alpha = \sigma(a) \in (\mathrm{Ker}\ \sigma(j))_{\xi}$, ja est en fait de degré ≤ -1 et, par définition de la filtration quotient, il existe $b \in F^{-1}\mathcal{M}_\xi$ tel que $ja = jb$; on a donc $j(a-b) = 0$, et $\alpha = \sigma(a) = \sigma(a-b)$, d'où $(\mathrm{Ker}\ \sigma(j))_\xi \subset \sigma(\mathrm{Ker}\ j)_\xi)$.

On peut regrouper (4.3) et (4.4) dans l'énoncé suivant :

(4.5) Soit $0 \longrightarrow \mathcal{N} \xrightarrow{i} \mathcal{M} \xrightarrow{j} \mathcal{P} \longrightarrow 0$ une suite exacte de $\mathcal{D}$-modules. On suppose $\mathcal{M}$ muni d'une $\mathcal{D}$-filtration, $\mathcal{N}$ de la filtration induite, et $\mathcal{P}$ de la filtration quotient. Alors la suite

$$0 \longrightarrow \sigma(\mathcal{N}) \xrightarrow{\sigma(i)} \sigma(\mathcal{M}) \xrightarrow{\sigma(j)} \sigma(\mathcal{P}) \longrightarrow 0$$

est exacte.

(4.6) Avec les notations de (4.4), soit de plus $\mathcal{P}' \subset \mathcal{P}$ un sous-module, et $\mathcal{M}' = j^{-1}(\mathcal{P}') \subset \mathcal{M}$, munis tous deux des filtrations induites. Alors la filtration de $\mathcal{P}'$ est image par j de celle de $\mathcal{M}'$, et on a $\sigma(\mathcal{M}') = \sigma(j)^{-1}\sigma(\mathcal{P}')$.

(si $a \in F^k\mathcal{P}'_\xi$, il existe $b \in F^k\mathcal{M}_\xi$ tel que $a = jb$; on a alors $b \in \mathcal{M}'_\xi$ par définition de l'image inverse, donc aussi $b \in F^k\mathcal{M}'_\xi$ par définition de la filtration induite, d'où la première assertion. Pour la deuxième, notons $u : \mathcal{P} \to \mathcal{P}/P'$ la surjection canonique ; alors $\mathcal{P}' = \mathrm{Ker}\ u$, et $\sigma(\mathcal{P}') = \mathrm{Ker}\ \sigma(u)$ d'après (4.4) ; de même $u' = \mathrm{Ker}\ (uj)$, et $\sigma(\mathcal{M}') = \mathrm{Ker}\ \sigma(u_j) = \mathrm{Ker}\,\sigma(u)\,\sigma(j) = \sigma(j)^{-1}\mathrm{Ker}\ \sigma(u) = \sigma(j)^{-1}\sigma(\mathcal{P}'))$.

(4.7) De façon générale, si $u : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ est un homomorphisme de $\mathcal{D}$-modules, de degré ≤ 0 , on a

$$\sigma(\mathrm{Ker}\ u) \subset \mathrm{Ker}\ \sigma(u)$$
$$\mathrm{Im}\ \sigma(u) \subset \sigma(\mathrm{Im}\ u)$$

Ker u et Im u étant munis des filtrations induites (en effet si $a \in F^o\mathcal{M}_\xi$ et $ua = 0$, on a $\sigma(u)\,\sigma(a) = 0$ donc $\sigma(a) \in \mathrm{Ker}\ \sigma(u)_\xi$; de même si $\beta \in \mathrm{Im}\ \sigma(u)_\xi$, il existe $a \in F^o\mathcal{M}_\xi$ tel que $\beta = \sigma(u).\sigma(a)$, donc $\beta = \sigma(ua) \in \sigma(\mathrm{Im}\ u))$. Ces inclusions peuvent être strictes (par exemple si u est en fait de degré < 0 , donc $\sigma(u) = 0$, sans être nul).

Nous emploierons au besoin les notations et les résultats analogues pour l'anneau des germes $\mathcal{D}_\xi$, ou pour le faisceau des opd. formels $\hat{\mathcal{D}}$.

Si $\mathcal{M}$ est engendré par des sections $f_1 \ldots f_M$, on définit une filtration

$$F^k\mathcal{M} = \sum F^k\mathcal{D}.f_j \ .$$

Cette filtration dépend du choix des générateurs f_j , mais la topologie associée, elle, n'en dépend pas : en effet si $g_1 \ldots g_N$ sont d'autres générateurs, pour tout $\xi \in U$ il y a un nombre k_o tel que $g_i \in F^{k_o}\mathcal{M}$ $(i=1,\ldots,N)$ et $f_j \in \sum F^{k_o}\mathcal{D}.g_i$ $(j=1,\ldots,M)$ au voisinage de $\mathcal{D}$, donc pour tout k

$$F^{k-k_o}\mathcal{M} \subset \sum_i F^k\mathcal{D}.g_i \subset F^{k+k_o}\mathcal{M}$$

au voisinage de ξ .

On pourra donc parler, sans ambiguité, de la topologie de $\mathcal{M}$ lorsque $\mathcal{M}$ est localement de type fini.

(4.8) DEFINITION. - <u>Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}$-module, on dit qu'une filtration $F^k\mathcal{M}$ est bonne si c'est une $\mathcal{D}$-filtration et si</u>

(i) $\mathcal{M}$ <u>est localement de type fini, et la topologie associée à la filtration $F^k\mathcal{M}$ est la topologie de $\mathcal{M}$</u> .

(ii) $\sigma(\mathcal{M})$ <u>est un $\mathcal{O}$-module cohérent</u>.

(Il y a une définition analogue pour les $\hat{\mathcal{D}}$-modules ; pour les $\mathcal{D}_\xi$-modules, il faut remplacer (ii) par : $\sigma(\mathcal{M})$ est un $\mathcal{O}_\xi$-module fini ; mais on verra que c'est une conséquence de (i)).

(4.9) <u>Remarque</u> : Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}$-module, muni d'une bonne filtration. Alors pour tout $\xi \in U$, on peut choisir des sections $f_1 \ldots f_M$ de $F^o\mathcal{M}$ dans un voisinage V de ξ de sorte que les f_j engendrent $\mathcal{M}$ dans V , et les $\sigma(f_j)$ engendrent $\sigma(M)$ dans V . La filtration de M est alors (dans V) quotient de la filtration canonique de $\mathcal{D}^M$ par l'application $\mathcal{D}^M \to \mathcal{M}$ définie par les f^j . En effet, on a de toute façon $F^k\mathcal{M} \subset \sum F^k\mathcal{D}.f_j$ puisque les f_j sont de degré ≤ 0 . Par ailleurs, puisque les $\sigma(f_j)$ engendrent $\sigma(\mathcal{M})$, on a

$$F^{o}\mathcal{M} = \sum F^{o}\mathcal{E}.f_j + F^{-1}\mathcal{M}$$

d'où, par récurrence,

$$F^{o}\mathcal{M} = \sum F^{o}\mathcal{E}.f_j + F^{-k}\mathcal{M}$$

pour tout entier k. Mais comme la topologie définie par les $F^k\mathcal{M}$ est la topologie de $\mathcal{M}$, on a $F^{-k}\mathcal{M} \subset \sum F^{o}\mathcal{E}.f_j$ (dans V) si k est assez grand (et V assez petit), d'où $F^{o}\mathcal{M} = \sum F^{o}\mathcal{E} f_j$, qui implique $F^k\mathcal{M} = \sum F^k\mathcal{E}.f_j$ pour tout k.

Remarquons aussi que si $\mathcal{M}$ est muni d'une bonne filtration, $\sigma(\mathcal{M}) = 0$ implique $\mathcal{M} = 0$. En effet, soit ξ un point de U ; il existe alors des générateurs f_j de degré 0 tels que $F^k\mathcal{M}_\xi = \sum F^k\mathcal{E}_\xi .f_j$. Si $\sigma(\mathcal{M}) = 0$, on a $f_j \in F^{-1}\mathcal{M}_\xi$ donc $f_j = \sum a_{jk} f_k$ avec des $a_{jk} \in F^{-1}\mathcal{E}_\xi$; et ceci implique $f_j = 0$ car la matrice $\mathrm{Id} - (a_{jk})$ est inversible (son symbole est la matrice identité).

2. <u>CALCUL SYMBOLIQUE</u>.

Dans ce numéro, nous exploitons le théorème de finitude du §3 .

(4.10) PROPOSITION. - <u>Soit</u> $\mathcal{J} \subset \mathcal{E}^N$ <u>un sous-module, et</u> $u : \mathcal{E}^M \to \mathcal{J}$ <u>un homomorphisme de degré</u> ≤ 0, <u>tel que</u> $\sigma(u)$ <u>soit une surjection</u> : $\mathcal{O}^M \to \sigma(\mathcal{J})$ ($\mathcal{J}$ <u>est muni de la filtration induite</u>). <u>Alors</u> u <u>est surjectif</u> : $\mathcal{E}^M \to \mathcal{J}$, <u>et sur</u> $\mathcal{J}$ <u>la filtration induite coïncide avec la filtration quotient</u>.

Il s'agit de montrer qu'on a $u(F^k\mathcal{E}^N_\xi) = F^k\mathcal{J}_\xi$ pour tout ξ, sachant qu'on a $\sigma(u).\mathcal{O}^N_\xi = \sigma(\mathcal{J})_\xi$, et ceci résulte aussitôt du théorème 3.2. Observons que la filtration de $\mathcal{J}$ est bonne puisque $\sigma(\mathcal{J})$ est cohérent (c'est l'image de $\sigma(u) : \mathcal{O}^M \to \mathcal{O}^N$) .

Soit maintenant $\mathcal{M}$ un $\mathcal{E}$-module, muni d'une bonne filtration. On a vu (remarque (4.9)) que pour tout $\xi \in U$, il existe un voisinage V de ξ et des sections $f_1 \ldots f_M$ de degré ≤ 0 de M dans V, définissant une surjection $\varepsilon_o : L^o = \mathcal{D}^M \to \mathcal{M}$ telle que la filtration de $\mathcal{M}$ soit image par ε_o de celle de L^o .

On a alors $\sigma(\mathrm{Ker}\ \varepsilon_o) = \mathrm{Ker}\ \sigma(\varepsilon_o)$ d'après (4.3) ; comme $\mathrm{Ker}\ \sigma(\varepsilon_o)$ est cohérent, on peut -quitte au besoin à diminuer V de nouveau- trouver des sections $g_1 \dots g_N \in F^o(\mathrm{Ker}\ \varepsilon_o)$, telles que les $\sigma(g_j)$ engendrent $\mathrm{Ker}\ \sigma(\varepsilon_o) = \sigma\ \mathrm{Ker}\ \varepsilon_o$. D'après (4.10), l'homomorphisme $\varepsilon_1 : L^1 = \mathcal{D}^N \to \mathrm{Ker}\ \varepsilon_o$ est surjectif, et la filtration de $\mathrm{Ker}\ \varepsilon_o$ est image par ε_1 de celle de L^1. Ainsi de proche en proche, on construit une résolution de $\mathcal{M}$:

(4.11) $$\dots L^j \xrightarrow{\varepsilon_j} L^{j-1} \longrightarrow \dots\ L^1 \xrightarrow{\varepsilon_1} L^o \xrightarrow{\varepsilon_o} \mathcal{M} \longrightarrow 0$$

par des modules libres, de sorte que la suite

$$\sigma(L^j) \xrightarrow{\sigma(\varepsilon_j)} \sigma(L^{j-1}) \longrightarrow \dots\ \sigma(L^1) \xrightarrow{\sigma(\varepsilon_1)} \sigma(L^o) \xrightarrow{\sigma(\varepsilon_o)} \sigma(\mathcal{M}) \longrightarrow 0$$

soit une résolution de $\sigma(\mathcal{M})$. (En fait, la construction s'arrête car le théorème des syzygies montre que pour j assez grand on peut choisir $\sigma(\varepsilon_j)$ injectif, donc aussi ε_j injectif, et $L^{j+1} = 0$). Une telle résolution sera appelée <u>bonne résolution</u> de $\mathcal{M}$.

(4.12) COROLLAIRE. - <u>Soient</u> $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ <u>deux</u> $\mathcal{D}$-<u>modules munis de bonnes filtrations</u>, $u : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ <u>un homomorphisme de degré</u> ≤ 0 , <u>et</u> $\mathcal{J} \subset \mathcal{N}$ <u>un sous-module contenant</u> $u(\mathcal{M})$. <u>Si</u> $\sigma(u)$ <u>est surjectif</u> : $\sigma(\mathcal{M}) \to \sigma(\mathcal{J})$, <u>alors</u> u <u>est surjectif</u> : $\mathcal{M} \to \mathcal{J}$, <u>et on a</u> $u(F^k\mathcal{M}) = F^k\mathcal{J}$ <u>pour tout</u> k . (En particulier la filtration de $\mathcal{J}$ est bonne).

Il s'agit de prouver qu'on a $u(F^k\mathcal{M}_\xi) = F^k\mathcal{J}_\xi$ en tout point ξ . D'après (4.11), il existe un voisinage conique V de ξ , et des débuts de bonnes résolutions par des modules libres, dans V :

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{L} \arrow[r, "a"] \arrow[d, dashed, "v"] & \mathcal{M} \arrow[d, "u"] \\ \mathcal{L}^1 \arrow[r, "b"] & \mathcal{L}^o \arrow[r, "c"] & \mathcal{N} \end{tikzcd}$$.

Quitte à diminuer encore V , on peut aussi choisir un homomorphisme $v : \mathcal{L} \to \mathcal{L}^o$, de degré 0 , tel que $c \circ v = u \circ a$ (relèvement de u).

Soit $\mathcal{J}' = c^{-1}(\mathcal{J})$. On a donc, d'après (4.6) $\sigma(\mathcal{J}') = \sigma(c)^{-1}\sigma(\mathcal{J})$, de sorte que $\sigma(b) + \sigma(v)$ est une surjection : $\sigma(\mathcal{L}^1) + \sigma(\mathcal{L}) \to \sigma(\mathcal{J}')$. On a donc $bF^k\mathcal{L}^1 + vF^k\mathcal{L} = F^k\mathcal{J}'$ d'après (4.10), et comme $F^k\mathcal{M} = aF^k\mathcal{L}$, $F^k\mathcal{N} = cF^k\mathcal{L}^o$, (4.12) en résulte aussitôt.

(4.13) Remarque : Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}$-module muni d'une bonne filtration, et soit $\mathcal{J} \subset \mathcal{M}$ un sous-module muni de la filtration induite. Alors si $\sigma(\mathcal{J})$ est localement de type fini, la filtration de $\mathcal{J}$ est bonne.

En effet, il existe au voisinage de tout $\xi \in U$ un homomorphisme $u : \mathcal{D}^N \to \mathcal{J} \subset \mathcal{M}$, de degré 0 , tel que $\operatorname{Im} \sigma(u) = \sigma(\mathcal{J})$, et notre assertion résulte donc de (4.12).

(4.14) COROLLAIRE. - Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}$-module muni d'une bonne filtration. Alors $\mathcal{M}$ est séparé $(\cap F^k\mathcal{M} = 0)$

En effet, soit $\mathcal{J} = \cap F^k\mathcal{M}$. Il est clair que $\mathcal{J}$ est un $\mathcal{D}$-module, et qu'on a $\sigma(\mathcal{J}) = 0$. Comme $\mathcal{J}$ est un sous-module de $\mathcal{M}$, et comme $\sigma(\mathcal{J}) = 0$ est cohérent, la filtration de $\mathcal{J}$ est bonne et on a donc $\mathcal{J} = 0$.

(4.15) COROLLAIRE. - Soit $\mathcal{E} \xrightarrow{u} \mathcal{F} \xrightarrow{v} \mathcal{G}$ trois $\mathcal{D}$-modules munis de bonnes filtrations, et deux homomorphismes de degré ≤ 0 . Si la suite $\sigma(u)$, $\sigma(v)$ est exacte en $\sigma(\mathcal{F})$, alors la suite u , v est exacte en $\mathcal{F}$.

En effet, on a d'après (4.7) $\operatorname{Im} \sigma(v) \subset \sigma(\operatorname{Im} u) \subset \sigma(\operatorname{Ker} v) \subset \operatorname{Ker} \sigma(v)$. Si la suite $\sigma(u)\sigma(v)$ est exacte, les quatre sont égaux et il résulte de (4.12) que u est une surjection : $\mathcal{E} \to \operatorname{Ker} v$.

Par exemple, soient $\mathcal{L}^j$ des modules libres, et

$$d : \dots \mathcal{L}^j \longrightarrow \mathcal{L}^{j-1} \longrightarrow \dots \mathcal{L}^1 \longrightarrow \mathcal{L}^o \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow 0$$

un complexe de $\mathcal{D}$-homomorphismes de degré ≤ 0 , aboutissant à un $\mathcal{D}$-module $\mathcal{M}$ muni d'une bonne filtration. Alors pour que d soit une bonne résolution de $\mathcal{M}$, il faut et il suffit que $\sigma(d)$ soit exact.

(4.16) COROLLAIRE. - Soit $0 \to \mathcal{E} \xrightarrow{u} \mathcal{F} \xrightarrow{v} \mathcal{G} \to 0$ une suite exacte de $\mathcal{D}$-modules. On suppose $\mathcal{F}$ muni d'une $\mathcal{D}$-filtration, $\mathcal{E}$ de la filtration induite et $\mathcal{G}$ de la filtration quotient. Si deux de ces filtrations sont bonnes, la troisième l'est aussi.

En effet, la suite $0 \to \sigma(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sigma(u)} \sigma(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sigma(v)} \sigma(\mathcal{G}) \to 0$ est exacte d'après (4.5) ; donc $\sigma(\mathcal{E})$, $\sigma(\mathcal{F})$ et $\sigma(\mathcal{G})$ sont tous trois des $\mathcal{O}$-modules cohérents (puisque deux d'entre eux le sont). Si la filtration de $\mathcal{F}$ est bonne, celle de $\mathcal{E}$ est bonne d'après (4.13) ; celle de $\mathcal{G}$ est aussi bonne (car $\sigma(\mathcal{G})$ est cohérent, et sa filtration est quotient de celle de $\mathcal{F}$ donc satisfait à la condition (i) de (4.8), comme celle de $\mathcal{F}$). Inversement, si les filtrations de $\mathcal{E}$ et de $\mathcal{G}$ sont bonnes, pour tout $\xi \in U$ il existe d'après (4.9) des sections $e_1 \dots e_M \in F^o\mathcal{E}_\xi$ et $f_1 \dots f_N \in F^o\mathcal{F}_\xi$ telles qu'on ait

$$\sum F^k\mathcal{D}.e_j = F^k\mathcal{E} \quad , \quad \sum F^k\mathcal{D}.vf_j = F^k\mathcal{G}$$

au voisinage de ξ. On a alors aussi

$$\sum F^k\mathcal{D}.e_j + \sum F^k\mathcal{D}.f_j = F^k\mathcal{F}$$

au voisinage de ξ (puisque la filtration de $\mathcal{G}$ est la filtration quotient, et celle de $\mathcal{E}$ la filtration induite) ; et comme $\sigma(\mathcal{F})$ est cohérent, la filtration de $\mathcal{F}$ est bonne.

3. COHERENCE.

(4.17) PROPOSITION. - L'anneau $\mathcal{D}_\xi$ est noethérien.

En effet, soit $\mathcal{J}$ un idéal ; alors $\sigma(\mathcal{J})$ est un idéal de $\mathcal{O}_\xi$, donc de type fini puisque $\mathcal{O}_\xi$ est noethérien. Il existe alors un homomorphisme de degré 0, $u : \mathcal{D}_\xi^N \to \mathcal{J}$ tel que $\sigma(u)$ soit surjectif. Alors u est surjectif, donc $\mathcal{J}$ est de type fini.

Nous noterons $\mathcal{G}_k$ le quotient $F^o\mathcal{D}/F^{-k-1}\mathcal{D}$. Ainsi, si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}$-module filtré, $\mathcal{F}^j\mathcal{M}/F^{j-q}\mathcal{M}$ est un $\mathcal{G}_k$-module si $q \le k+1$. $\mathcal{G}_o$ s'identifie à $\mathcal{O}$.

(4.18) PROPOSITION. - <u>Le faisceau</u> $\mathcal{A}_k$ <u>est cohérent</u>.

L'assertion est vraie pour $k = 0$; nous la démontrons par récurrence sur k. Soit donc $u : \mathcal{A}_k^p \to \mathcal{A}_k^q$ un homomorphisme ; il s'agit de prouver que $\mathrm{Ker}\ u$ est (localement) de type fini.

Remarquons que $F^k\mathcal{A}_k$ est un idéal (isomorphe à $\mathcal{O}(-k)$), et $\mathcal{A}_{k-1}$ s'identifie au quotient $\mathcal{A}_k/F^{-k}\mathcal{A}_k$.

Considérons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & (F^{-k}\mathcal{A}_k)^p & \longrightarrow & \mathcal{A}_k^p & \longrightarrow & \mathcal{A}_{k-1}^p & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow v & & \downarrow u & & \downarrow w & & \\
0 & \longrightarrow & (F^{-k}\mathcal{A}_k)^q & \longrightarrow & \mathcal{A}_k^q & \longrightarrow & \mathcal{A}_{k-1}^q & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

où les lignes sont exactes, et les flèches verticales se déduisent de u par passage au quotient et par restriction. Le diagramme du serpent fournit une suite exacte de $\mathcal{A}_k$-modules :

$$0 \to \mathrm{Ker}\ v \to \mathrm{Ker}\ u \to \mathrm{Ker}\ w \xrightarrow{\delta} \mathrm{coker}\ v \to \mathrm{coker}\ u \to \mathrm{coker}\ w \to 0 .$$

Supposons $\mathcal{A}_{k-1}$ cohérent. Alors $F^{-k}\mathcal{A}_k$ est cohérent sur $\mathcal{A}_{k-1}$. Ainsi v et w sont en fait des homomorphismes de $\mathcal{A}_{k-1}$-modules cohérents, donc $\ker v$, $\mathrm{coker}\ v$, et $\ker w$ sont cohérents. Par suite δ est aussi un homomorphisme de $\mathcal{A}_{k-1}$-modules cohérent, donc $\ker \delta$ est cohérent. Finalement, on a une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Ker}\ v \to \mathrm{Ker}\ u \to \mathrm{Ker}\ \delta \to 0 .$$

Comme $\mathrm{Ker}\ v$ et $\mathrm{Ker}\ \delta$ sont cohérents sur $\mathcal{A}_{k-1}$, ils sont localement de type fini sur $\mathcal{A}_{k-1}$ donc aussi sur $\mathcal{A}_k$, et $\ker u$ est localement de type fini sur $\mathcal{A}_k$.

(4.19) THEOREME. - <u>Soit</u> u <u>un homomorphisme</u> $\mathcal{D}^p \to \mathcal{D}^q$. <u>Alors sur le faisceau</u> $\mathrm{Im}\ u$, <u>la filtration induite est bonne</u>.

Nous supposerons u de degré ≤ 0 (on peut toujours se ramener à ce cas, quitte à composer u avec un homomorphisme elliptique convenable). Soit $\mathcal{J} = \operatorname{Im} U$. Il s'agit de prouver que $\sigma(\mathcal{J})$ est cohérent.

Posons $\Phi_{r,s} = u(F^r\mathcal{D}^p)/u(F^r\mathcal{D}^p) \cap F^s\mathcal{D}^q$: si $k \geq r-s-1$, $\Phi_{r,s}$ est un $\mathcal{G}_k$-module, image de l'homomorphisme de $\mathcal{G}_k$-modules cohérents : $F^r\mathcal{D}^p/F^s\mathcal{D}^p \rightarrow F^r\mathcal{D}^q/F^s\mathcal{D}^q$; donc $\Phi_{r,s}$ est cohérent sur $\mathcal{G}_k$.

Soit maintenant $\psi_r = u(F^r\mathcal{D}^p) \cap F^o\mathcal{D}^q/u(F^r\mathcal{D}^p) \cap F^{-1}\mathcal{D}^q$: on a une suite exacte de $\mathcal{G}_r$-modules

$$0 \rightarrow \psi_r \rightarrow \Phi_{r,-1} \rightarrow \Phi_{r,0} \rightarrow 0 .$$

Donc ψ_r est cohérent sur $\mathcal{G}_r$, et aussi sur $\mathcal{G}_o = 0$ puisque c'est en fait un $\mathcal{O}$-module.

Maintenant, il est clair que la suite ψ_r est une suite croissante de sous-modules de $\mathcal{O}^q = \sigma(\mathcal{D}^q)$, dont la réunion est $\sigma(\mathcal{J})$. Comme les ψ_r sont cohérents, cette suite est localement stationnaire, et sa réunion $\sigma(\mathcal{J})$ est cohérente. C.Q.F.D.

(4.20) COROLLAIRE. - <u>Le faisceau</u> $\mathcal{D}$ <u>est cohérent</u>.

Soit $u : \mathcal{D}^p \rightarrow \mathcal{D}^q$ un homomorphisme ; montrons que $\operatorname{Ker} u$ est localement de type fini. Comme la filtration induite sur $\mathcal{J} = \operatorname{Im} u$ est bonne, $\mathcal{J}$ possède (localement) une bonne résolution par des modules libres :

$$\dots \mathcal{L}^1 \xrightarrow{w} \mathcal{L}^o \xrightarrow{v} \mathcal{J} \rightarrow 0 .$$

Soit maintenant $a : \mathcal{D}^p \rightarrow \mathcal{L}^o$ un relèvement de u , et $b : \mathcal{L}^o \rightarrow \mathcal{D}^p$ un relèvement de v .

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}^o \arrow[d, shift left, "b"] \arrow[dr, "v"] & \\
\mathcal{D}^p \arrow[u, shift left, "a"] \arrow[r, "u"'] & \mathcal{J}
\end{tikzcd}$$

On a évidemment $u(1-ba) = 0$ et $ubw = 0$. Par ailleurs si $u(\alpha) = 0$, on a $\alpha = (1-ba)\alpha + ba\alpha$, et comme $u(\alpha) = 0$, on a $v(\alpha) = 0$ donc $a\alpha \in \operatorname{Im} w$. Il résulte de ceci qu'on a

$$\operatorname{Ker} u = \operatorname{Im}(1-ba) + \operatorname{Im}(bw) .$$

Donc Ker u est de type fini. C.Q.F.D.

4. <u>APPENDICE</u>.

Le complété de $\mathcal{D}$ pour sa filtration canonique s'identifie naturellement au faisceau $\hat{\mathcal{O}}$ des opd. formels. Plus généralement :

(4.21) PROPOSITION. - <u>Soit</u> $\mathcal{M}$ <u>un</u> $\mathcal{D}$-<u>module</u>, <u>muni d'une bonne filtration</u>. <u>Alors le complété</u> $\hat{\mathcal{M}}$ <u>s'identifie à</u> $\hat{\mathcal{D}} \otimes_{D} \mathcal{M}$.

Plus précisément, l'application canonique $i : \hat{\mathcal{D}} \otimes_{\mathcal{D}} \mathcal{M} \to \hat{\mathcal{M}}$ est un isomorphisme.

Il est clair que $\hat{\mathcal{M}}$ est séparé, et $\sigma(\hat{\mathcal{M}}) = \sigma(\mathcal{M})$. $\mathcal{M}$ possède une bonne résolution :

$$\mathcal{D}^p \xrightarrow{\epsilon_1} \mathcal{D}^q \xrightarrow{\epsilon_o} \mathcal{M} \longrightarrow 0 .$$

Par passage au complété, on en déduit un complexe

$$\hat{\mathcal{D}}^p \xrightarrow{\hat{\epsilon}_1} \hat{\mathcal{D}}^q \xrightarrow{\hat{\epsilon}_o} \hat{\mathcal{M}} \longrightarrow 0 .$$

Comme on a $\sigma(\hat{\epsilon}_1) = \sigma(\epsilon_1)$ et $\sigma(\hat{\epsilon}_o) = \sigma(\epsilon_o)$, ce complexe est une bonne résolution de $\hat{\mathcal{M}}$ -donc en particulier une résolution de $\hat{\mathcal{M}}$ (les résultats des n°1 et 2 , qui ont été énoncés pour les $\mathcal{D}$-modules). Or lorsqu'on identifie le complété de $\mathcal{D}$ à $\hat{\mathcal{D}}$, $\hat{\epsilon}_1$ s'identifie à $\mathrm{Id} \otimes_{\mathcal{D}} \epsilon_1$, de sorte que coker $\hat{\epsilon}_1$ s'identifie à $\hat{\mathcal{D}} \otimes_{\mathcal{D}} \mathcal{M}$.

(4.22) COROLLAIRE. - $\hat{\mathcal{D}}$ <u>est fidèlement plat sur</u> $\mathcal{D}$.

Il s'agit de prouver qu'on a $\hat{\mathcal{D}} \otimes \mathcal{M} \neq 0$ si $\mathcal{M} \neq 0$ et que $\mathrm{Id}_{\hat{\mathcal{D}}} \otimes u$ est injectif si u est injectif. En fait, il faut prouver ces assertions pour les germes en chaque point ξ , et il suffit de les prouver pour les modules de type fini. Or tout module de type fini sur $\mathcal{D}_\xi$ est le germe en ξ d'un $\mathcal{D}$-module muni d'une bonne filtration (parce que $\mathcal{D}_\xi$ est noethérien, donc tout $\mathcal{D}_\xi$-module de type fini admet une présentation finie, qu'on peut prolonger dans un petit voisinage de ξ).

Il suffira donc de prouver que si $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ possèdent des bonnes filtrations, et si $u : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ est injectif, alors $\hat{\mathcal{M}} \neq 0$ si $\mathcal{M} \neq 0$ et $\hat{u}$ est injectif. Ceci est évident car on a $\sigma(\hat{\mathcal{M}}) = \sigma(\mathcal{M}) \neq 0$ si $\mathcal{M} \neq 0$, et si u est injectif, on peut munir $\mathcal{M}$ de la filtration induite (qui est bonne), de sorte que $\sigma(u) = \sigma(\hat{u})$ est injectif, donc $\hat{u}$ est injectif.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOUTET DE MONVEL L., KREE P. - Pseudo-différential operators and Gevrey classes. Ann. Inst. Fourier 17 (1967) 295-323.

[2] DUISTERMAAT J.J. - Oscillatory integrals, Lagrangian immersions and unfolding manifolds. Comm. Pure Appl. Math. 27 (1974) 207-281.

[3] KASHIVARA M., KAWAI T., SATO M. - Microfunctions and pseudo-differential equations. Lecture Notes in Math., n° 287, Springer Verlag.

[4] MALGRANGE B. - Frobenius avec singularités 1. Codimension 1. Publ. Sc. IHES 46 (1976).

[5] PHAM F. - Caustiques, phase stationnaire et microfonctions. (manuscrit).

-:-:-:-