JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

PIERRE BOLLEY
JACQUES CAMUS

Régularité pour des systèmes à coefficients constants

Journées Équations aux dérivées partielles (1976), p. 1-19
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1976____A4_0>

REGULARITE POUR DES SYSTEMES A COEFFICIENTS CONSTANTS.

par

P. BOLLEY(*) - J. CAMUS(**)

INTRODUCTION.

On considère des polynômes différentiels $P_1,\ldots,P_N$ à coefficients constants complexes de degré $\leq m$.

Dans une première partie, on étudie la régularité des distributions T telles que $P_\ell\, T \in H^{k-m}(\Omega)$, $\ell=1,\ldots,N$, Ω étant un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et k un entier $\geq o$. De façon précise, si P'_ℓ désigne la partie principale d'ordre m de P_ℓ, on a le résultat suivant :

Théorème 1 : *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, régulier ou polyédrique, les conditions suivantes sont équivalentes : pour* $k \in \mathbb{N}$,

(i) l'espace $\{T \in \mathcal{D}'(\Omega)\ ;\ P_\ell\, T \in H^{k-m}(\Omega),\ \ell=1,\ldots,N\}$ *coïncide avec l'espace* $H^k(\Omega)$ *;*

(ii) pour tout $\zeta \in \mathbb{C}^n\setminus\{o\}$, *on a* : $\sum_{\ell=1}^{N} |P'_\ell(\zeta)|^2 \neq o$.

Ce résultat généralise au cas des ouverts polyédriques ceux de [2], [6], [3], et répond en particulier au problème posé par J.C. Nédelec et B. Mercier [5], correspondant au cas où les polynômes P_ℓ se réduisent aux opérateurs de dérivation D_i , $i=1,\ldots,n$, et à $k=o$.

La méthode de démonstration est basée sur une technique d'inégalités a priori et permet d'atteindre, outre des ouverts plus généraux, sous certaines hypothèses supplémentaires, le cas des coefficients variables, la condition (ii) devant alors être remplacée par les conditions (A) et (B) d'Aronszajn (cf. I.3).

Dans une seconde partie, on étudie la régularité C^∞ jusqu'au bord. On montre le :

(*) Université de Brest - (**) Université de Rennes.

Théorème 2 : *Soit* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^n$, *régulier ou polyédrique, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *l'espace* $\{T \in \mathcal{D}'(\Omega)\ ;\ P_\ell\, T \in C^\infty(\overline{\Omega}),\ \ell=1,\dots,N\}$ *coïncide avec l'espace* $C^\infty(\overline{\Omega})$;

(ii) *l'ensemble des zéros complexes communs aux polynômes* P_ℓ, $\ell=1,\dots,N$, *est fini.*

Dans une troisième partie, on montre comment les théorèmes 1 et 2 s'appliquent à des systèmes plus généraux. Plus précisément, soient P_i^j, $i=1,\dots,N$, $j=1,\dots,M$, des opérateurs différentiels à coefficients constants d'ordre m_j, $j=1,\dots,M$. On note $P_i'^j$ la partie principale d'ordre m_j de P_i^j, alors on a :

Corollaire 1 : *Soit* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^n$, *régulier ou polyédrique, les conditions suivantes sont équivalentes : pour* $k \in \mathbb{Z}$ *avec* $m_j + k \geq 0$, $j=1,\dots,M$,

(i) l'espace $\{(T_1,\dots,T_M) \in (\mathcal{D}'(\Omega))^M\ ;\ \sum_{j=1}^{M} P_i^j\, T_j \in H^k(\Omega),\ i=1,\dots,N\}$ *coïncide avec l'espace* $\prod_{j=1}^{M} H^{m_j+k}(\Omega)$;

(ii) pour tout $\zeta \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, *le rang de la matrice* $(P_i'^j(\zeta))_{\substack{1 \leq i \leq N \\ 1 \leq j \leq M}}$ *est égal à* M.

Corollaire 2 : *Soit* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^n$, *régulier ou polyédrique, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *l'espace* $\{(T_1,\dots,T_M) \in (\mathcal{D}'(\Omega))^M\ ;\ \sum_{j=1}^{M} P_i^j\, T_j \in C^\infty(\overline{\Omega}),\ i=1,\dots,N\}$ *coïncide avec l'espace* $(C^\infty(\overline{\Omega}))^M$;

(ii) *l'ensemble des* $\zeta \in \mathbb{C}^n$ *pour lesquels la matrice* $(P_i'^j(\zeta))_{\substack{1 \leq i \leq N \\ 1 \leq j \leq M}}$ *n'est pas de rang* M *est fini.*

En particulier, ces résultats s'appliquent au système classique de Korn $D_i\, T_j + D_j\, T_i$, $i,j=1,\dots,n$.

0. NOTATIONS.

Pour un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, on désigne par $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'espace de distributions sur Ω, par $C^\infty(\overline{\Omega})$, l'espace des restrictions à Ω des fonctions de $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et par $L^2(\Omega)$ l'espace des (classes de) fonctions mesurables et de carré sommable pour la mesure de Lebesgue sur Ω et muni de la norme :

$$u \longmapsto \|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}.$$

Pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$ de la forme $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, on note $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ et $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}$ avec $D_j = -i \frac{\partial}{\partial x_j}$ pour $j=1,\ldots,n$.

Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $H^k(\mathbb{R}^n)$ l'espace de Sobolev d'ordre k défini par :

$$H^k(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n) \ ; \ D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n) \ , \ |\alpha| \leq m\}$$

et muni de la norme : $u \longrightarrow \|u\|_{k,\mathbb{R}^n} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \right)^{1/2}$. Le dual de $H^k(\mathbb{R}^n)$ est noté $H^{-k}(\mathbb{R}^n)$.

Pour $k \in \mathbb{Z}$, on désigne par $H^k(\Omega)$, l'espace des restrictions à Ω des distributions de $H^k(\mathbb{R}^n)$ muni de la norme d'espace quotient :

$$u \longmapsto \|u\|_{k,\Omega} = \operatorname*{Inf}_{v|_\Omega = u} \|v\|_{k,\mathbb{R}^n} \ .$$

Lorsque Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, régulier ou polyédrique, l'espace $H^k(\Omega)$ coïncide algébriquement et topologiquement avec l'espace $\{u \in L^2(\Omega) \ ; \ D^\alpha u \in L^2(\Omega), \ |\alpha| \leq k\}$ muni de la norme :

$$u \longmapsto \|u\|_{k,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)} \right)^{1/2} .$$

I. REGULARITE H^k POUR DES SYSTEMES A COEFFICIENTS CONSTANTS.

On commence par étudier directement le cas où l'ouvert Ω est un cube de $\mathbb{R}^n$.

I.1. Cas particulier du cube.

On va démontrer la :

Proposition 1.1 : *Soit* $\Omega = (]o,1[)^n$ *le cube unité de* $\mathbb{R}^n$ *et soient* $P_1,\dots,P_N$ *des polynômes différentiels à coefficients constants complexes de degré* $\leq m$. *On désigne par* P'_ℓ , $\ell=1,\dots,N$, *la partie principale d'ordre* m *de* P_ℓ. *Les conditions suivantes sont équivalentes : pour* $k \in \mathbb{Z}$,

(i) *l'espace* $\{T \in \mathcal{D}'(\Omega)\ ;\ P_\ell\, T \in H^{k-m}(\Omega),\ \ell=1,\dots,N\}$ *coïncide avec l'espace* $H^k(\Omega)$;

(ii) *pour tout* $\zeta \in \mathbb{C}^n \setminus \{o\}$, *on a :* $\sum_{\ell=1}^{N} |P'(\zeta)|^2 \neq o$.

Démonstration : (i) $\Longrightarrow$ (ii) : La démonstration est classique et sera donnée lors de la démonstration du théorème 1 au § I.2.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) : a) On commence par traiter le cas particulier où le système des polynômes P_ℓ est réduit aux opérateurs de dérivation D_i , $i=1,\dots,n$: la condition (ii) est alors trivialement satisfaite.

On doit prouver que si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et si $D_i\, T \in H^{k-1}(\Omega)$ pour $i=1,\dots,n$, alors, $T \in H^k(\Omega)$. On peut évidemment se limiter au cas où $k \leq o$.

Puisque $-\Delta T = \sum_{i=1}^{n} D_i^2\, T \in H^{k-2}(\Omega)$, il en résulte que $T \in H^k_{loc}(\Omega)$. Pour obtenir la régularité jusqu'au bord de l'ouvert Ω, on introduit une fonction $\varphi(t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que : $\varphi(t) = 1$ pour $o \leq t \leq 1/3$ et $\varphi(t) = o$ pour $\frac{2}{3} \leq t \leq 1$. On pose $\psi(t) = 1 - \varphi(t)$; par suite : $\psi(t) = 1$ pour $\frac{2}{3} \leq t \leq 1$ et $\psi(t) = o$ pour $o \leq t \leq \frac{1}{3}$.

Soit maintenant $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. On remarque tout d'abord que l'on a la formule suivante :

$$(*) \quad < -\frac{\partial T}{\partial x_i}\,,\ \varphi(x_i)\int_0^{x_i}\phi(-,\sigma_i,-)\,d\sigma_i + \psi(x_i)\int_1^{x_i}\phi(-,\sigma_i,-)\,d\sigma_i > \ = \ < T,\phi > +$$

$$< T,\ \varphi'(x_i)\int_0^{x_i}\phi(-,\sigma_i,-)\,d\sigma_i > + < T,\psi'(x_i)\int_1^{x_i}\phi(-,\sigma_i,-)\,d\sigma_i >,$$

pour $i=1,\dots,n$.

Par suite :

$$|<T,\phi>| \le |<-\frac{\partial T}{\partial x_1}\,,\ \varphi(x_1)\int_0^{x_1}\phi(\sigma_1,-)\,d\sigma_1 + \psi(x_1)\int_1^{x_1}\phi(\sigma_1,-)\,d\sigma_1>| \quad (1)$$

$$+ |<T,\ \varphi'(x_1)\int_0^{x_1}\phi(\sigma_1,-)\,d\sigma_1>| \quad (2)$$

$$+ |<T,\psi'(x_1)\int_1^{x_1}\phi(\sigma_1,-)\,d\sigma_1>|\,. \quad (3)$$

On estime chaque terme (1), (2) et (3). On a :

$$(1) \qquad \le C_1\,.\ \left\|\frac{\partial T}{\partial x_1}\right\|_{H^{k-1}(\Omega)}\,.\ \|\phi\|_{H_0^{-k+1}(\Omega)}\,.$$

On obtient alors, en posant $\phi_1^1 = \varphi'(x_1)\int_0^{x_1}\phi(\sigma_1,-)\,d\sigma_1$ et $\phi_1^2 = \psi'(x_1)\int_1^{x_1}\phi(\sigma_1,-)\,d\sigma_1$:

$$|<T,\phi>| \le C_1.\left\|\frac{\partial T}{\partial x_1}\right\|_{H^{k-1}(\Omega)}.\ \|\phi\|_{H_0^{-k+1}(\Omega)} + |<T,\phi_1^1>| + |<T,\phi_1^2>|.$$

On remarque que $\operatorname{Supp}\phi_1^i \subset \left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right] \times (]0,1[)^{n-1}$. Pour estimer les deux termes $|<T,\phi_1^i>|$, on utilise à nouveau la formule (*) avec $x_i = x_2$ et $\phi = \phi_1^i$, $i=1,2$. On obtient alors la majoration suivante :

$$|<T,\phi_1^i>| \le C_2\,.\left\|\frac{\partial T}{\partial x_2}\right\|_{H^{k-1}(\Omega)}.\|\phi\|_{H_0^{-k+1}(\Omega)} + |<T,\phi_2^{i,1}>| + |<T,\phi_2^{i,2}>|$$

avec $\phi_2^{i,1} = \varphi'(x_2)\int_0^{x_2}\phi_1^i(-,\sigma_2-)\,d\sigma_2$ et $\phi_2^{i,2} = \psi'(x_2) = \int_1^{x_2}\phi_1^i(-,\sigma_2,-)\,d\,\sigma_2$.

On remarque que $\operatorname{Supp}\phi_2^{i,j} \subset \left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]^2 \times (]0,1[)^{n-2}$, $i,j=1,2$. Pour estimer les termes $|<T,\phi_2^{i,j}>|$, on réutilise la formule (*) avec la variable $x_i = x_3$ et $\phi = \phi_2^{i,j}$.

Finalement, à l'étape n-1, on obtient la majoration :

$$|<T,\phi_{n-1}^{i_1,\dots,i_{n-1}}>| \leq C_n \cdot \| \frac{\partial T}{\partial x_n} \|_{H^{k-1}(\Omega)} \cdot \|\phi\|_{H_o^{-k+1}(\Omega)} + |<T,\ \phi_n^{i_1,\dots,i_{n-1},1}>| + |<T,\ \phi_n^{i_1,\dots,i_{n-1},2}>|$$

où $i_j \in \{1,2\}$ et $\phi_n^{i_1,\dots,i_{n-1},1} = \varphi(x_n) \int_o^{x_n} \phi_{n-1}^{i_1,\dots,i_n}(-,\sigma_n)\, d\sigma_n$,

$$\phi_n^{i_1,\dots,i_{n-1},2} = \psi'(x_n) \int_1^{x_n} \phi_{n-1}^{i_1,\dots,i_{n-1}}(-,\sigma_n) d\sigma_n .$$

Comme $T \in L^2_{loc}(\Omega)$ et que Supp $\phi_n^{i_1,\dots,i_n} \subset \left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]^n$, on obtient que :

$$|<T,\ \phi^{i_1,\dots,i_n}>| \leq \|T\|_{H^k(\Omega_o)} \cdot \|\phi_n^{i_1,\dots,i_n}\|_{H_o^{-k}(\Omega_o)}$$

où Ω_o est un ouvert relativement compact de Ω contenant le cube $\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]^n$. Enfin, il est immédiat que :

$$\|\phi_n^{i_1,\dots,i_n}\|_{H_o^{-k}(\Omega_o)} \leq C_{n+1} \cdot \|\phi\|_{H_o^{-k}(\Omega)} .$$

Finalement, on a établi qu'il existe une constante $C > o$ telle que :

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega),\ |<T,\phi>| \leq C.\ \|\phi\|_{H_o^{-k+1}(\Omega)} ,$$

ce qui prouve que $T \in H^{k-1}(\Omega)$.

On peut maintenant montrer que $T \in H^k(\Omega)$. Pour cela, on remarque que l'espace $X^{k-1}(\Omega) = \{T \in H^{k-1}(\Omega)\ ;\ D_i T \in H^{k-1}(\Omega),\ i=1,\dots,n\}$ est localisable, i.e. : $\forall \phi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$, $\phi T \in X^{k-1}(\Omega)$, si $T \in X^{k-1}(\Omega)$.

Ceci étant, supposons, pour simplifier, que $T \in X^{k-1}(\Omega)$ avec supp $T \subset \left[o,\frac{1}{2}\right]^n$ et montrons que $T \in H^k(\Omega)$.

On considère un opérateur de prolongement P à une variable tel que :

1) $P \in \mathcal{L}(H^{k-1}(\mathbb{R}_+),\ H^{k-1}(\mathbb{R}))$;

2) $\frac{d}{dt} \circ P = Q \circ \frac{d}{dt}$ avec $Q \in \mathcal{L}(H^{k-1}(\mathbb{R}_+),\ H^{k-1}(\mathbb{R}))$.

Un tel prolongement existe, par exemple, le prolongement de Babitch [4].

On considère alors la distribution $\tilde{T}$ définie par : $\tilde{T} = P_1 \dots P_n T$ où P_i désigne l'opérateur de prolongement P pour la variable x_i , $i=1,\dots,n$. $\tilde{T}$ est une distribution sur $\mathbb{R}^n$ à support compact telle que :

3) $\tilde{T} \in H^{k-1}(\mathbb{R}^n)$;

4) $\frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} = P_1 \ldots P_{i-1} P_{i+1} \ldots P_n Q_i \left(\frac{\partial T}{\partial x_i}\right) \in H^{k-1}(\mathbb{R}^n)$, $i=1,\ldots,n$.

Ainsi, $\tilde{T} \in X^{k-1}(\mathbb{R}^n)$ qui, par transformation de Fourier, coïncide avec l'espace $H^k(\mathbb{R}^n)$.

Finalement, $T = \tilde{T}|_\Omega \in H^k(\Omega)$, ce qu'il fallait démontrer.

b) On traite maintenant le cas où les polynômes P_ℓ sont homogènes de degré m en se ramenant au système $(D_i)_{1 \leq i \leq n}$ au moyen de Nullstellensatz de Hilbert comme dans Aronszajn-Smith [7].

On doit prouver que si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et si $P_\ell\, T \in H^{k-m}(\Omega)$ pour $\ell=1,\ldots,N$, alors $T \in H^k(\Omega)$. Les polynômes P_ℓ , homogènes de degré m, satisfaisant la condition (ii), il résulte du Nullstellensatz qu'il existe un entier $m' \geq m$ et des polynômes homogènes $A_{\alpha\ell}$ de degré $m'-m$ pour $|\alpha| = m'$ et $\ell=1,\ldots,N$ tels que :

$$\forall \alpha, \ |\alpha| = m' \ ; \ \zeta^\alpha \equiv \sum_{\ell=1}^{N} A_{\alpha\ell}(\zeta)\, P_\ell(\zeta).$$

Ainsi, pour tout α, $|\alpha| = m'-1$, on a : $T_\alpha = D^\alpha T$ vérifie $D_i\, T_\alpha \in H^{k-m'}(\Omega)$ pour $i=1,\ldots,n$. Donc, d'après le a), $T_\alpha \in H^{k-m'+1}(\Omega)$ pour $|\alpha| = m'-1$. De proche en proche, il en résulte que $T \in H^k(\Omega)$. La proposition 1.1 est donc établie pour des polynômes homogènes de degré m.

c) Pour atteindre le cas des polynômes P_ℓ non nécessairement homogènes, on procède de la façon suivante : on commence par établir qu'il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$(1.1) \quad \forall\, u \in H^k(\Omega), \ \|u\|_{k,\Omega} \leq C.\left\{\sum_{\ell=1}^{N} \|P_\ell u\|_{k-m,\Omega} + \|u\|_{k-1,\Omega}\right\}.$$

Ceci est immédiat puisque cette inégalité a lieu pour les polynômes P'_ℓ d'après la régularité obtenue au b) pour le système P'_ℓ , $\ell=1,\dots,N$ (cf. démonstration (i) $\Longrightarrow$ (ii)) et ensuite, on utilise la compacité de l'injection de $H^k(\Omega)$ dans $H^{k-1}(\Omega)$.

Lorsque k=m, l'inégalité (1.1) est exactement l'inégalité de coercivité d'Aronszajn.

<u>Remarque 1.1</u> : Une telle inégalité (1.1) aurait pu être obtenue indépendamment du résultat de régularité obtenu au a) et b) ; il suffit de se ramener à $\mathbb{R}^n$ par un prolongement P du type utilisé au a) et sur $\mathbb{R}^n$, l'inégalité (1.1) est immédiate.

Ensuite, on affine cette inégalité (1.1) en montrant que pour tout ouvert $\Omega_o \neq \emptyset$ relativement compact dans Ω, il existe une constante C_{Ω_o} telle que :

$$(1.2)\quad \forall u \in H^k(\Omega),\ \|u\|_{k,\Omega} \leq C_{\Omega_o} \cdot \left\{ \sum_{\ell=1}^{N} \|P_\ell u\|_{k-m,\Omega} + \|u\|_{k-1,\Omega_o} \right\} .$$

Pour cela, on raisonne par l'absurde : pour tout n, il existe $u_n \in H^k(\Omega)$ telle que :

$$\|u_n\|_{k,\Omega} > n \cdot \left\{ \sum_{\ell=1}^{N} \|P_\ell\, u\|_{k-m,\Omega} + \|u_n\|_{k-1,\Omega_o} \right\} .$$

Donc : $u_n \neq o$, on pose alors : $v_n = \dfrac{u_n}{\|u_n\|_{k,\Omega}}$. Par suite : $\|v_n\|_{k,\Omega} = 1$ et

$$\sum_{\ell=1}^{N} \|P_\ell\, v_n\|_{k-m,\Omega} + \|v_n\|_{k-1,\Omega_o} \leq \frac{1}{n} .$$

De $(v_n)_n$, on extrait une sous-suite, encore notée $(v_n)_n$, convergente faiblement vers v dans $H^k(\Omega)$ et fortement vers v dans $H^{k-1}(\Omega)$. De l'inégalité précédente, on déduit que $v=o$ sur Ω_o et que $P_\ell\, v=o$, pour $\ell=1,\dots,N$, dans Ω. Par suite, on a aussi : $\sum_{\ell=1}^{N} P_\ell^{*} P_\ell(v) = o$, donc, puisque l'opérateur $\sum_{\ell=1}^{N} P_\ell^{*} P_\ell$ est elliptique et à coefficients constants, v est donc analytique dans Ω ; v étant nulle sur $\Omega_o \neq \emptyset$ et Ω étant connexe, cela implique $v \equiv o$ dans Ω.

Enfin, on sait que $\|u\|_{k,\Omega} \simeq (\sum_{\ell=1}^{N} \|P_\ell u\|_{k-m,\Omega} + \|u\|_{k-1,\Omega})$ sur $H^k(\Omega)$ d'après (1.1). Or $P_\ell v_n$ tend vers 0 fortement dans $H^{k-m}(\Omega)$ et v_n tend vers v=o fortement dans $H^{k-1}(\Omega)$, par suite : v_n tend vers 0 dans $H^k(\Omega)$, ce qui est absurde puisque, pour tout n, $\|v_n\|_{k,\Omega} = 1$.

Maintenant, on montre que, pour tout ouvert "voisin" $\Omega' \subset \Omega$, on a :

(1.3) $\forall\, u \in H^k(\Omega')$, $\|u\|_{k,\Omega'} \leq C'_{\Omega_o} \cdot \left\{ \sum_{\ell=1}^{N} \|P_\ell u\|_{k-m,\Omega'} + \|u\|_{k-1,\Omega_o} \right\}$, la constante C'_{Ω_o} ne dépendant pas de Ω'.

De façon précise, Ω étant un cube est étoilé par rapport à un de ses points, soit x_o. Choisissons Ω_o tel que $x_o \in \Omega_o$ et $\Omega' = \Omega_t$ défini par :
$\Omega_t = \{y = x_o + t\,(x-x_o)\ ;\ x \in \Omega\}$ pour tout $t \in]o,1[$ voisin de 1. On a alors, Ω_t est ouvert avec $\Omega_t \subset \Omega$ et $\Omega_1 = \Omega$. Soit maintenant : $u \in H^k(\Omega_t)$, considérons $v \in H^k(\Omega)$ défini par :

$$v(x) = u(x_o + t(x-x_o)).$$

On applique l'inégalité (2.2) à v.

Pour simplifier, on fait k=m, on doit donc estimer les termes :

1- $\displaystyle\int_\Omega |D^\alpha v\ (x)|^2\, dx = t^{2|\alpha|-n} \int_{\Omega_t} |D^\alpha u(y)|^2\, dy$;

2- $\displaystyle\int_\Omega |P_\ell\ v(x)|^2\, dx = \int_{\Omega_t} \Big| \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha\, t^{|\alpha|}\, D^\alpha u\ (y)\Big|^2\ t^{-n}\, dy$

$$\leq 2.t^{2m-m} \left\{ \int_{\Omega_t} |P_\ell u|^2 dy + C. \sum_{|\alpha| \lneq m} (1-t^{|\alpha|-m})^2 \int_{\Omega_t} |D^\alpha u|^2\, dy \right\} ;$$

3- $\displaystyle\int_{\Omega_o} |D^\alpha\ v(x)|^2 dx = t^{2|\alpha|-n} \int_{\Omega_{o,t}} |D^\alpha u|^2\, dy \leq t^{2|\alpha|-n} \int_{\Omega_o} |D^\alpha u|^2\, dy.$

Finalement, on obtient l'inégalité :

$$t^{2m} \int_{\Omega_t} \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^2\, dy + \sum_{o<|\alpha| \lneq m} t^{2|\alpha|} \int_{\Omega_t} |D^\alpha u|^2\, dy + \int_{\Omega_t} |u|^2\, dy$$

$$\leq 2.C_{\Omega_o}.t^{2m} \left\{ \int_{\Omega_t} \sum_{\ell=1}^{N} |P_\ell u|^2\, dy + C. \sum_{|\alpha| \lneq m} (1-t^{|\alpha|-m})^2 \int_{\Omega_t} |D^\alpha u|^2\, dy \right\}$$

$$+ C_{\Omega_o} . \sum_{|\alpha| \leq m-1} t^{2|\alpha|} \int_{\Omega_o} |D^\alpha u|^2\, dy ;$$

ce qui, pour t voisin de 1, donne l'inégalité :

$$\|u\|_{m,\Omega_t} \leq C'_{\Omega_o} \cdot \left\{ \sum_{\ell=1}^{N} \|P_\ell\, u\|_{o,\Omega_t} + \|u\|_{m-1,\Omega_o} \right\}$$

avec une constante C'_{Ω_o} indépendante de t, i.e. (1.3) pour k=m.

Pour $k \neq m$, on procède de la même façon.

On peut maintenant établir la proposition 1.1. Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ avec $P_\ell T \in H^{k-m}(\Omega)$ pour $\ell=1,\dots,N$. Pour t voisin de 1, on a, d'après la régularité à l'intérieur de l'opérateur elliptique $\sum_{\ell=1}^{N} P_\ell^* P_\ell$, que $u = T|_{\Omega_t} \in H^k(\Omega_t)$ et on peut donc appliquer l'inégalité (1.3). On obtient alors que $\|T|_{\Omega_t}\|_{k,\Omega_t}$ est borné pour t voisin de 1 ; ce qui prouve que $T \in H^k(\Omega)$, ce qu'il fallait démontrer.

Remarque 1.2 : Compte-tenu de la remarque 1.1, la démonstration donnée au c) contient les cas particuliers traités directement aux a) et b).

I.2. Démonstration du théorème 1 :

(i) $\Longrightarrow$ (ii) : La démonstration est classique [1]. Si l'espace $\{T \in \mathcal{D}'(\Omega)$; $P_\ell\, T \in H^{k-m}(\Omega),\ \ell=1,\dots,N\}$ coïncide avec l'espace de Sobolev $H^k(\Omega)$, on a aussi :

$$\{T \in H^{k-1}(\Omega) \ ;\ P_\ell\, T \in H^{k-m}(\Omega),\ \ell=1,\dots,N\} \equiv H^k(\Omega).$$

On en déduit qu'il existe une constante $C > o$ telle que pour tout $u \in H^k(\Omega)$, on ait :

$$\|u\|_{k,\Omega} \leq C \cdot \left\{ \sum_{\ell=1}^{N} \|P_\ell\, u\|_{k-m,\Omega} + \|u\|_{k-1,\Omega} \right\}.$$

Utilisant la compacité de l'injection de $H^k(\Omega)$ dans $H^{k-1}(\Omega)$, il en résulte qu'il existe une constante $C > o$ telle que pour tout $u \in H^k(\Omega)$, on ait :

$$\|u\|_{k,\Omega} \leq C \cdot \left\{ \sum_{\ell=1}^{N} \|P'_\ell\, u\|_{k-m,\Omega} + \|u\|_{k-1,\Omega} \right\}.$$

Supposons alors la condition (ii) non vérifiée et soit $\zeta \in \mathbb{C}^n \setminus \{o\}$ un zéro commun aux polynômes homogènes de degré m, P'_ℓ, $\ell=1,\dots,N$. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, posons $u_\lambda(x) = e^{i\lambda<\zeta,x>}$; $u_\lambda \in H^k(\Omega)$ puisque Ω est borné, de plus, on a :

$P'_\ell(D)\ u_\lambda = P'_\ell\ (\lambda\zeta)\ u_\lambda = \lambda^m\ P'_\ell(\zeta)\ u_\lambda = o$; par suite, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a :

$$\|u_\lambda\|_{k,\Omega} \leq C.\ \|u_\lambda\|_{k-1,\Omega}\ ,$$

ce qui est absurde puisque d'une part, l'injection de $H^k(\Omega)$ dans $H^{k-1}(\Omega)$ est compacte et d'autre part, l'espace vectoriel engendré par les u_λ n'est pas de dimension finie.

<u>(ii) $\Longrightarrow$ (i)</u> : Il est clair que l'on peut se limiter à considérer le cas k=o.

Soit Ω un ouvert polyédrique borné de $\mathbb{R}^n$. On va se ramener, par un découpage convenable, au cas du cube.

Soient x_o un point frontière de Ω et $\ell_i(x) = o$, $i=1,\ldots,p$, les équations des hyperplans affines délimitant Ω et passant par x_o. Si $p \geq n$, on considère pour toute suite $i = (i_1,\ldots,i_n)$ de points distincts $i_j \in \{1,\ldots,p\}$ et pour toute suite $\varepsilon = (\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$ avec $\varepsilon_j \in \{-\varepsilon,\varepsilon\}$, $\varepsilon > o$, les cubes $C_{i,\varepsilon} = \{x \in \mathbb{R}^n\ ;\ \ell_{ij}(x) \in I_{\varepsilon_j}\ ,\ j=1,\ldots,p\}$ où $I_{-\varepsilon} =]-\varepsilon,o[$ et $I_\varepsilon =]o,\varepsilon[$. Si $p < n$, on complète le système $\{\ell_1,\ldots,\ell_p\}$ en un système libre maximal $\{\ell_1,\ldots,\ell_p\ ,\ \ell_p\ ,\ \ell_{p+1}\ ,\ \ldots,\ \ell_n\}$ et comme précédemment, on considère les cubes $C_{i,\varepsilon}$ correspondants. Il est facile de voir qu'il existe $\varepsilon > o$ tel que, pour toute suite i, l'intersection $C_{i,\varepsilon} \cap \Omega$ soit ou bien vide, ou bien contenu dans Ω.

Il suffit maintenant, si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ avec $P_\ell T \in H^{-m}(\Omega)$, $\ell=1,\ldots,N$ de considérer la restriction de T aux cubes $C_{i,\varepsilon}$ non vides et d'appliquer la proposition 2.1. Par suite, en considérant tous les cubes $C_{i,\varepsilon}$ non vides, on en déduit qu'il existe un voisinage ouvert V_{x_o} du point x_o dans $\mathbb{R}^n$ tel que $T|_{V_{x_o} \cap \Omega} \in L^2(V_{x_o} \cap \Omega)$. Finalement, par recollement, $T \in L^2(\Omega)$.

<u>Remarque 1.3</u> : Si Ω est un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^n$, la démonstration donnée s'applique encore pour tout $k \in \mathbb{Z}$ puisque pour tout point frontière x_o de Ω, il existe un voisinage ouvert V_{x_o} de x_o dans $\mathbb{R}^n$ tel que l'ouvert $V_{x_o} \cap \Omega$ soit difféomorphe à un cube de $\mathbb{R}^n$ et les différentes étapes a), b) et c) de la démonstration de la proposition 1.1 sont valables, les homothéties du c) étant remplacées par des translations.

I.3. Compléments.

La méthode de démonstration de la proposition 1.1 et du théorème 1 permet d'obtenir des résultats de régularité plus généraux, i.e. : pour des ouverts Ω plus généraux et des polynômes P_ℓ à coefficients variables. De façon précise :

a) Validité de l'inégalité (1.1) : On sait que l'inégalité (1.1) est valable si $k \geq m$ pour des ouverts Ω bornés et ayant la propriété du cône stricte et pour des polynômes P_ℓ à coefficients $C^\infty(\overline{\Omega})$ satisfaisant la condition :

$$(ii)' \begin{cases} \text{(A) Pour tout } x \in \Omega \text{ et pour tout } \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{o\}, \text{ on a : } \sum_{\ell=1}^{N} |P'_\ell(x,\xi)|^2 \neq o \text{ ;} \\ \text{(B)' Pour tout } x \in \partial\Omega \text{ et pour tout } \zeta \in \mathbb{C}^n \setminus \{o\}, \text{ on a : } \sum_{\ell=1}^{N} |P'_\ell(x,\zeta)|^2 \neq o. \end{cases}$$

(voir par exemple [1]).

Cette condition (ii)' peut encore être affaiblie. Par exemple, l'inégalité (1.1) est vraie, si $k \geq m$ et si Ω est un ouvert borné de classe C^m, les polynômes P_ℓ à coefficients $C^\infty(\overline{\Omega})$ satisfaisant la condition :

$$(ii)'' \begin{cases} \text{(A) Pour tout } x \in \Omega \text{ et pour tout } \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{o\}, \text{ on a : } \sum_{\ell=1}^{N} |P'_\ell(x,\xi)|^2 \neq o \text{ ;} \\ \text{(B) Pour tout } x \in \partial\Omega \text{ et pour tout } \zeta \in \mathbb{C}^n \setminus \{o\} \text{ de la forme } \zeta = \xi_1 + \tau\xi_2 \text{ avec} \\ \quad \xi_1 \text{ réel et tangent en } x \text{ à } \partial\Omega,\ \xi_2 \text{ vecteur unitaire normal en } x \text{ à } \partial\Omega \text{ et} \\ \quad \tau \in \mathbb{C}, \text{ on a : } \sum_{\ell=1}^{N} |P'_\ell(x,\zeta)|^2 \neq o. \end{cases}$$

C'est exactement l'inégalité d'Aronszajn [2].

Lorsque Ω est un ouvert borné régulier, i.e. : $\overline{\Omega}$ est une variété compacte à bord de classe C^∞ et lorsque les polynômes P_ℓ sont à coefficients $C^\infty(\overline{\Omega})$, la condition (ii)'' est nécessaire et suffisante pour que l'inégalité (1.1) ait lieu, k appartenant à $\mathbb{Z}$ (cf. [3]).

b) Validité de l'inégalité (1.2) :

L'inégalité (1.1) ayant lieu, l'inégalité (1.2) a toujours lieu si l'on suppose l'ouvert Ω connexe et les polynômes P_ℓ à coefficients analytiques sur Ω.

c) Validité de l'inégalité (1.3) :

L'inégalité (1.2) ayant lieu, l'inégalité (1.3) a toujours lieu si l'ouvert Ω est étoilé.

On peut aussi modifier légèrement la démonstration de (1.3) en considérant, au lieu d'homothéties, des translations convenables particulièrement adaptées à des ouverts ayant la propriété du cône ou plus généralement la propriété du segment.

En particulier, il résulte de ces diverses remarques que si Ω est un polyèdre ouvert étoilé et borné, si $P_1(x,D),\ldots, P_N(x\,;D)$ sont des polynômes différentiels de degré $\leq m$ à coefficients $C^\infty(\overline{\Omega})$ et analytiques sur Ω satisfaisant la condition (ii)" alors, pour $k \geq m$, on a :

$$\{T \in \mathcal{D}'(\Omega)\ ;\ P_\ell(x\,;D)\,T \in H^{k-m}(\Omega),\ \ell=1,\ldots,N\} \equiv H^k(\Omega).$$

II. HYPOELLIPTICITE JUSQU'AU BORD POUR DES SYSTEMES A COEFFICIENTS CONSTANTS.

Etant donné un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^n$, régulier ou polyédrique, on se propose de donner une condition nécessaire et suffisante sur les polynômes P_ℓ, à coefficients constants, pour que l'on ait :

$$T \in \mathcal{D}'(\Omega)\ ;\ P_\ell\{T \in C^\infty(\overline{\Omega}),\ \ell=1,\dots,N\} \equiv C^\infty(\overline{\Omega}).$$

Démonstration du théorème 2.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) : Soient les espaces :

$Y^o(\Omega) = \{T \in \mathcal{D}'(\Omega)\ ;\ P_\ell T = o,\ \ell=1,\dots,N\}$ muni de la norme $L^2(\Omega)$,

$Y^1(\Omega) = \{T \in \mathcal{D}'(\Omega)\ ;\ P_\ell T = o,\ \ell=1,\dots,N\}$ muni de la norme $H^1(\Omega)$.

Ces deux espaces coïncident ; d'autre part, l'injection de $Y^1(\Omega)$ dans $Y^o(\Omega)$ est continue ; ces espaces étant des espaces de Banach, il en résulte que les normes $u \longmapsto \|u\|_{1,\Omega}$ et $u \longmapsto \|u\|_{o,\Omega}$ sont équivalentes sur l'espace $\{T \in \mathcal{D}'(\Omega)\ ;\ P_\ell T = o,\ \ell=1,\dots,N\}$; cet espace est donc de dimension finie. Or si, $\zeta \in \mathbb{C}^n$ vérifie $P_\ell(\zeta) = o$ pour $\ell=1,\dots,N$, alors $T = e^{i<x,\zeta>} \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et satisfait $P_\ell T = o$ pour $\ell=1,\dots,N$. Il en résulte que l'ensemble des zéros complexes communs aux polynômes P_ℓ est fini, i.e. (ii).

(ii) $\Longrightarrow$ (i) : Soient $(\zeta^i)_{1 \leq i \leq \nu}$ les zéros complexes communs aux polynômes P_ℓ, $\ell=1,\dots,N$. Pour chaque $j=1,\dots,n$, considérons les polynômes Q_j définis par :

$$Q_j(\zeta) \equiv \prod_{i=1}^{\nu} (\zeta_j - \zeta_j^i).$$

On a alors, $Q_j(\zeta^i) = o$ pour $i=1,\dots,\nu$. Par suite, d'après le Nullstellensatz, il existe $\rho \in \mathbb{N}$ tel que les polynômes Q_j appartiennent à l'idéal engendré par les polynômes P_ℓ, $\ell=1,\dots,N$, i.e. qu'il existe des polynômes $A_{j\ell}$ tels que :

$$Q_j^\rho(\zeta) \equiv \sum_{\ell=1}^{N} A_{j\ell}(\zeta)\ P_\ell(\zeta)\quad,\quad j=1,\dots,n.$$

Les polynômes Q_j^ρ sont des polynômes de degré $\nu\rho$ dont la partie principale est égale à $\zeta_j^{\nu\rho}$: ils satisfont donc la condition (ii) du théorème 1. Par suite, si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et si $P_\ell(T) \in C^\infty(\overline{\Omega})$ pour $\ell=1,\dots,N$, alors aussi, $Q_j^\rho\, T \in C^\infty(\overline{\Omega})$ pour $j=1,\dots,n$ et donc :

$$T \in \bigcap_{k \geq o} H^k(\Omega) = C^\infty(\overline{\Omega}).$$

Le théorème 2 est démontré.

III. APPLICATIONS.

Etant donné un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^n$, régulier ou polyédrique et des polynômes différentiels P_i^j , $i=1,\ldots, N$, $j=1,\ldots,M$, d'ordre m_j , on se propose de donner une condition nécessaire et suffisante sur les polynômes P_i^j pour que l'espace

$\{(T_1,\ldots,T_M) \in (\mathcal{D}'(\Omega))^M ; \sum_{j=1}^{M} P_i^j T_j \in H^k(\Omega), i=1,\ldots,N\}$ (resp. $\{(T_1,\ldots,T_M) \in (\mathcal{D}'(\Omega))^M ; \sum_{j=1}^{M} P_i^j T_j \in C^\infty(\overline{\Omega}), i=1,\ldots,N\}$) coïncide avec l'espace $\prod_{j=1}^{M} H^{m_j+k}(\Omega)$ (resp. $(C^\infty(\overline{\Omega}))^M$).

Démonstration du corollaire 1 :

(i) $\Longrightarrow$ (ii) : La démonstration est classique et est analogue à celle faite pour le théorème 1. Si l'espace $\{(T_1,\ldots,T_M) \in (\mathcal{D}'(\Omega))^M ; \sum_{j=1}^{M} P_i^j T_j \in H^k(\Omega), i=1,\ldots,N\}$ coïncide avec l'espace de Sobolev $\prod_{j=1}^{M} H^{m_j+k}(\Omega)$, alors il existe une constante $C > o$ telle que pour tout $(u_1,\ldots, u_M) \in \prod_{j=1}^{M} H^{m_j+k}(\Omega)$, on ait :

$$\sum_{j=1}^{M} \|u_j\|_{m_j+k,\Omega} \leq C.\left\{ \sum_{i=1}^{N} \Big\| \sum_{j=1}^{M} P_i'^j u_j\Big\|^2_{k,\Omega} + \sum_{j=1}^{M} \|u_j\|_{m_j+k-1,\Omega} \right\}.$$

Supposons alors la condition (ii) non vérifiée : il existe donc $\zeta \in \mathbb{C}^n \setminus \{o\}$ et des $\lambda_j \in \mathbb{C}$, non tous nuls, pour $j=1,\ldots,M$ tels que :

$$\sum_{j=1}^{M} P_i'^j(\zeta)\, \lambda_j = 0 \ , \ i=1,\ldots,N.$$

Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, on pose : $u_j^\lambda = \lambda_j\, e^{\lambda<\zeta,x>}$; $u_j^\lambda \in H^{m_j+k}(\Omega)$ puisque Ω est borné et $\sum_{j=1}^{M} P_i'^j(D)\, u_j^\lambda = \sum_{j=1}^{M} P_i'^j(\lambda\zeta)\, u_j^\lambda = \lambda^{m_j} \sum_{j=1}^{M} P_i'^j(\zeta)\, \lambda_j .\, e^{\lambda<\zeta,x>} = o$; par suite, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a :

$$\sum_{j=1}^{M} \|u_j^\lambda\|_{m_j+k,\Omega} \leq C. \sum_{j=1}^{M} \|u_j^\lambda\|_{m_j+k-1,\Omega} .$$

Soit L le sous-espace vectoriel engendré par les $(u_1^\lambda,\ldots, u_M^\lambda)$ lorsque $\lambda \in \mathbb{C}$; c'est un sous-espace de $\prod_{j=1}^{M} H^{m_j+k}(\Omega)$ de dimension infinie de l'inégalité précédente, on déduit que la boule unité de l'adhérence $\overline{L}$ de L dans $\prod_{j=1}^{M} H^{m_j+k-1}(\Omega)$ est compacte, i.e : $\overline{L}$ est de dimension finie, ce qui est absurde.

<u>(ii) $\Longrightarrow$ (i)</u> : On remarque d'abord que la condition (ii) est équivalente à la condition (ii)' suivante :

(ii)' N est $\geq$ M et pour tout $\zeta \in \mathbb{C}^n \setminus \{o\}$, on a :

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_M \leq N} \left| \text{dét } \left(P'^{j}_{i_h}(\zeta)\right)_{1 \leq h,j \leq M} \right|^2 \neq 0.$$

Soit maintenant $(T_1,\dots,T_M) \in (\mathcal{D}'(\Omega))^M$ tel que $\sum_{j=1}^{M} P_i^j T_j$ appartienne à $H^{m_j+k}(\Omega)$ pour $i=1,\dots,N$. Alors, pour toute suite $1 \leq i_1 < \dots < i_M \leq N$ et pour tout $\ell=1,\dots,M$, la distribution $(\text{dét } (P^j_{i_h})_{1 \leq h,j \leq M}) T_\ell$ appartient à $H^{k-\sum_{j\neq\ell} m_j}(\Omega)$.

Du théorème 1, on déduit que : $T_\ell \in H^{m_\ell+k}(\Omega)$ pour $\ell=1,\dots,N$, ce qu'il fallait démontrer.

En particulier, ce corollaire 1 s'applique au cas du système de Korn $D_iT_j + D_jT_i$, $i,j=1,\dots,n$. Par exemple, on obtient que si $(T_1,\dots,T_n) \in (\mathcal{D}'(\Omega))^n$ et si $D_iT_j + D_jT_i \in L^2(\Omega)$ pour $i,j=1,\dots,n$, alors $(T_1,\dots,T_n) \in (H^1(\Omega))^n$ généralisant ainsi les résultats de régularité obtenus par plusieurs auteurs [7], [5], [6], [4]...

Remarquons aussi que ce corollaire 1 s'applique aussi au système généralisé de Korn introduit dans [6].

<u>Démonstration du corollaire 2.</u>

Elle est analogue à celle du corollaire 1 en s'inspirant de la démonstration du théorème 2 pour l'implication (i) $\Longrightarrow$ (ii).

<u>Remarque 3.1</u> : Il est évident que les remarques et compléments concernant les théorèmes 1 et 2 s'appliquent encore à de tels systèmes. En particulier, si Ω est un cube ou un ouvert régulier, les corollaires 1 et 2 sont valables pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. AGMON : Lectures on elliptic boundary value problems, Van Nostrand Math. Studies, Princeton, New-Jersey.

[2] N. ARONSZAJN : On coercive integro-differential quadratic forms, Techn. Report n° 14, Univ. of Kansas (1954), 94-106.

[3] P. BOLLEY - J. CAMUS : Régularité de certains espaces de distributions. Astérisque 2 et 3 - 1973.

[4] G. DUVAUT - J.L. LIONS : Les inéquations en mécanique et en physique, Dunod, Paris, (1972).

[5] K.O. FRIEDRICHS : On the boundary value problems of the theory of elasticity and Korn's inequality, Ann. of Math, Vol.48, (1947), 441-471.

[6] D.G. de FIGUEIREDO : The coerciveness for forms over vector valued functions, C.P.A.M., Vol. XVI, (1963), 63-94.

[7] A. KORN : die Eigenschwingungen eines elastischen Koerpers mit ruhender Oberflaeche, Akad. der Wissensh, Munich, Math. Phys. Kl, Berichte 36, (1906), 351.

[8] J.L. LIONS - E. MAGENES : Problèmes aux limites non homogènes et applications, Volume 1, Dunod, Paris 1968.

[9] B. MERCIER : Une méthode de résolution duproblème des charges limites utilisant les fluides de Bingham. Note à paraitre.

[10] K.T. SMITH : Inequalities for formally positive integro-differential forms, Bull. Ann. Math. Soc. 67, (1961), 368-370.

[11] par exemple, VAN DER WAERDEN : Modern algebra, II, Ungar Pub. Co, pp. 5-6.