

# JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

MOHAMED SALAH BAOUENDI

JOHANNES SJÖSTRAND

## **Régularité analytique pour le problème de Dirichlet dans un domaine irrégulier**

*Journées Équations aux dérivées partielles* (1976), p. 1-7

[http://www.numdam.org/item?id=JEDP\\_1976\\_\\_\\_A3\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1976___A3_0)

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

REGULARITE ANALYTIQUE POUR LE PROBLEME DE  
DIRICHLET DANS UN DOMAINE IRREGULIER.

par

M.S. BAOUENDI  
Purdue University

J. SJOSTRAND  
Université de Paris-Sud

Nous donnons ici les résultats essentiels d'un travail à paraître [3], nous référons à cet article pour le détail des démonstrations.

Nous étudions la régularité analytique du problème de Dirichlet pour certaines équations elliptiques (ou elliptiques dégénérées) du second ordre dans des domaines pouvant avoir au bord des singularités du type conique. Le résultat étant local, nous nous restreignons à un voisinage de l'origine dans  $\mathbb{R}^n$ .

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . On suppose que l'on a :  $0 \in \bar{\Omega}$  et qu'il existe un difféomorphisme analytique  $\chi : V_1 \rightarrow V_2$  entre deux voisinages ouverts de l'origine vérifiant  $\chi(0) = 0$  et  $\chi(\Omega \cap V_1) = \Omega_0 \cap V_2$ , où  $\Omega_0$  est un cône ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Si on suppose de plus que  $d\chi(0) = I$  (on peut toujours s'y ramener après composition avec une transformation linéaire), on voit que  $\Omega_0$  est indépendant du choix de  $\chi$  et on le désigne par  $\mathcal{C}_0(\Omega)$ , le "cône tangent" de  $\Omega$  au point 0.

Soit  $P(x,D)$  un opérateur différentiel du second ordre à coefficients analytiques au voisinage de l'origine de  $\mathbb{R}^n$ . On suppose que  $P$  s'écrit sous la forme

$$(1) \quad P(x,D) = P_0(x,D) + P_1(x,D) = \sum_{|\alpha| \leq 2} a_\alpha(x) D^\alpha + \sum_{|\alpha| \leq 2} a'_\alpha(x) D^\alpha$$

avec  $a_\alpha$  et  $a'_\alpha$  satisfaisant :

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe } K \in \mathbb{Z}, K \geq -2, \text{ tel que les } a_\alpha \text{ soient des polynômes ho-} \\ \text{mogènes de degré } |\alpha| + K, \text{ et } a'_\alpha \text{ s'annule au moins à l'ordre} \\ |\alpha| + K + 1 \text{ à l'origine.} \end{array} \right.$$

On suppose aussi que l'on a :

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} P_0 \text{ est elliptique sur } \overline{\mathcal{C}_0(\Omega)} \setminus \{0\}, \text{ et est proprement elliptique} \\ \text{pour } n=2. \end{array} \right.$$

On note que si  $P$  est elliptique (proprement si  $n=2$ ) à l'origine, (1) (2) et (3) sont vérifiées en prenant  $K=-2$  et  $P_0(x,D) = p(o,D)$  où  $p$  est le symbole principal de  $P$ .

En coordonnées polaires, on a

$$\mathcal{C}_0(\Omega) = \{(r, \theta) ; r > 0, \theta \in \omega\}$$

où  $\omega$  est un ouvert de la sphère unité  $S^{n-1}$ .

L'opérateur  $P_0$  devient en coordonnées polaires

$$(4) \quad P_0 = r^k Q_0(\theta, D_\theta, r D_r) = r^k \sum_{j=0}^2 A_j(\theta, D_\theta) \left(r \frac{\partial}{\partial r}\right)^{2-j}$$

où  $A_j$  est d'ordre  $\leq j$ . Soit  $a_j(\theta, \eta)$  le symbole principal d'ordre  $j$  de  $A_j$ .

On pose :

$$(5) \quad a(\theta, \eta, z) = \sum_{j=0}^2 a_j(\theta, \eta) z^{2-j}.$$

$$(6) \quad \Gamma = \{z \in \mathbb{C} ; a(\theta, \eta, z) = 0 \text{ pour } (\theta, \eta) \in T^*S^{n-1} \setminus \{0\}, \theta \in \overline{\omega}\}.$$

L'ellipticité de  $P_0$  dans  $\overline{\mathcal{C}_0(\Omega)} \setminus \{0\}$  implique que  $A_2(\theta, D_\theta)$  est elliptique dans  $\overline{\omega}$  et que  $a_0(\theta) = A_0(\theta)$  ne s'annule pas.  $\Gamma$  est alors un cône fermé du plan complexe ne rencontrant pas l'axe imaginaire pur. On pose  $\Gamma_+ = \{z \in \Gamma ; \operatorname{Re} z > 0\}$  et  $\hat{\Gamma}_+$  l'enveloppe convexe de  $\Gamma_+ \cup \mathbb{R}_+$ . On a encore besoin d'introduire la condition suivante :

(6)  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Après un difféomorphisme analytique préservant l'origine, on a} \\ \text{angle } \hat{\Gamma}_+ < \pi/n. \end{array} \right.$

Si  $P$  est elliptique à l'origine avec un symbole principal réel en ce point, alors la condition (6) est vérifiée ; en effet, après un changement de variables linéaire  $P_0$  devient  $\pm \Delta$  et  $\Gamma_+ = \hat{\Gamma}_+ = \mathbb{R}_+$ .

On désigne par  $C^\infty(\bar{\Omega})$  l'ensemble  $\{u|_{\Omega} ; u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)\}$ . On peut maintenant énoncer le résultat essentiel.

Théorème 1 : On suppose que  $P$  vérifie (1), (2), (3) et (6). Si  $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ , et  $Pu$  et  $u|_{\partial\Omega}$  ont des extensions analytiques à un voisinage ouvert de l'origine dans  $\mathbb{R}^n$ , il en est de même de  $u$ .

On donne maintenant une application du théorème 1. On dit qu'un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  est un polyèdre analytique si au voisinage de tout point  $x_0 \in \partial U$ ,  $U$  est défini par :

$$\varphi_1(x) > 0, \dots, \varphi_k(x) > 0$$

où les fonctions  $\varphi_1, \dots, \varphi_k$  sont analytiques, réelles, indépendantes, définies au voisinage de  $x_0$  et vérifiant  $\varphi_1(x_0) = \dots = \varphi_k(x_0) = 0$ .

Dans un voisinage  $V$  de  $x_0$  on peut donc choisir un difféomorphisme analytique  $\chi : V \ni x \longrightarrow (y_1, \dots, y_n) \in \chi(V)$  tel que  $y_j = \varphi_j(x)$  pour  $1 \leq j \leq k$ . On a alors  $\chi(V \cap U) = \chi(V) \cap \Omega_0$  où  $\Omega_0$  est ici le cône défini par  $y_1 > 0, \dots, y_k > 0$ . On peut donc énoncer :

Corollaire 2 : Soient  $U$  un polyèdre analytique dans  $\mathbb{R}^n$  et  $P(x, D)$  un opérateur différentiel elliptique d'ordre 2, à symbole principal réel, et à coefficients analytiques au voisinage de  $\bar{U}$ . Si  $u \in C^\infty(\bar{U})$ , et  $Pu$  et  $u$  ont des extensions analytiques aux voisinages de  $\bar{U}$  et  $\partial U$  respectivement, alors  $u$  s'étend analytiquement au voisinage de  $\bar{U}$ .

Il est clair que  $U$  peut aussi avoir des singularités isolées.

Par exemple si

$$U = \{x \in \mathbb{R}^n ; x_n^2 > \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2, 0 < x_n < 1\},$$

la conclusion du corollaire 2 reste inchangée.

Plusieurs auteurs ont étudié des problèmes aux limites dans des domaines admettant des singularités coniques, nous référons pour cela à [6] et [5] et leurs bibliographies. A notre connaissance, les résultats d'analyticité obtenus ici sont nouveaux même dans le cas du Laplacien (naturellement le résultat d'analyticité du corollaire 2 est bien connu quand le bord de  $U$  est analytique [7]). Observons aussi que, quand  $\Omega \cup \{0\}$  est un voisinage de 0 dans  $\mathbb{R}^n$ , le théorème 1 est essentiellement contenu dans [2].

#### Idées de la démonstration du théorème 1.

Pour simplifier on se limite ici au cas  $\Omega = \mathcal{C}_0(\Omega)$ ,  $P = P_0$  et  $K = 0$ . On a donc, en coordonnées polaires,

$$P = Q_0(\theta, D_\theta, r D_r)$$

où  $Q_0$  est donné dans (4).

Si  $B$  est la boule unité fermée de  $\mathbb{R}^n$  et  $u \in C^\infty(\bar{\Omega} \cap B)$ , la transformée de Mellin de  $u$  est définie par

$$\tilde{u}(z, \theta) = \int_0^1 r^{-z-1} u(r\theta) dr, \quad \operatorname{Re} z < 0, \quad \theta \in \omega$$

(voir [2] pour les propriétés de cette transformation).

Pour  $z \in \mathbb{C}$ , on pose :

$$A_z = A_z(\theta, D_\theta) = \sum_{j=0}^2 A_j(\theta, D_\theta) z^{2-j}.$$

Si  $u \in C^\infty(\bar{\Omega} \cap B)$  et  $Pu = v$ , on a

$$(7) \quad A_z \tilde{u}(z, \theta) = \tilde{v}(z, \theta) + C_0(\theta) + C_1(\theta)z$$

où  $C_0$  et  $C_1$  sont des combinaisons linéaires de  $u(\theta)$  et  $\frac{\partial u}{\partial r}(\theta)$ .

Le théorème 1 résulte assez facilement des deux lemmes suivants.

Lemme 3 : Si  $u \in C^\infty(\bar{\Omega} \cap B)$ , plate à l'origine, et satisfait  $Pu = 0$ ,  $u|_{\partial\Omega} = 0$  alors  $u = 0$ .

Lemme 4 : Si  $u \in C^\infty(\bar{\Omega} \cap B)$ ,  $u|_{\partial\Omega} = 0$  et  $Pu$  s'étend analytiquement à un voisinage de 0 dans  $\mathbb{R}^n$ , alors la série de Taylor de  $u$  à l'origine est convergente.

Idée de la démonstration du lemme 3 :

Comme  $u$  est plate à l'origine  $\tilde{u}(z, \theta)$  est entière en  $z$  à valeur dans  $C^\infty(\bar{\omega})$ . (7) devient

$$(8) \quad A_z \tilde{u}(z, \theta) = C_0(\theta) + C_1(\theta)z.$$

Il suffit de démontrer que l'on a pour tout  $z \in \mathbb{C}$

$$(9) \quad \|\tilde{u}(z, \cdot)\|_{L^2(\omega)} \leq C(1+|z|).$$

On montre alors que pour  $z \notin \hat{\Gamma}_+$  et  $|z|$  assez grand  $A_z$  est inversible comme opérateur de  $H^1_0(\omega)$  dans  $H^{-1}(\omega)$  avec un contrôle sur la norme de  $A_z^{-1}$ . Pour obtenir (9) dans tout le plan complexe, on utilise le théorème de Phragmén-Lindelöf. Pour cela, on a besoin de majorer  $A_z^{-1}$  sur des droites parallèles à l'axe imaginaire pur et tendant vers l'infini. On utilise des résultats sur les opérateurs de classe  $C^p$  de [4] (ici  $p > n-1$ ).

Idée de la démonstration du lemme 4 :

Ici  $\tilde{u}(z, \theta)$  est méromorphe et admet comme pôles  $0, 1, \dots, k, \dots$  ; ce sont des pôles simples, les résidus étant  $-u_0(\theta), \dots, -u_k(\theta), \dots$ , si le déve-

loppement de Taylor de  $u$  à l'origine est

$$u \sim \sum_{k=0}^{\infty} r^k u_k(\theta).$$

On pose

$$\hat{u}(z, \theta) = \sin(2\pi z) \tilde{u}(z, \theta)$$

$$Pu = v \quad \text{et}$$

$$\hat{v}(z, \theta) = \sin(2\pi z) \tilde{v}(z, \theta).$$

De nouveau, on utilise l'équation (7), des inégalités sur la norme de l'inverse de  $A_z$  ainsi que le théorème de Phragmén-Lindelöf pour montrer que l'on a, pour tout  $z \in C$

$$(10) \quad \|\hat{u}(z, \theta)\|_{L^2(\omega)} \leq C e^{C|z|}.$$

On déduit de (10) que l'on a

$$(11) \quad \|u_k\|_{L^2(\omega)} \leq M^{k+1}.$$

En utilisant (11) et des inégalités sur les polynômes homogènes  $r^k u_k(\theta)$  (inégalités du type Bernstein voir [1]), on conclut que la série de Taylor de  $u$  à l'origine est convergente.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M.S. BAOUENDI et C. GOULAOUIC : Approximation of analytic functions on compact sets and Bernstein's inequality.  
Trans. Amer. Math. Soc. 189 (1974) p. 251-261.
- [2] M.S. BAOUENDI et J. SJOSTRAND : Régularité analytique pour des opérateurs elliptiques singuliers en un point.  
Ark. för Mat. 14 (1976) p. 9-33.
- [3] M.S. BAOUENDI et J. SJOSTRAND : Analytic regularity for the Dirichlet problem in domains with conic singularities.  
(A paraître) Scuola Norm. Sup. Pisa.
- [4] N. DUNFORD et J.T. SCHWARTZ : Linear operators, Part II, New-York, 1963.
- [5] P. GRISVARD : Behavior of the solutions of an elliptic boundary value problem in a polygonal or polyhedral domain, Proc. Numerical solution of P.D.E'. s III. Acad. Press (1976) p. 207-274. /
- [6] KONDRATEV : Boundary value problems for elliptic equations in domains with conical or angular points, Trudy. Mosk. Mat. Obs. 16 (1967), p. 209-292. (Transactions of the Moscow Math. Soc. (1967) p. 227-313).
- [7] C.B. MORREY et L. NIRENBERG : On the analyticity of the solutions of linear elliptic systems of P.D.E'.s. Comm. Pure Appl. Math. 10 (1957), p. 271-290.